

УДК 533.6.011.55

© 2004 г. И. Г. БРЫКИНА

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ТОНКОГО ВЯЗКОГО УДАРНОГО СЛОЯ ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА ДЛЯ ХОЛОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Рассматривается гиперзвуковое пространственное обтекание затупленных тел в окрестности линии торможения потоком вязкого разреженного газа. Исследуется вопрос о применимости газодинамической модели тонкого вязкого ударного слоя [1] при переходном режиме течения от континуального к свободно-молекулярному. Показано, что при степенной зависимости коэффициента вязкости от температуры $\mu \sim T^\omega$ важным определяющим параметром гиперзвукового течения при малых числах Рейнольдса Re является $(Re\varepsilon)^{1/(1+\omega)}$, где $\varepsilon = (\gamma - 1)/2\gamma$, γ – отношение удельных теплоемкостей. Получены приближенные асимптотические решения уравнений тонкого вязкого ударного слоя, с условиями прилипания на поверхности и обобщенными условиями Ренкина–Гюгоню на ударной волне, при малых числах Рейнольдса в случае холодной поверхности. Эти решения дают простые аналитические выражения для коэффициентов теплопередачи и трения в зависимости от определяющих параметров течения. Значения коэффициентов теплопередачи и трения, определяемые этим решением, при стремлении числа Рейнольдса к нулю стремятся к своим значениям в свободно-молекулярном потоке при коэффициенте аккомодации равном 1. Такое стремление коэффициентов трения и теплопередачи к свободно-молекулярному пределу имеет место как для двумерных, так и для трехмерных течений. Проведено сопоставление асимптотических решений с численными расчетами и экспериментальными данными.

Ключевые слова: гиперзвуковое течение, малые числа Рейнольдса, коэффициенты трения и теплопередачи, тонкий вязкий ударный слой, асимптотическое решение.

При полете аппаратов с гиперзвуковыми скоростями в верхних слоях атмосферы Земли, на высотах порядка 100 км и выше, встает вопрос о применимости моделей механики сплошной среды для расчета аэродинамики и теплообмена. При малых числах Рейнольдса такие газодинамические модели, как уравнения Навье–Стокса и полученные из этих уравнений путем асимптотического анализа более простые модели – параболизированные уравнения Навье–Стокса, уравнения полного вязкого ударного слоя и т.д., начинают давать результаты, в которых коэффициенты трения и теплопередачи при уменьшении числа Рейнольдса при каких-то его значениях, зависящих довольно сильно от температуры поверхности, начинают резко возрастать, вместо того, чтобы стремиться к их значениям в свободно-молекулярном потоке. Область применимости моделей сплошной среды расширяют, применяя граничные условия, учитывающие скорость скольжения и скачок температуры на поверхности, это несколько уменьшает значения коэффициентов трения и теплообмена, однако проблему не решает. Поэтому расчет аэродинамики и теплообмена для переходных режимов течения от континуального к свободно-молекулярному при $Re \rightarrow 0$ проводится, в основном, на основе решения кинетических уравнений.

В данной работе показано, что для расчета коэффициентов трения и теплообмена в области торможения для таких режимов течения могут быть использованы континуальные модели, по крайней мере, для холодной поверхности $T_w \ll (Re\varepsilon)^{1/(1+\omega)}$. В этом случае, на основе модели тонкого вязкого ударного слоя, с условиями прилипания на поверхности и обобщенными условиями Ренкина–Гюгоню на ударной волне, при малых числах Рейнольдса получены приближенные асимптотические реше-

ния, в частности, для коэффициентов трения и теплопередачи, хорошо согласующиеся с экспериментальными и численными результатами. Значения коэффициентов трения и теплопередачи, определяемые этим решением, при стремлении числа Рейнольдса к нулю стремятся к их значениям в свободно-молекулярном потоке при коэффициенте аккомодации 1. Такой выход на свободно-молекулярный режим отмечался ранее в [1] для частного решения уравнений тонкого вязкого ударного слоя в окрестности точки торможения осесимметричного тела при линейной зависимости коэффициента вязкости от температуры, т.е. когда $\mu\rho = \text{const}$. Результаты данной работы получены вне зависимости от конкретных свойств газа, как для двумерных, так и для трехмерных течений. Вопрос о применимости континуальных моделей в задачах гиперзвукового обтекания затупленных тел разреженным газом рассматривался ранее в [2, 3], где было показано, что при малых параметрах ϵ и Re , в пренебрежении членами порядка $(\epsilon/Re)^{1/2}$, уравнения Навье-Стокса в ударном слое сводятся к упрощенным “локальным” уравнениям Стокса с исчезающими силами инерции и давления, решение которых дает для коэффициентов теплопередачи и трения свободно-молекулярный предел.

