

УДК 533.6.011.72/8

© 2004 г. В. Г. МАКАРЯН, Н. Е. МОЛЕВИЧ

СТРУКТУРА ГАЗОДИНАМИЧЕСКОГО ВОЗМУЩЕНИЯ В ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИ НЕРАВНОВЕСНОЙ СРЕДЕ С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ МОДЕЛЮ РЕЛАКСАЦИИ

Аналитически и численно исследована эволюция и стационарная структура газодинамических возмущений в термодинамически неравновесном газе. Показано, что в среде с отрицательной вязкостью возможно существование стационарных структур, отличных от структур в равновесной среде. Найдены условия существования стационарных ударных волн с разрывным фронтом и плавным увеличением или уменьшением амплитуды за фронтом волн с осцилляторной структурой, а также стационарного автоволнового импульса с экспоненциальным задним фронтом.

Ключевые слова: неравновесная среда, релаксация, отрицательная вязкость, ударная волна, автоволновой импульс.

В термодинамически неравновесных средах возможна инверсия коэффициента второй вязкости. Примерами подобных сред являются колебательно возбужденный газ, неизотермическая плазма, химически активные смеси, среды с неравновесными фазовыми переходами, газовзвеси с разной температурой компонент и тому подобные [1–10].

В термодинамически равновесном газе структура слабых ударных волн хорошо известна [11]. Эволюция газодинамических возмущений малой амплитуды описывается уравнением Бюргера. Уравнение Бюргера имеет стационарное решение в виде ступеньки с шириной фронта, определяемой величиной вязкости. Локализованное возмущение эволюционирует в треугольную ударную волну конечной площади и бесконечно малой амплитуды. Периодическое возмущение сначала трансформируется в пилообразную волну, а затем быстро затухает, становится синусоидальным и далее диссипирует по законам линейной акустики.

Термодинамические неравновесные среды с отрицательной вязкостью акустически активны, причем в ограниченном спектральном диапазоне [3]. В подобных средах возможно существование стационарных структур, отличных от ударно-волновых структур типа ступеньки. До сих пор исследование этих структур проводилось на основе нелинейных уравнений, полученных во втором или третьем газодинамическом приближении отдельно для низкочастотных и высокочастотных возмущений. Примером таких уравнений в низкочастотной области является уравнение Бюргера с отрицательной вязкостью [1, 12, 13], описывающее взрывную неустойчивость подобной среды и начальную стадию коллапса газодинамического возмущения. Стабилизацию коллапса описывает модифицированное уравнение Кортевега-де Вриза – Бюргера с нелинейной вязкостью [3], получаемое в третьем газодинамическом приближении, или уравнение Курамото – Сивашинского [14]. Пример уравнений в высокочастотной области – уравнение Бюргера с источником [5, 15–19] или уравнение Бюргера с источником и интегральной дисперсией [20]. Недостатком этих уравнений является то, что на их основе нельзя описать нестационарную эволюцию возмущений с произвольным спектром. Кроме того, спектр стационарных структур, ими описываемых, оказывается шире области применимости этих уравнений.

1. Постановка задачи. В настоящей работе впервые исследованы решения уравнения, описывающего нелинейную эволюцию акустического возмущения произвольного спектрального состава в неравновесном газе с релаксационным процессом вида

$$\frac{dE}{dt} = \frac{E_e - E}{\tau(T, \rho)} + Q \quad (1.1)$$

Например, для колебательно-возбужденного газа E – энергия колебательных степеней свободы молекул, E_e – ее равновесное значение, τ – время колебательной релаксации; Q – источник энергии, поддерживающий термодинамическую неравновесность в системе (его происхождение в данной работе не конкретизируется. В частности, это может быть оптическая или электрическая накачка).

Исследуемое уравнение имеет вид [21]

$$\begin{aligned} & C_{v\infty} \tau_0 \left(u_{tt} - c_\infty^2 u_{xx} - c_\infty \Psi_\infty u_{xx}^2 - \frac{\mu_\infty}{\rho_0} u_{xxt} \right)_t + \\ & + C_{v0} \left(u_{tt} - c_0^2 u_{xx} - c_0 \Psi_0 u_{xx}^2 - \frac{\mu_0}{\rho_0} u_{xxt} \right) = 0, \\ & c_\infty = \sqrt{\frac{\gamma_\infty T_0}{M}}, \quad c_0 = \sqrt{\frac{\gamma_0 T_0}{M}}, \quad \gamma_\infty = \frac{C_{p\infty}}{C_{v\infty}}, \quad \gamma_0 = \frac{C_{p0}}{C_{v0}} \\ & \Psi_\infty = \frac{\gamma_\infty + 1}{2}, \quad \Psi_0 = \left[\frac{S\tau'(1+S)}{C_{p0}C_{v0}} + \frac{1+2C_{v0}}{2C_{v0}} - \frac{S(1+S)^2}{2C_{p0}C_{v0}^2} \tau'' \right] \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$C_{v0} = C_{v\infty} + C_k + S\tau', \quad C_{p0} = C_{p\infty} + C_k + S(\tau' + 1)$$

$$S = \frac{E_0 - E_{e0}}{T_0} = \frac{Q\tau_0}{T_0}, \quad \tau' = \frac{\partial \ln \tau_0}{\partial \ln T_0}, \quad \tau'' = \frac{T_0^2 \partial^2 \tau_0}{\tau_0^2 \partial^2 T_0}$$

$$\mu_\infty = \frac{4\eta}{3} + \chi M \left(\frac{1}{C_{v\infty}} - \frac{1}{C_{p\infty}} \right), \quad \mu_0 = \frac{4\eta}{3} + \chi M \left(\frac{1}{C_{v0}} - \frac{1}{C_{p0}} \right)$$