1. Постановка задачи и метод решения. Будем исследовать стационарное вязкое гиперзвуковое течение около гладкого затупленного тела в окрестности линии торможения при малых числах Рейнольдса. Сначала рассмотрим двумерные течения. Система уравнений тонкого вязкого ударного слоя в окрестности линии торможения в переменных Дородницына для плоских ($v = 0$) и осесимметричных ($v = 1$) течений имеет вид:

$$\begin{aligned} -(1+v)f \frac{du}{d\eta} + u^2 + \frac{2p'}{\rho} &= \frac{d}{d\eta} \left(\frac{\mu\rho}{Re\Delta^2} \frac{du}{d\eta} \right) \\ -(1+v)f \frac{dg}{d\eta} &= \frac{d}{d\eta} \left(\frac{\mu\rho}{\sigma Re\Delta^2} \frac{dg}{d\eta} \right) \\ \frac{df}{d\eta} = u, \quad \frac{dp'}{d\eta} = \Delta u^2, \quad \frac{1}{\rho} = \epsilon T, \quad \mu = T^\omega \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$g = \frac{H - H_w}{H_\infty - H_w}, \quad T = g(1 - T_w) + T_w, \quad \epsilon = \frac{\gamma - 1}{2\gamma}, \quad Re = \frac{\rho_\infty V_\infty R_0}{\mu_0}$$

$$\eta = \frac{1}{\Delta R_0} \int_0^y \rho dy, \quad \Delta = \frac{1}{R_0} \int_0^{y_s} \rho dy, \quad y_s = \Delta R_0 \int_0^1 \frac{1}{\rho} d\eta$$

Здесь ρ_∞ – плотность, T_0 – температура, H – полная энтальпия, μ_0 – коэффициент вязкости, μ_0 – коэффициент вязкости, определяемый по температуре торможения набегающего потока T_0 ; $V_\infty \cos \alpha$ – касательная составляющая скорости; V_∞ – скорость набегающего потока, α – угол между касательной к телу и скоростью набегающего потока; R_0 – радиус кривизны в критической точке, σ – число Прандтля, Re – число Рейнольдса, вычисленное по температуре торможения набегающего потока, $T_0 T_w$ – температура поверхности.

На поверхности тела используются условия прилипания, на ударной волне – обобщенные условия Ренкина – Гюгонио:

$$\begin{aligned} \eta = 0: u &= 0, \quad g = 0, \quad f = 0 \\ \eta = 1: u &= 1 - \frac{\mu\rho}{Re\Delta} \frac{du}{d\eta}, \quad g = 1 - \frac{\mu\rho}{\sigma Re\Delta} \frac{dg}{d\eta}, \quad p = 1, \quad p' = -1 \\ \Delta &= \frac{1}{(1+v)f} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Отход ударной волны y_s находится из уравнения:

$$y_s = \Delta R_0 \int_0^1 \frac{1}{\rho} d\eta \quad (1.3)$$

Коэффициенты теплопередачи и трения на поверхности определяются как

$$c_f = \frac{2\tau}{\cos\alpha \rho_\infty V_\infty^2} = \frac{\mu\rho}{\Delta \text{Re} d\eta} \Big|_w, \quad c_H = \frac{q}{\rho_\infty V_\infty (H_\infty - H_w)} = \frac{\mu\rho}{\sigma \Delta \text{Re} d\eta} \Big|_w$$

$$\tau = \left(\mu_0 \mu \frac{d(V_\infty \cos\alpha u)}{dy} \right)_w, \quad q = \left(\lambda \frac{d(T_0 T)}{dy} \right)_w$$

Получим асимптотическое решение задачи, в частности, для коэффициента теплопередачи c_H и коэффициента трения c_f в зависимости от определяющих параметров задачи при малых числах Re и ϵ .

Рассмотрим предварительно граничные условия на ударной волне (1.2). Производя оценку входящих в них членов, можно записать:

$$u_s = 1 - O\left(\frac{u_s^2}{\text{Re}\epsilon [g_s(1 - T_w) + T_w]^{1-\omega}} \right), \quad g_s = 1 - O\left(\frac{u_s g_s}{\sigma \text{Re}\epsilon [g_s(1 - T_w) + T_w]^{1-\omega}} \right) \quad (1.4)$$

Из анализа соотношений (1.4) следует, что при $\text{Re}\epsilon \rightarrow 0$: $u_s \rightarrow 0$, $g_s \rightarrow 0$. Выделим три режима обтекания: режим I – $g_s \gg T_w$, режим II – $g_s = O(T_w)$, режим III – $g_s \ll T_w$. Это делается для правильной оценки в уравнениях (1.1) и в граничных условиях на ударной волне членов, связанных с плотностью и вязкостью, т.е. членов, которые выражаются через температуру и в которые входит параметр T_w . На основании анализа (1.4) получаем, что эти три режима определяются значениями безразмерной температуры поверхности T_w :

$$\text{I. } T_w \ll (\text{Re}\epsilon)^{1/(1+\omega)}; \quad \text{II. } T_w = O((\text{Re}\epsilon)^{1/(1+\omega)}); \quad \text{III. } T_w \gg (\text{Re}\epsilon)^{1/(1+\omega)} \quad (1.5)$$

Таким образом, при гиперзвуковых течениях разреженного газа, когда $\text{Re}\epsilon = o(1)$, важным определяющим параметром является $(\text{Re}\epsilon)^{1/(1+\omega)}$, что подтверждается и дальнейшими исследованиями. В данной работе рассматривается режим обтекания холодной стенки: $T_w \ll (\text{Re}\epsilon)^{1/(1+\omega)}$. В этом режиме $u_s = O((\text{Re}\epsilon)^{1/(1+\omega)})$, $g_s = O((\text{Re}\epsilon)^{1/(1+\omega)})$.

Уравнения вязкого ударного слоя (1.1) решались интегральным методом последовательных приближений [4], для различных типов граничных условий на поверхности, как для условий прилипания, так и для условий скольжения, учитывающих скорость скольжения и скачок температуры на поверхности. Этот метод позволяет получать как численное решение задачи путем вычисления достаточно большого числа приближений, так и приближенное аналитическое решение в первом приближении. В [4] исследована сходимость метода и в первом приближении получено аналитическое решение двумерной задачи (для скорости, температуры, давления, трения и теплопередачи), обладающее достаточно хорошей точностью. Проведенное исследование показало, что сходимость метода и точность первого приближения улучшаются с уменьшением числа Рейнольдса, так что погрешность полученного аналитического решения для коэффициентов трения и теплопередачи в точке торможения при $\text{Re} \approx 1$ не превышает 1% и уменьшается при $\text{Re} \rightarrow 0$.

2. Решение двумерной задачи при $\omega = 1/2$. Воспользуемся аналитическим решением, полученным в [4] в случае $\omega = 1/2$. Рассматривая это решение в окрестности точ-

ки торможения и в отсутствии вдува, для холодной стенки, $T_w \ll (\text{Re}\varepsilon)^{1/(1+\omega)}$, получим следующие выражения для коэффициентов теплопередачи и трения:

$$c_H = \Delta_H(1+\nu)a\left(\frac{1}{2} - \frac{b}{3}\right) \quad (2.1)$$

$$c_f = 2\Delta_u\left[(1+\nu)a\left(\frac{1}{2} - \frac{a}{3}\right) - \frac{a^2}{3} + \varepsilon b\left(1 + \frac{2a}{5(1+\nu)}\right)\right]$$

$$\Delta_H = \frac{-b_4 + \sqrt{b_4^2 + 4b_3}}{2b_3}, \quad \Delta_u = \frac{-a_4 + \sqrt{a_4^2 + 4a_3}}{2a_3} \quad (2.2)$$

$$b_3 = \sigma \text{Re}\varepsilon b^{1/2}(1+\nu)a\left(\frac{1}{3} - \frac{7b}{27}\right), \quad b_4 = \frac{1+\nu}{2}a(1-b) \quad (2.3)$$

$$a_3 = \text{Re}\varepsilon b^{1/2}\left[(1+\nu)a\left(\frac{1}{3} - \frac{7a}{27}\right) - \frac{4}{27}a^2 + \frac{8}{21}\varepsilon b\right], \quad a_4 = \frac{1+\nu}{2}a(1-a)$$

Здесь a и b определяются из системы уравнений:

$$a = 1 - \frac{(1+\nu)a^2}{2\text{Re}\varepsilon b^{1/2}}, \quad b = 1 - \frac{(1+\nu)ab}{2\sigma \text{Re}\varepsilon b^{1/2}}$$

Решение этих уравнений при $\text{Re}\varepsilon = o(1)$ имеет вид:

$$a = \sigma^{1/3}\left(\frac{2}{1+\nu}\text{Re}\varepsilon\right)^{2/3}, \quad b = \sigma a \quad (2.4)$$

Подставляя значения a и b в (2.2), (2.3), получим

$$\Delta_i = \frac{3k_i(1-x_i)}{2(1+\nu)x_i^2(1-\alpha_i x_i + \alpha_i^*)}\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{8x_i(1-\alpha_i x_i + \alpha_i^*)}{3(1-x_i)^2}}\right), \quad i = g, u \quad (2.5)$$

$$x_g = b, \quad x_u = a, \quad k_g = \sigma, \quad k_u = 1$$

$$\alpha_g = \frac{7}{9}, \quad \alpha_u = \frac{7}{9} + \frac{4}{1+\nu}, \quad \alpha_g^* = 0, \quad \alpha_u^* = \frac{8\sigma\varepsilon}{7(1+\nu)}$$

Таким образом, соотношения (2.1), (2.4), (2.5) определяют полученное методом последовательных приближений решение для коэффициентов трения и теплообмена. Это решение зависит от числа Re через параметр $(\text{Re}\varepsilon)^{2/3}$ ($(\text{Re}\varepsilon)^{1/(1+\omega)}$). Считая этот параметр малым и производя разложение в ряды по этому параметру, получим

$$\Delta_i = \frac{2k_i}{(1+\nu)x_i}\left(1 + \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\alpha_i^*\right)x_i + O(x_i^2)\right), \quad i = g, u \quad (2.6)$$