где u – возмущение газовой скорости; c_∞, c_0 – скорости высокочастотного и низкочастотного звуков; γ_∞, γ_0 – высокочастотный и низкочастотный показатели адиабаты; $C_{v0}, C_{p0}, C_{v\infty}, C_{p\infty}$ – низкочастотные и высокочастотные теплоемкости в колебательно-возбужденном газе при постоянном объеме и давлении [1, 3]; T_0, ρ_0, τ_0 – невозмущенные значения температуры, плотности и времени релаксации; M – молекулярная масса; S – степень неравновесности среды; E_0, E_{e0} – стационарные значения величин E, E_e ; C_k – равновесная колебательная теплоемкость; μ_∞, μ_0 – высокочастотный и низкочастотный вязкостно-теплопроводностные коэффициенты; η, χ – коэффициенты сдвиговой вязкости и теплопроводности; Ψ_∞, Ψ_0 – высокочастотный и низкочастотный коэффициенты квадратичной нелинейности. Следует подчеркнуть, что полученный коэффициент нелинейности Ψ_0 зависит от степени неравновесности S и может быть даже отрицательным. Впервые на это было обращено внимание в [1, 22]. При $S = 0$ его вид упрощается до $\Psi_0 = (\gamma_0 + 1)/2 < \Psi_\infty$.

Уравнение (1.2) получено с точностью до величин второго порядка малости $\sim \theta^2$. Оно описывает эволюцию возмущений малой амплитуды $u/c_\infty \sim \theta$ в приближении слабой дисперсии $m = (c_0^2 - c_\infty^2)/c_\infty^2 \sim \theta$ и малой диссипации $\mu_{0,\infty}/\tau c_\infty^2 \rho_0 \sim \theta$. Кроме того, уравнение (1.2) (как и все другие нелинейные модельные уравнения, применяемые ранее при аналитических исследованиях одномерных газодинамических структур в неравновесных средах) получено без учета неоднородности стационарной неравно-

весной среды, а также влияния возмущений на накачку и теплоотвод. В [23] показано, что при $\omega \gg c_\infty/L$, где L – характерная длина неоднородности, слабая продольная неоднородность неравновесной среды может привести к дополнительному (положительному или отрицательному) вкладу в акустический инкремент. В обратном частотном диапазоне (где не выполняется приближение геометрической акустики) роль неоднородности акустически активной среды должна быть еще более существенной, но пока не исследована. Зависимости мощности накачки и теплоотвода от температуры и плотности среды также приводят к изменению вида акустического инкремента и дисперсии скорости звука, особенно в частотном диапазоне $\omega \ll Q/T$ [2, 3, 5]. Исследование влияния этих факторов на нелинейную акустику неравновесной среды до сих пор не проводилось.

Для волн, бегущих в одном направлении, уравнение (1.2) преобразуется к безразмерному виду

$$\left(v_y + \frac{\Psi_0}{2} v_\zeta^2 - \eta_\infty v_{\zeta\zeta} \right)_\zeta - \frac{C_{v0}}{C_{v\infty}} \left(v_y + \frac{m}{2} v_\zeta + \frac{\Psi_0}{2} v_\zeta^2 - \eta_0 v_{\zeta\zeta} \right) = 0 \tag{1.3}$$

$$v = \frac{u}{c_\infty}, \quad \zeta = \frac{x - c_\infty t}{c_\infty \tau_0}, \quad y = \frac{\theta t}{\tau_0}, \quad \eta_0 = \frac{\mu_0}{2\tau c_\infty^2 \rho_0}, \quad \eta_\infty = \frac{\mu_\infty}{2\tau c_\infty^2 \rho_0}$$

При $S = 0$ уравнение (1.3) совпадает с известным релаксационным уравнением [24], но в последнем не учитывалось отличие η_0 от η_∞ и Ψ_0 от Ψ_∞ .

Уравнение (1.3) может быть сведено к известным уравнениям, описывающим эволюцию низкочастотных или высокочастотных возмущений. В низкочастотном приближении ($\partial v/\partial y \sim \theta v$) уравнение (1.3) сводится с точностью до величин $\sim \theta^3$ к модифицированному уравнению Курамото – Сивашинского

$$v_y + \Psi_0 v v_\zeta = (\eta_0 + \xi) v_{\zeta\zeta} + \beta_0 v_{\zeta\zeta\zeta} + \kappa v_{\zeta\zeta\zeta\zeta}$$