Для коэффициентов трения и теплопередачи, используя (2.1), (2.4), (2.6), получим в случае $\omega = 1/2$ следующие выражения в зависимости от параметров Re , ε , σ :

$$c_H = 1 - \frac{1}{3}x_g + O(x_g^2)$$

$$c_f = 2 - \frac{2}{3}\left(1 + \frac{2}{(\nu+1)}\right)x_u + \frac{4\sigma\varepsilon}{\nu+1}\left(1 + \left(\frac{2}{5(\nu+1)} - \frac{1}{21} - \frac{16\sigma\varepsilon}{21(\nu+1)}\right)x_u\right) + O(x_u^2)$$

$$\lim_{\text{Re}\varepsilon \rightarrow 0} c_H = 1, \quad \lim_{\text{Re}\varepsilon \rightarrow 0} c_f = 2 + \frac{4\sigma\varepsilon}{\nu+1}; \quad \lim_{\substack{\text{Re}\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0}} c_f = 2$$

В случае осесимметричных течений:

$$c_H = 1 - \frac{\sigma^{4/3}}{3} (\text{Re}\epsilon)^{2/3} + O((\text{Re}\epsilon)^{4/3})$$

$$c_f = 2 - \frac{4}{3} \sigma^{1/3} (\text{Re}\epsilon)^{2/3} + 2\sigma\epsilon \left(1 + \frac{8}{21} \left(\frac{2}{5} - \sigma\epsilon \right) \sigma^{1/3} (\text{Re}\epsilon)^{2/3} \right) + O((\text{Re}\epsilon)^{4/3})$$

При стремлении числа Re к нулю, или при стремлении $\text{Re}\epsilon$ к нулю, значение коэффициента теплопередачи стремится к его значению в свободно-молекулярном потоке, равному 1 при коэффициенте аккомодации 1 [5]. Поскольку коэффициент трения зависит не только от параметра $\text{Re}\epsilon$, но также и от ϵ , такое стремление к своему свободно-молекулярному пределу, равному 2, для коэффициента трения имеет место при дополнительном условии $\epsilon \rightarrow 0$.

В выражениях для коэффициента трения член с параметром ϵ связан с влиянием продольного градиента давления. В выражениях для коэффициента теплопередачи отсутствуют члены с параметром ϵ . Это говорит о том, что при малых числах Re учет продольной составляющей градиента давления влияет на напряжение трения и не влияет на теплопередачу. Это подтверждается и численными расчетами [6].

Подобным образом, используя аналитическое решение [4], после ряда преобразований и асимптотических разложений, для значений скорости и энтальпии на ударной волне получим следующие выражения для осесимметричных и плоских течений соответственно:

$$u_s = \frac{2}{3} \sigma^{1/3} (\text{Re}\epsilon)^{2/3} \left(1 - \frac{1}{3} \sigma^{1/3} (\text{Re}\epsilon)^{2/3} + \frac{4\epsilon\sigma}{7} + O((\text{Re}\epsilon)^{4/3}, \epsilon(\text{Re}\epsilon)^{2/3}) \right)$$

$$g_s = \frac{2}{3} \sigma^{4/3} (\text{Re}\epsilon)^{2/3} \left(1 - \frac{1}{9} \sigma^{4/3} (\text{Re}\epsilon)^{2/3} + O((\text{Re}\epsilon)^{4/3}) \right)$$

$$u_s = \frac{2^{5/3}}{3} \sigma^{1/3} (\text{Re}\epsilon)^{2/3} \left(1 - \frac{5 \cdot 2^{2/3}}{9} \sigma^{1/3} (\text{Re}\epsilon)^{2/3} + \frac{8\epsilon\sigma}{7} + O((\text{Re}\epsilon)^{4/3}, \epsilon(\text{Re}\epsilon)^{2/3}) \right)$$

$$g_s = \frac{2^{5/3}}{3} \sigma^{4/3} (\text{Re}\epsilon)^{2/3} \left(1 - \frac{2^{2/3}}{9} \sigma^{4/3} (\text{Re}\epsilon)^{2/3} + O((\text{Re}\epsilon)^{4/3}) \right)$$

Для отхода ударной волны соответственно для осесимметричных и плоских течений получаются выражения:

$$y_s = \frac{R_0\epsilon\sigma}{2} \left(1 + \left(\frac{1}{3} - \frac{\sigma}{20} \right) \sigma^{1/3} (\text{Re}\epsilon)^{2/3} - \frac{16\epsilon\sigma}{21} + O((\text{Re}\epsilon)^{4/3}, \epsilon(\text{Re}\epsilon)^{2/3}) \right)$$

$$y_s = R_0\epsilon\sigma \left(1 + \left(\frac{3}{5} - \frac{\sigma}{20} \right) 2^{1/3} \sigma^{1/3} (\text{Re}\epsilon)^{2/3} - \frac{32\epsilon\sigma}{21} + O((\text{Re}\epsilon)^{4/3}, \epsilon(\text{Re}\epsilon)^{2/3}) \right)$$

3. Решение двумерной задачи при произвольном ω . Рассмотрим произвольные значения параметра ω . Ранее аналитическое решение уравнений тонкого вязкого ударного слоя (1.1) было получено только в случае $\omega = 1/2$. Для того чтобы найти решение при произвольном ω , применим интегральный метод последовательных приближений, алгоритм которого приведен в [4]. При задании нулевого приближения в виде линейных функций по поперечной координате η , по этому алгоритму было вычислено первое приближение. Получено, что выражения для коэффициентов трения и тепло-

передачи c_H, c_f можно записать в виде (2.1)–(2.2), но входящие в эти выражения функции имеют другой вид, зависящий от ω ; a_3 и b_3 имеют вид

$$b_3 = \frac{(\nu + 1)\sigma \text{Re} \epsilon ab^{1-\omega}}{2(2-\omega)} \left(1 - \frac{4-\omega}{5-\omega} b\right) \quad (3.1)$$

$$a_3 = \frac{\text{Re} \epsilon ab^{1-\omega}}{(2-\omega)} \left(\frac{(\nu + 1)}{2} \left(1 - \frac{4-\omega}{5-\omega} a\right) - \frac{a}{5-\omega} + \frac{2b\epsilon}{(4-\omega)a} \right)$$

a и b определяются из системы уравнений

$$a = 1 - \frac{(1+\nu)a^2}{2\text{Re} \epsilon b^{1-\omega}}, \quad b = 1 - \frac{(1+\nu)ab}{2\sigma \text{Re} \epsilon b^{1-\omega}}$$

Решение этих уравнений при $\text{Re} \epsilon = o(1)$ будет

$$a = \sigma^{(1-\omega)/(1+\omega)} \left(\frac{2}{1+\nu} \text{Re} \epsilon \right)^{1/(1+\omega)}, \quad b = \sigma a \quad (3.2)$$

Используя (2.2), (3.1), (3.2) (a_4 и b_4 определяются как в (2.4)), получим

$$\Delta_i = \frac{k_i(2-\omega)(1-x_i)}{(1+\nu)x_i^2(1-\alpha_i x_i + \alpha_i^*)} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{4x_i(1-\alpha_i x_i + \alpha_i^*)}{(2-\omega)(1-x_i)^2}} \right), \quad i = u, g \quad (3.3)$$

$$x_g = b, \quad x_u = a, \quad k_g = \sigma, \quad k_u = 1$$

$$\alpha_g = \frac{4-\omega}{5-\omega}, \quad \alpha_u = \frac{4-\omega}{5-\omega} + \frac{2}{(1+\nu)(5-\omega)}, \quad \alpha_g^* = 0, \quad \alpha_u^* = \frac{4\sigma\epsilon}{(1+\nu)(4-\omega)}$$

Решение (2.1), (3.2), (3.3) для коэффициентов трения и теплообмена зависит от малого параметра $(\text{Re} \epsilon)^{1/(1+\omega)}$. Раскладывая, как и ранее, все функции в ряды по этому параметру, получим

$$\Delta_i = \frac{2k_i}{(1+\nu)x_i} \left(1 + \left(\frac{1-\omega}{2-\omega} - \frac{\alpha_i^*}{2-\omega} \right) x_i + O((\text{Re} \epsilon)^{2/(1+\omega)}) \right), \quad i = u, g \quad (3.4)$$

Формулы (2.1), (3.2), (3.4) дают асимптотическое решение для коэффициентов трения и теплопередачи в случае двумерных течений в зависимости от определяющих параметров $\text{Re}, \epsilon, \sigma, \omega$.

Осесимметричные течения:

$$c_H = 1 - \frac{1+\omega}{3(2-\omega)} \sigma^{2/(1+\omega)} (\text{Re} \epsilon)^{1/(1+\omega)} + O((\text{Re} \epsilon)^{2/(1+\omega)})$$

$$c_f = 2 - \frac{2}{2-\omega} \sigma^{(1-\omega)/(1+\omega)} (\text{Re} \epsilon)^{1/(1+\omega)} +$$

$$+ 2\sigma\epsilon \left(1 + \left(\frac{(7-6\omega)(4-\omega) - 10 - 10\sigma\epsilon}{5(2-\omega)(4-\omega)} \right) \sigma^{(1-\omega)/(1+\omega)} (\text{Re} \epsilon)^{1/(1+\omega)} \right) + O((\text{Re} \epsilon)^{2/(1+\omega)})$$