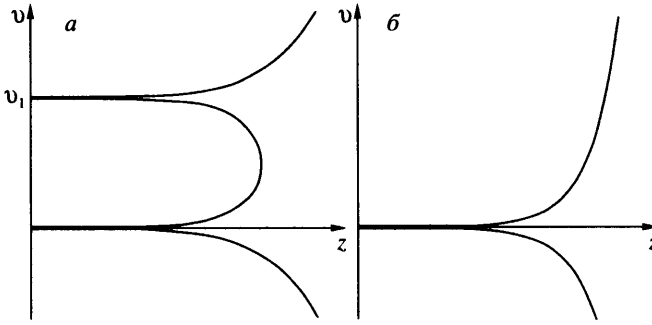
$$\xi = \frac{\xi_0}{2\rho_0 \tau_0 c_0^2}, \quad \xi_0 = \frac{\rho_0 \tau_0 C_{v\infty} (c_\infty^2 - c_0^2)}{C_{v0}} = \frac{T_0 \rho_0 \tau_0 [(\tau' - C_{v\infty})S + C_k]}{MC_{v0}^2} \tag{1.4}$$

Здесь ξ – безразмерный коэффициент второй вязкости [3, 25]. Если пренебречь малыми слагаемыми порядка $\eta_0^2, \eta_0 \xi$, то остальные коэффициенты в (1.4) удовлетворяют соотношениям: $\kappa = C_{v\infty} \beta_0 / C_{v0} = C_{v\infty}^2 \xi / C_{v0}^2$. При $C_{v0} > 0$ все эти коэффициенты отрицательны, если отрицателен коэффициент второй вязкости, т.е. при $(\tau' - C_{v\infty})S + C_k < 0$. Уравнение (1.4) при таких знаках коэффициентов (и отрицательном коэффициенте полной вязкости $\mu, \mu = \eta_0 + \xi < 0$) использовалось ранее для описания волновых процессов в пленках жидкости, стекающих по наклонной плоскости, возмущений концентраций реагирующих веществ при химических реакциях и горении, волн электростатического потенциала в тороидальных системах и т.д. [14 и приводимую там литературу]. Здесь оно получено применительно к колебательно-возбужденному газу (или к любой среде с релаксационным процессом типа (1.1)).

В высокочастотном приближении ($\partial v/\partial y \sim \theta^{-1} v$) уравнение (1.3) сводится с точностью до величин $\sim \theta^2$ к уравнению Бюргера с источником и интегральной дисперсией [20]

$$v_y + \Psi_\infty v v_\zeta = \eta_\infty v_{\zeta\zeta} - \alpha_\infty v - \beta_\infty \int v d\zeta$$

$$\alpha_\infty = \frac{\xi_0 C_{v0}^2}{2C_{v\infty}^2 \rho_0 \tau_0 c_\infty^2}, \quad \beta_\infty \approx \frac{C_{v0} \alpha_\infty}{C_{v\infty}}$$



Фиг. 1. Интегральные кривые, описываемые уравнением (2.3) при разных значениях величины v_1 : $0 < v_0 < v_1$ (а); $v_0 = v_1$ (б)

где $\alpha_\infty, \beta_\infty$ – безразмерные коэффициенты усиления (при $\xi_0 < 0$) и дисперсии высокочастотного звука. При пренебрежении дисперсией высокочастотного звука это уравнение имеет стационарные решения в виде пилообразных волн. Серьезный недостаток этих решений – их эволюционная неустойчивость по отношению к возмущениям большого периода [15, 16]. Учет дисперсии приводит только к изгибу заднего фронта этих волн и изменению их скорости, но не снимает проблему их неустойчивости [20].

Эволюцию возмущения произвольного спектра необходимо исследовать с помощью полного уравнения (1.3), что и было осуществлено в данной работе.

2. Стационарные решения уравнения (1.3) при $\eta_\infty = \eta_0 = 0$. Преобразуем (1.3) к стационарной форме, используя автомодельную замену ($z = \zeta - w$, w – скорость стационарной волны):

$$v_{zz} + v_z \left[\left(\frac{w}{\eta_\infty} - \frac{C_{v0} \eta_0}{C_{v\infty} \eta_\infty} \right) - \frac{\Psi_\infty}{\eta_\infty} v \right] + \frac{C_{v0}}{\eta_\infty C_{v\infty}} \left[- \left(w - \frac{m}{2} \right) v + \frac{\Psi_0}{2} v^2 \right] = c \tag{2.1}$$

где c – константа интегрирования. Ниже полагается $c = 0$, что всегда справедливо для возмущений (и их производных), обращающихся в нуль при $z \rightarrow \infty$.

При $\eta_\infty = \eta_0 = 0$ уравнение (2.1) сводится к виду

$$\frac{dv}{dz} = \frac{v(v - v_1)}{\sigma(v - v_0)} \tag{2.2}$$

$$\sigma = \frac{2\Psi_\infty}{v\Psi_0}, \quad v = \frac{C_{v0}}{C_{v\infty}}, \quad v_0 = \frac{w}{\Psi_\infty}, \quad v_1 = \frac{2w - m}{\Psi_0}$$

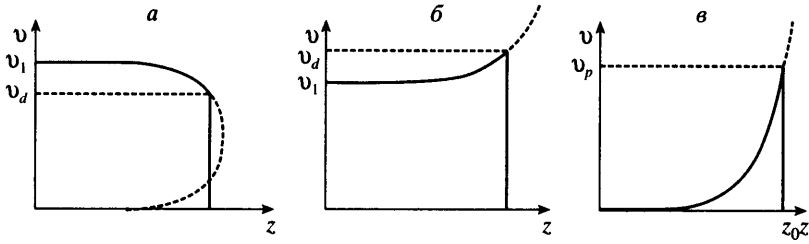
Решение уравнения (2.2) можно записать в неявном виде

$$z = z_0 + \frac{\sigma v_0}{v_1} \ln|v| + \frac{\sigma(v_1 - v_0)}{v_1} \ln|v - v_1| \tag{2.3}$$

где z_0 – произвольная постоянная. На фиг. 1 представлены интегральные кривые уравнения (2.3) при условиях $v_0 < v_1$ и $v_0 = v_1$. Им соответствуют три типа разрывных решений, вид которых приведен на фиг. 2.