Плоские течения:

$$c_H = 1 - 2^{1/(1+\omega)} \frac{1+\omega}{3(2-\omega)} \sigma^{2/(1+\omega)} (\text{Re} \epsilon)^{1/(1+\omega)} + O((\text{Re} \epsilon)^{2/(1+\omega)})$$

$$c_f = 2 - \frac{2(5 - \omega)}{3(2 - \omega)} 2^{1/(1+\omega)} \sigma^{(1-\omega)/(1+\omega)} (\text{Re}\epsilon)^{1/(1+\omega)} +$$

$$+ 4\sigma\epsilon \left(1 + \left(\frac{(9 - 7\omega)(4 - \omega) - 10 - 20\sigma\epsilon}{5(2 - \omega)(4 - \omega)} \right) 2^{1/(1+\omega)} \sigma^{(1-\omega)/(1+\omega)} (\text{Re}\epsilon)^{1/(1+\omega)} \right) +$$

$$+ O((\text{Re}\epsilon)^{2/(1+\omega)})$$

$$\lim_{\text{Re}\epsilon \rightarrow 0} c_H = 1, \quad \lim_{\text{Re}\epsilon \rightarrow 0} c_f = 2 + \frac{4\sigma\epsilon}{\nu + 1}; \quad \lim_{\substack{\text{Re}\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon \rightarrow 0}} c_f = 2$$

4. Решение трехмерной задачи. Рассмотрим пространственные течения. Для трехмерных течений возникает новый параметр κ – отношение радиусов главных кривизн в точке торможения, $0 \leq \kappa \leq 1$. Выберем систему координат таким образом, чтобы оси x_1 и x_2 лежали в плоскостях главных кривизн, ось y – по нормали к поверхности. В такой системе координат уравнения пространственного тонкого вязкого ударного слоя в окрестности линии торможения в преобразованных переменных имеют вид [6]:

$$-(f_1 + \kappa f_2) \frac{du_i}{d\eta} + d_i u_i^2 + \frac{2d_i p'_i}{\rho} = \frac{d}{d\eta} \left(\frac{\mu \rho}{\text{Re} \Delta^2} \frac{du_i}{d\eta} \right), \quad i = 1, 2$$

$$-(f_1 + \kappa f) \frac{dg}{d\eta} = \frac{d}{d\eta} \left(\frac{\mu \rho}{\sigma \text{Re} \Delta^2} \frac{dg}{d\eta} \right)$$

$$\frac{df_i}{d\eta} = u_i, \quad \frac{dp'_i}{d\eta} = \Delta u_i^2, \quad p'_i = \frac{1}{2d_i} \frac{\partial^2 p}{\partial (x_i)^2} \Big|_{x_1=0, x_2=0} \tag{4.1}$$

$$\mu = T^\omega, \quad \eta = \frac{1}{\Delta R_0} \int_0^y \rho dy, \quad \Delta = \frac{1}{R_0} \int_0^{y_s} \rho dy, \quad d_1 = 1, \quad d_2 = \kappa$$

Здесь R_0 – наименьший из радиусов главных кривизн. Граничные условия – прилипания на поверхности и обобщенные условия Ренкина–Гюгонно на ударной волне, аналогичны (1.2), с учетом того, что они ставятся для u_i, f_i, p'_i ($i = 1, 2$), за исключением последнего соотношения, которое имеет вид:

$$\Delta = \frac{1}{f_1 + \kappa f_2} \tag{4.2}$$

Система уравнений (4.1) решалась интегральным методом последовательных приближений по алгоритму, изложенному в [6]. В первом приближении этого метода получены выражения для коэффициентов теплопередачи и трения c_H, c_{f1}, c_{f2} :

$$c_H = \Delta_H (1 + \kappa) a (1/2 - b/3)$$

$$c_{fi} = 2\Delta_{ui} \left[(1 + \kappa) a \left(\frac{1}{2} - \frac{a}{3} \right) - \frac{d_i a^2}{3} + \epsilon b d_i \left(1 + \frac{2d_i a}{5(1 + \kappa)} \right) \right] \tag{4.3}$$

$$\Delta_H = \frac{-b_4 + \sqrt{b_4^2 + 4b_3}}{2b_3}, \quad \Delta_{ui} = \frac{-a_{4i} + \sqrt{a_{4i}^2 + 4a_{3i}}}{2a_{3i}}, \quad i = 1, 2$$

$$b_3 = \frac{(\kappa + 1)\sigma \operatorname{Re} \varepsilon a b^{1-\omega}}{2(2-\omega)} \left(1 - \frac{4-\omega}{5-\omega} b\right), \quad b_4 = \frac{1+\kappa}{2} a(1-b) \quad (4.4)$$

$$a_{3i} = \frac{\operatorname{Re} \varepsilon a b^{1-\omega}}{(2-\omega)} \left(\frac{(\kappa + 1)}{2} \left(1 - \frac{4-\omega}{5-\omega} a\right) - \frac{d_i a}{5-\omega} + \frac{2d_i \varepsilon b}{(4-\omega)a} \right), \quad a_{4i} = \frac{1+\kappa}{2} a(1-a)$$