Решения, показанные на фиг. 2, а, б, описываются интегральной кривой фиг. 1, а с разрывами на средней ($v_1 > v_d$, фиг. 2, а) или верхней ветви ($v_1 < v_d$, фиг. 2, б). Место разрыва определяется величиной скачка газодинамического возмущения

$$v_d = \frac{2w}{\Psi_\infty} = 2v_0 \tag{2.4}$$



Фиг. 2. Форма стационарных газодинамических возмущений при нулевых вязкостно-теплопроводностных коэффициентах: *а* – ударная волна с плавным увеличением амплитуды; *б* – ударная волна с плавным уменьшением амплитуды; *в* – стационарный ударно-волновой импульс с разрывным передним и экспоненциальным задним фронтами

Выражение (2.4) получается после интегрирования уравнения (2.1) вблизи разрыва. Значение v_1 определяет величину возмущения при $z \rightarrow -\infty$, скорость распространения стационарной волны

$$w = \frac{\Psi_\infty}{2} v_d = \frac{\Psi_0}{2} v_1 + \frac{m}{2}$$

и условие существования данных типов решения. Согласно (2.4) получаем

$$v_d = \frac{\Psi_0 v_1 - 2v\xi}{\Psi_\infty} \tag{2.5}$$

Откуда следует, что решение, приведенное на фиг. 2, *а* (плавное нарастание возмущения за разрывом), существует при $v_1 > v_{cr} = -2v\xi/(\Psi_\infty - \Psi_0)$. Здесь и ниже полагается $v > 0, \Psi_\infty > \Psi_0 > 0$. Легко показать, что при $v_1 > v_{cr}$ высокочастотные возмущения конечной амплитуды обгоняют низкочастотные: $\Psi_\infty c_\infty v_1/2 + c_\infty > \Psi_0 c_\infty v_1/2 + c_0$.

В равновесных релаксирующих средах (имеется в виду отсутствие стационарной неравновесности, т.е. $S = 0$) условие $v_1 > v_{cr}$ выполняется всегда, а скачок (2.5) существует только при $v_1 > 2v\xi/\Psi_0$. Это условие существования скачка совпадает с точностью до обозначений с соответствующим условием (VII.5.8), полученным на основании анализа ударных кривых в релаксирующем газе [24].

В неравновесной среде с отрицательной второй вязкостью (или при $\Psi_0 > \Psi_\infty$) условие $v_1 > v_{cr}$ может нарушаться. При $v_0 < v_1 < v_{cr}$ появляется возможность существования стационарной волны иного типа (фиг. 2, *б*): за разрывом происходит плавное уменьшение амплитуды возмущения от v_d (2.5) до v_1 . На принципиальную возможность существования такой ударной волны в диссоциирующем многоатомном газе указывалось также в [25].

Условие $v_1 > v_0$ совпадает с условием $\Psi_\infty v_1 > w$. Левая часть последнего неравенства соответствует скорости бесконечно малого возмущения, распространяющегося за фронтом рассматриваемой стационарной волны. Таким образом, условие $v_1 > v_0$ фактически соответствует условию эволюционной устойчивости ударных волн [25].

Рассмотрим теперь решение уравнения (2.1) при $v_1 = v_0$, соответствующее интегральной кривой уравнения, показанной на фиг. 1, *б*. Оно существует только в неравновесной среде с отрицательной второй вязкостью и имеет вид ударно-волнового импульса вида

$$v_p \exp\left[\frac{(z - z_0)v\Psi_0}{2\Psi_\infty}\right], \quad z < z_0$$

где z_0 – соответствует положению фронта (фиг. 2, в). Этот импульс распространяется со скоростью $w_p = m\Psi_\infty / (2\Psi_\infty - \Psi_0)$, а его амплитуда $v_p = 2w_p / \Psi_\infty = 2m / (2\Psi_\infty - \Psi_0)$.

Учитывая вид v_p, w_p , условие существования ударных волн не импульсного типа $v_1 > v_0$ можно записать в полезных для приложений формах $v_1 > v_p/2, w > w_p$.