Для a и b при $\operatorname{Re} \varepsilon = o(1)$ имеем выражения:

$$a = \sigma^{(1-\omega)/(1+\omega)} \left(\frac{2}{1+\kappa} \operatorname{Re} \varepsilon \right)^{1/(1+\omega)}, \quad b = \sigma a \quad (4.5)$$

Из (4.4), (4.5) можно получить

$$\Delta_i = \frac{k_i(2-\omega)(1-x_i)}{(1+\kappa)x_i^2(1-\alpha_i x_i + \alpha_i^*)} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{4x_i(1-\alpha_i x_i + \alpha_i^*)}{(2-\omega)(1-x_i)^2}} \right), \quad i = g, u1, u2$$

$$x_g = b, \quad k_g = \sigma, \quad \alpha_g = \frac{4-\omega}{5-\omega}, \quad \alpha_g^* = 0$$

$$x_{uj} = a, \quad k_{uj} = 1, \quad \alpha_{uj} = \frac{4-\omega}{5-\omega} + \frac{2d_j}{(1+\kappa)(5-\omega)}, \quad \alpha_{uj}^* = \frac{4\sigma d_j \varepsilon}{(1+\kappa)(4-\omega)}, \quad j = 1, 2$$

Производя, как и ранее, разложение в ряды по малому параметру $(\operatorname{Re} \varepsilon)^{1/(1+\omega)}$, получим

$$\Delta_i = \frac{2k_i}{(1+\kappa)x_i} \left(1 + \left(\frac{1-\omega}{2-\omega} - \frac{\alpha_i^*}{2-\omega} \right) x_i + O\left((\operatorname{Re} \varepsilon)^{\frac{2}{1+\omega}} \right) \right), \quad i = g, u1, u2 \quad (4.6)$$

Таким образом, выражения (4.3), (4.5), (4.6) определяют асимптотическое решение для коэффициентов трения и теплопередачи в случае пространственных течений для охлажденной поверхности в зависимости от определяющих параметров Re , ε , σ , ω , κ :

$$c_H = 1 - \frac{1+\omega}{3(2-\omega)} \sigma^{2/(1+\omega)} \left(\frac{2}{1+\kappa} \operatorname{Re} \varepsilon \right)^{1/(1+\omega)} + O((\operatorname{Re} \varepsilon)^{2/(1+\omega)})$$

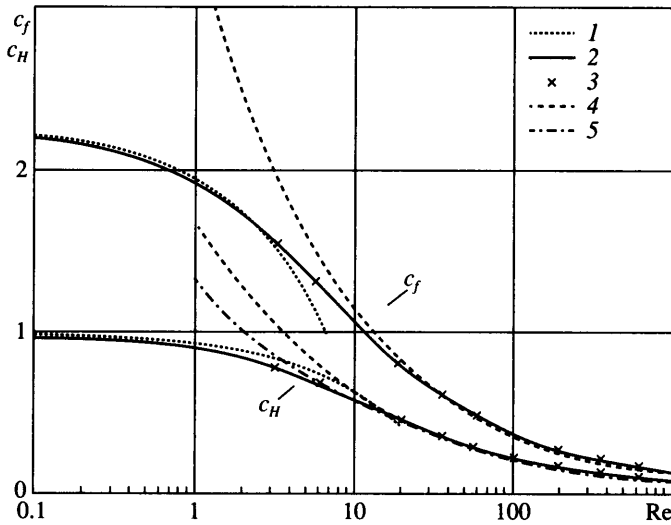
$$c_{fi} = 2 - \frac{2}{3} \left(\frac{1+\omega}{2-\omega} + \frac{2d_i}{1+\kappa} \right) \sigma^{(1-\omega)/(1+\omega)} \left(\frac{2}{1+\kappa} \operatorname{Re} \varepsilon \right)^{1/(1+\omega)} +$$

$$+ \frac{4d_i \sigma \varepsilon}{1+\kappa} \left(1 + \left(\frac{2d_i}{5(1+\kappa)} + \frac{(1-\omega)(4-\omega)-2}{(2-\omega)(4-\omega)} - \frac{4d_i \sigma \varepsilon}{(1+\kappa)(2-\omega)(4-\omega)} \right) \times \right.$$

$$\left. \times \sigma^{(1-\omega)/(1+\omega)} \left(\frac{2}{1+\kappa} \operatorname{Re} \varepsilon \right)^{1/(1+\omega)} \right) + O((\operatorname{Re} \varepsilon)^{2/(1+\omega)})$$

$$\lim_{\operatorname{Re} \varepsilon \rightarrow 0} c_H = 1, \quad \lim_{\operatorname{Re} \varepsilon \rightarrow 0} c_{fi} = 2 + \frac{4d_i \sigma \varepsilon}{1+\kappa}; \quad \lim_{\substack{\operatorname{Re} \varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0}} c_{fi} = 2, \quad i = 1, 2, \quad d_1 = 1, \quad d_2 = \kappa$$