3. Стационарные решения уравнения (1.3) при $\eta_\infty, \eta_0 \neq 0$. Анализ решений стационарного уравнения (1.3) с учетом не нулевых значений вязкостно-теплопроводностных коэффициентов проведем на фазовой плоскости v_z, v . На этой плоскости имеются две стационарные точки: $(0, 0)$ и $(0, v_1)$, где v_1 определена формулой (2.2). При $w > m/2$ первая точка всегда является седлом, а вторая – в зависимости от скорости стационарной волны w может быть узлом или фокусом. Для определенности ниже будем использовать следующие параметры уравнения (2.1): $m = 0.1, v = 0.84, \Psi_0 = 1.1, \Psi_\infty = 1.23, \eta_0 \sim \eta_\infty \sim 10^{-5}$. Эти параметры соответствуют степени неравновесности $S = 0.1$ в типичной лазерной среде ($\text{CO}_2:\text{N}_2:\text{He}$, нормальные условия, $\tau \sim 10^{-5}$ с) [4]. При этом коэффициент усиления звука $\sim -0.1 \text{ см}^{-1}$, отношение коэффициентов вязкости $\mu_t/\eta_\infty \sim -10^4$. Рассмотрим решения (2.1) при разных w .

$$\frac{m}{2} < w < w_{\text{bif}}, \quad w_{\text{bif}} = \frac{\Psi_\infty m - v\Psi_0\eta_0}{2\Psi_\infty - \Psi_0}$$

Совместное выполнение подобных условий возможно только при отрицательном коэффициенте полной вязкости $\mu_t = \eta_0 - m/2v < 0$. Стационарная точка в этом случае устойчивый узел или устойчивый фокус. Финитное стационарное решение соответствует волне перепада $v(z \rightarrow -\infty) = 0, v(z \rightarrow \infty) = v_1$, которая имеет монотонную или немонотонную структуру фронта. Подобное решение не имеет физического смысла и эволюционно неустойчиво.

$$w \geq w_{\text{bif}}, \quad \mu_t < 0$$

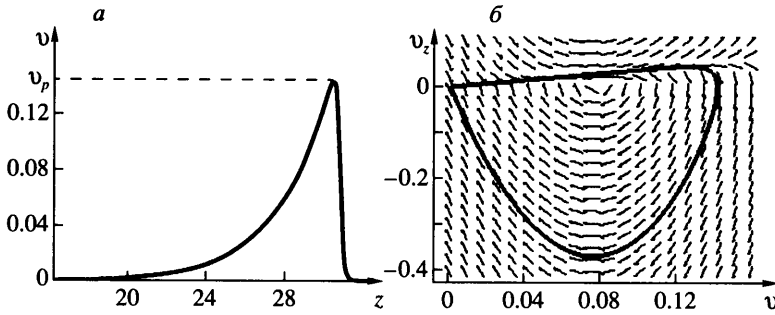
Стационарная точка – неустойчивый фокус (при выполнении условия $(2\Psi_\infty - \Psi_0)^2 (w - w_{\text{bif}})^2 < 4\eta_\infty v\Psi_0^2 (w - m/2v)$) или узел. При малом диссипативном коэффициенте $\eta_\infty \ll 1$ область существования фокуса значительно уже области существования узла.

При $w = w_{\text{bif}}$ происходит рождение предельного цикла (бифуркация Андронова – Хопфа) с соответствующим ему автоколебательным режимом. С ростом w предельный цикл приближается к сепаратрисе, а период автоколебаний возрастает. При $w = w_s$ финитное решение имеет вид сильно несимметричного уединенного импульса (фиг. 3). Для наглядности и избежания счетной неустойчивости использовали в 1000 раз большие коэффициенты вязкости ($\eta_\infty \sim 0.01$). Асимметрия уединенной волны следует из вида асимптотик уравнения (2.1) $v(z \rightarrow -\infty) \sim \exp\lambda_1 z, v(z \rightarrow \infty) \sim \exp\lambda_2 z$, где при $\eta_\infty \ll |\mu_t|$ инкременты нарастания определяются в виде

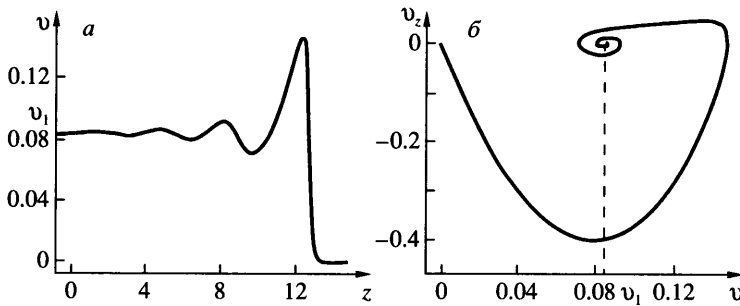
$$\lambda_1 = \frac{v\Psi_0}{2\Psi_\infty}, \quad \lambda_2 = \frac{2|\mu_t|v\Psi_\infty}{\eta_\infty(2\Psi_\infty - \Psi_0)} \gg \lambda_1$$

Значение w_s и амплитуду импульса при произвольных значениях η_∞, η_0 точно аналитически записать не удастся. При $\eta_\infty = 0$ имеем $w_s = w_{\text{bif}}$. Последняя величина уточняет значение скорости импульса w_p , полученной без учета η_0 . Конечные значения коэффициента η_∞ (имеются в виду значения $\eta_\infty \ll 1$, иначе нарушаются условия применимости уравнения (1.2)) приводят к слабому увеличению скорости импульса. Например, при $\eta_\infty = 0.01, 0.1$ и указанных выше значениях остальных параметров имеем $w_s \approx 0.093, 0.099$ соответственно, что не значительно отличается от $w_{\text{bif}} = 0.090$. Амплитуда импульса также практически не зависит от η_∞ и хорошо аппроксимируется величиной

$$v_p = \frac{4|\mu_t|v}{2\Psi_\infty - \Psi_0} \quad (3.1)$$



Фиг. 3. Стационарный импульс при $m = 0.1$, $\eta_\infty = 0.01$ (а) и соответствующая ему фазовая траектория (сепаратриса) (б). Скорость импульса $w = 0.093$



Фиг. 4. Стационарная волна с осцилляциями за фронтом при $m = 0.1$, $\eta_\infty = 0.01$ (а) и соответствующая ей фазовая траектория (б), идущая из седла в фокус. Скорость стационарной волны $w = 0.096$

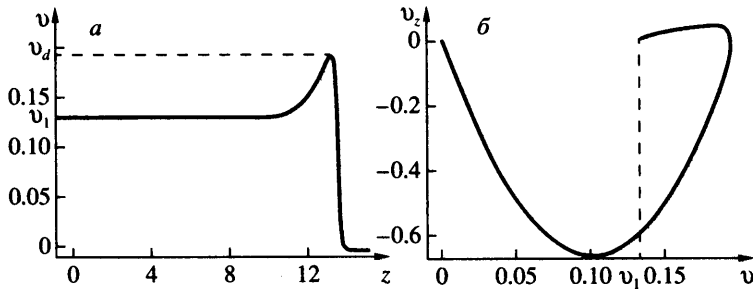
При $\eta_0 \rightarrow 0$ амплитуда (3.1) совпадает со значением v_p , полученным в разд. 2. Таким образом, конечное значение величины η_0 влияет на амплитуду и скорость импульса, а конечное значение величины η_∞ (точнее отношение η_∞/μ_t) – в основном на его форму и степень асимметрии.

При дальнейшем увеличении скорости распространения стационарной волны $w > w_s$ происходит гибель сепаратрисы и появление фазовой траектории, соответствующей волне перепада $v(z \rightarrow -\infty) = v_1$, $v(z \rightarrow \infty) = 0$, где

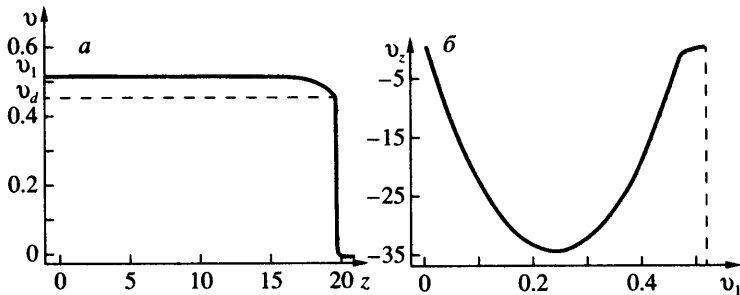
$$v_1 > \frac{v_p}{2} \approx \frac{2\nu|\mu_t|}{2\Psi_\infty - \Psi_0} \tag{3.2}$$

Условия (3.2) и $w > w_s$ уточняют условия разд. 2, ограничивающие допустимые скорости и амплитуды ударных волн не импульсного типа.

На фиг. 4–6 представлены формы волн перепада и соответствующие им фазовые траектории, получаемые при разных скоростях распространения стационарной волны, удовлетворяющих условию $w > w_s$. При $\eta_\infty, \eta_0 \rightarrow 0$ область существования неустойчивого фокуса на фазовой плоскости и соответствующей этому случаю волны перепада с осцилляциями за фронтом (фиг. 4) стремится к нулевой. Стационарные структуры, показанные на фиг. 5, 6, качественно совпадают с соответствующими структурами, полученными в разд. 2. Наличие конечного вязкостно-диссипативного ко-



Фиг. 5. Стационарная волна с плавным уменьшением амплитуды за фронтом (а) при $m = 0.1$, $\eta_\infty = 0.01$ и соответствующая ей фазовая траектория (б), идущая из седла в узел ($w = 0.12$)



Фиг. 6. Стационарная волна с плавным увеличением амплитуды за фронтом (а) при $m = 0.01$, $\eta_\infty = 0.001$ и соответствующая ей фазовая траектория (б), идущая из седла в узел ($w = 0.29$)

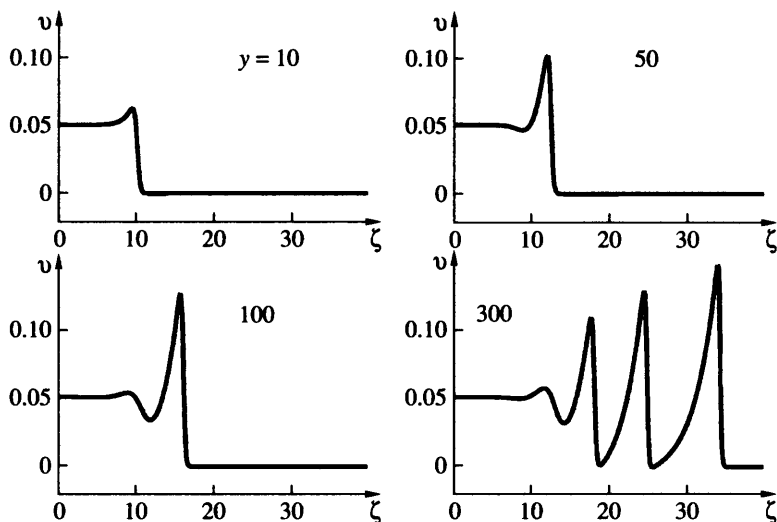
эффицента η_0 приводит здесь к изменению амплитуды скачка $v_d \approx (\Psi_0 v_1 - 2\nu\mu_t)/\Psi_\infty$. Наличие конечного вязкостно-диссипативного коэффициента η_∞ приводит к сглаживанию переднего фронта $\sim \eta_\infty$.

4. Численное моделирование эволюции возмущения типа ступеньки. Нестационарная эволюция возмущений типа “ступенька” в среде с отрицательной полной вязкостью $\mu_t < 0$ исследовалась численно с помощью метода расщепления. В “расщепленном” виде исходное уравнение (1.3) сводилось к решению системы двух уравнений

$$f_\zeta - \nu f = \nu \left[\frac{m}{2} v_\zeta - (\Psi_\infty - \Psi_0) \nu v_\zeta + (\eta_\infty - \eta_0) v_{\zeta\zeta} \right] \quad (4.1)$$

$$\nu_y + \Psi_\infty \nu v_\zeta - \eta_\infty v_{\zeta\zeta} = f \quad (4.2)$$

Численное решение системы (4.1), (4.2) рассчитывалось следующим образом. Начальное возмущение $v(\zeta, y = 0)$ в виде ступеньки подставлялось в правую часть уравнения (4.1), для решения которого использовалась схема первого порядка. Затем находилось решение уравнения (4.2) с известной правой частью по неявной схеме второго порядка аппроксимации по ζ методом прогонки. После этого известное решение уравнения (4.2) подставлялось в правую часть уравнения (4.1), и находилась функция f . Данный процесс продолжался до определенных значений “времени” y . Значения параметров системы (4.1), (4.2) приведены выше, в разд. 3. Коэффициент $\eta_\infty = 0.01$.



Фиг. 7. Нестационарный распад “ступеньки” малой амплитуды на автоволновые импульсы с амплитудой $v_p = 0.14$ ($y = t/\tau$)

Ступеньки с амплитудами v_1 , удовлетворяющими условиям $v_1 > v_{cr}$ или $0.5v_p < v_1 < v_{cr}$ в ходе эволюции трансформировались в стационарные структуры, показанные на фиг. 5, а, б, а, соответственно. Характерное время установления стационарных структур было $\sim 10\text{--}100\tau$. При $\tau \sim 10^{-5}$ с длина неравновесной среды, необходимая для их наблюдения, должна быть ~ 100 см.

При $v_1 \leq v_p/2 \approx 0.07$ ступенька становилась неустойчивой и при $y > 100$ распадалась на периодическую последовательность стационарных импульсов (фиг. 7), вид которых найден ранее в разд. 2, 3 (фиг. 2, в, 3, а). Эти импульсы являются автоволнами, так как их форма и амплитуда не зависели от начальных значений амплитуды “ступеньки” и ширины ее фронта.

Эволюция возмущений произвольного спектрального состава в неоднородных или нестационарных неравновесных средах может быть рассмотрена, по-видимому, только при прямом численном моделировании уравнений релаксационной газодинамики. При численном решении уравнений газодинамики, чтобы избежать неустойчивости схем на разрыве, обычно используют так называемую “искусственную” положительную вязкость. Эта вязкость, особенно если она значительно увеличивает коэффициент η_0 , может просто уничтожить реальные эффекты, связанные с влиянием отрицательной второй вязкости на структуру фронта ударной волны. Следует обратить особое внимание на эту проблему, возникающую при численном моделировании неравновесных сред с отрицательной второй вязкостью. В этой связи полученные в данной работе аналитические решения могут использоваться также в качестве эталонных при отладке численных схем.

Заключение. Во втором порядке теории возмущений исследована эволюция и стационарная структура газодинамического возмущения в среде, стационарная неравновесность $S \neq 0$ которой не связана с прохождением самого возмущения. Получены следующие основные результаты.

Показана возможность существования в термодинамически неравновесных средах ударных волн с плавным повышением амплитуды за вязким скачком. Качественно эти волны совпадают с известными ранее в релаксирующих равновесных средах ($S = 0$) [11, 24, 25], но количественно параметры скачка могут сильно отличаться из-за силь-

ной зависимости низкочастотной скорости звука и низкочастотного коэффициента нелинейности от степени неравновесности среды S .

В неравновесных средах при отрицательном коэффициенте полной вязкости $\mu_t < 0$ найдены условия существования слабых ударных волн с новой стационарной структурой, в которой за вязким скачком наблюдается плавное уменьшение амплитуды возмущения.

В отличие от равновесных сред показана возможность существования в неравновесных средах с $\mu_t < 0$ стационарного сильно асимметричного импульса сжатия. Этот импульс является автоволной, так как его амплитуда v_p и форма полностью определяются параметрами неравновесной среды.

Впервые исследованы при $\mu_t < 0$ неустойчивость и распад слабого возмущения типа "ступенька" с амплитудой $v_1 \leq v_p/2$ на стационарные автоволновые импульсы сжатия с амплитудой v_p .

Низкочастотный и высокочастотный вязкостно-теплопроводностные коэффициенты η_0, η_∞ по-разному влияют на структуру стационарных газодинамических возмущений. Коэффициент η_0 влияет на условия существования найденных стационарных структур, амплитуду скачка, скорость и амплитуду автоволнового импульса. Коэффициент η_∞ влияет прежде всего на ширину фронта ударной волны и форму автоволнового импульса. При достаточно большом коэффициенте η_∞ и $\mu_t < 0$ возможно также существование ударных волн малой амплитуды с осцилляторной структурой.

Полученные в настоящей работе стационарные структуры имеют широкий спектр и не могут быть описаны с помощью используемых ранее уравнений низкочастотного или высокочастотного приближений.

Работа выполнена в рамках проектов Федеральной целевой программы "Интеграция науки и высшего образования России на 2002–2006 годы", российско-американской программы "Фундаментальные исследования и высшее образование" ("BRHE"), при финансовой поддержке Министерства образования РФ, Администрации Самарской области, Американского фонда гражданских исследований и развития (CRDF Project SA-014-02).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коган Е.Я., Молевич Н.Е. Коллапс акустических волн в неравновесном молекулярном газе // ЖТФ. 1986. Т. 56. № 5. С. 941–943.
2. Молевич Н.Е., Ораевский А.Н. Вторая вязкость в термодинамически неравновесных средах // ЖЭТФ. 1988. Т. 94. № 3. С. 128–132.
3. Молевич Н.Е., Ораевский А.Н. Волны в среде с отрицательной второй вязкостью // Тр. ФИАН. 1992. Т. 222. С. 45–95.
4. Завершинский И.П., Коган Е.Я., Молевич Н.Е. О механизме усиления звука в слабоионизованном газе // ЖЭТФ. 1991. Т. 100. № 8. С. 422–427.
5. Осипов А.И., Уваров А.В. Кинетические и газодинамические процессы в неравновесной молекулярной физике // Успехи физ. наук. 1992. Т. 162. № 11. С. 1–42.
6. Завершинский И.П., Коган Е.Я., Молевич Н.Е. Акустические волны в частично ионизованном газе // Акуст. ж. 1992. Т. 38. № 4. С. 702–709.
7. Malnev V.N., Nedospasov A.V. About some peculiarities of streamline of bodies by flows of vibration nonequilibrium gases // Proc. 1st Intern. Workshop Perspectives of MHD and Plasma Technologies in Aerospace Application. Moscow, Russia: IVTAN, 1999. P. 128–130.
8. Молевич Н.Е. Асимптотический анализ устойчивости плоскопараллельного пограничного слоя сжимаемого релаксирующего газа // Изв. РАН. МЖГ. 1999. № 5. С. 82–88.
9. Молевич Н.Е., Ненашев В.Е. Влияние объемной вязкости на распространение звука в неравновесных взвесах микрочастиц в газе // Акуст. ж. 2000. Т. 46. № 4. С. 520–525.
10. Молевич Н.Е. Дисперсия скорости звука и вторая вязкость в средах с неравновесными химическими реакциями // Акуст. ж. 2003. Т. 49. № 2. С. 229–232.

11. Руденко О.В., Солуян С.И. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975. 287 с.
12. Пелиновский Е.Н., Фридман В.Е. Взрывная неустойчивость нелинейных волн в средах с отрицательной вязкостью // ПММ. 1974. Т. 38. № 6. С. 991–995.
13. Борисов А.А. Длинноволновые возмущения в реагирующих средах // Исследования по гидродинамике и теплообмену. Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1976. С. 94, 95.
14. Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. М.: Наука. Физматлит, 1997. 495 с.
15. Ott E., Manheimer W.M., Book D.L., Boris J.P. Model equation for mode coupling saturation in unstable plasmas // Phys. Fluids. 1973. V. 16. № 6. P. 855–862.
16. Рабинович М.И., Фабрикант А.Л. Нелинейные волны в неравновесных газах // Изв. вузов. Радиофизика. 1976. Т. 19. № 5, 6. С. 721–766.
17. Борисов А.А. Термодинамика волн конечной амплитуды в реальных средах. Автореф. дисс. на соиск. уч. ст. д-ра физ. – матем. наук. Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1985. 36 с.
18. Краснобаев К.В., Тарев В.Ю. Нелинейные волны малой амплитуды в диссипативном газе с избытком колебательной энергии // Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 2. С. 151–158.
19. Молевич Н.Е. К вопросу о длине образования разрыва в акустически активной среде // ЖТФ. 2001. Т. 71. № 12. С. 83.
20. Makarian V.G., Molevich N.E. Stationary high-frequency structures in vibrationally excited gas // Contrib. Papers. 5th Intern. School-Seminar Nonequilibrium Processes and their Applications: Minsk, Belarus, 2000. P. 20–22.
21. Молевич Н.Е. Нелинейные уравнения в теории сред с отрицательной второй вязкостью // Сиб. физ.-техн. ж. 1991. № 1. С. 133–136.
22. Коган Е.Я., Молевич Н.Е. Ударные волны разрежения в неравновесном колебательно-возбужденном газе // Акуст. ж. 1993. Т. 39. № 5. С. 951–954.
23. Молевич Н.Е. Усиление звука в неоднородных потоках неравновесного газа // Акуст. ж. 2001. Т. 47. № 1. С. 119–122.
24. Остроумов Г.А. Основы нелинейной акустики. Л.: Изд. ЛГУ, 1967. 132 с.
25. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.

Самара

Поступила в редакцию
29.VII. 2003