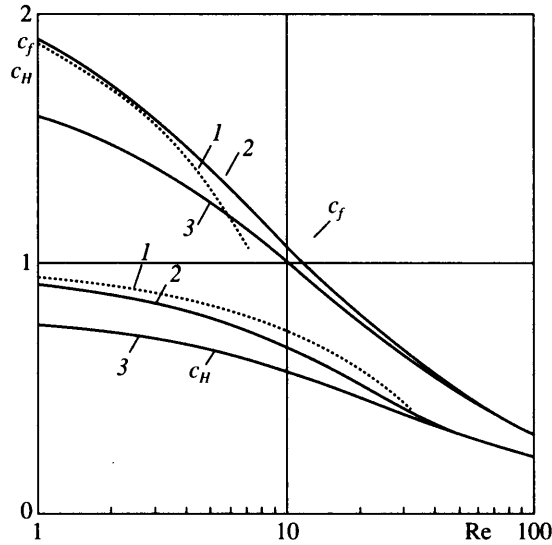
5. Обсуждение результатов. Полученные асимптотические решения уравнений тонкого вязкого ударного слоя сравнивались с численными решениями и экспериментальными результатами.



Фиг. 1. Коэффициенты трения и теплопередачи в точке торможения осесимметричного тела в зависимости от числа Re : Кривые 1 – асимптотическое решение; 2 и 3 – численные решения уравнений тонкого вязкого ударного слоя данной работы и [7]; 4 и 5 – численные решения уравнений Навье-Стокса с условиями прилипания [8] и со скольжением [9]. Кривые 1–4: $\gamma = 5/3$; $\sigma = 0.75$; $\omega = 0.5$; $T_w = 0.03$; 5: $\gamma = 1.4$; $T_w = 0.18$

На фиг. 1 приведены зависимости от числа Re коэффициентов трения и теплопередачи в точке торможения осесимметричного тела. Проведено сопоставление асимптотического решения с численными решениями уравнений тонкого вязкого ударного слоя, полученными в данной работе и в [7], показавшее хорошую точность асимптотического решения при малых числах Re . Превышение для коэффициента трения свободно-молекулярного предела связано с влиянием продольного градиента давления: из аналитического решения следует, что при $Re \rightarrow 0$ $c_f \rightarrow 2 + 2\sigma$. Здесь же приведены численные решения уравнений Навье-Стокса, полученные как для условий прилипания [8], так и для условий с учетом скольжения и скачка температуры на поверхности [9]. В этих решениях значения коэффициентов трения и теплопередачи с уменьшением числа Рейнольдса начинают резко возрастать, все более отклоняясь от значений в свободно-молекулярном потоке. Видно, что учет условий со скольжением на поверхности приводит к снижению теплового потока, но не устраняет его тенденции к возрастанию с уменьшением числа Рейнольдса. Это связано, возможно, с влиянием температуры поверхности T_w .

На фиг. 2 приведены асимптотические и численные решения для коэффициента трения c_{f2} и коэффициента теплопередачи c_H в зависимости от числа Re в случае точки торможения с соотношением радиусов главных кривизн $\kappa = 0.8$. Результаты для коэффициента c_{f1} аналогичны результатам для c_{f2} , поэтому здесь не приводятся. Численные решения выполнены для двух видов граничных условий на поверхности тела: условий прилипания и условий с учетом скорости скольжения и скачка температуры. Представленные данные показывают, что использование условий со скольжением ведет к существенному снижению результатов. Именно условия прилипания на поверхности в случае тонкого вязкого ударного слоя приводят к тем значениям для коэффициентов трения и теплопередачи, которые выходят на свободно-молекулярный предел, равный 1 для коэффициента теплопередачи и 2 для коэффициента трения (при $\epsilon \rightarrow 0$).

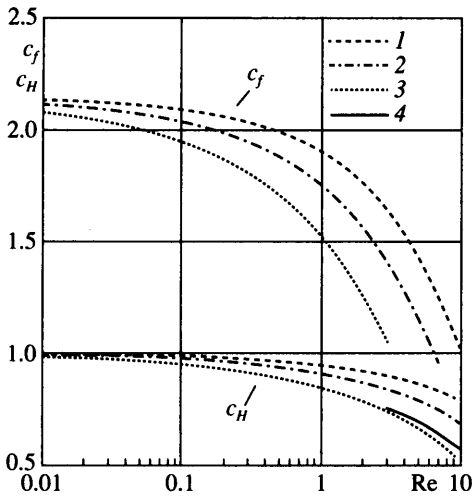


Фиг. 2. Коэффициенты трения и теплопередачи в точке торможения пространственного тела с $\kappa = 0.8$ в зависимости от числа Re : кривые 1 – асимптотическое решение; 2 и 3 – численные решения уравнений тонкого вязкого ударного слоя [6] с условиями прилипания и со скольжением. $\gamma = 1.4$; $\sigma = 0.71$; $\omega = 0.5$; $T_w = 0.05$

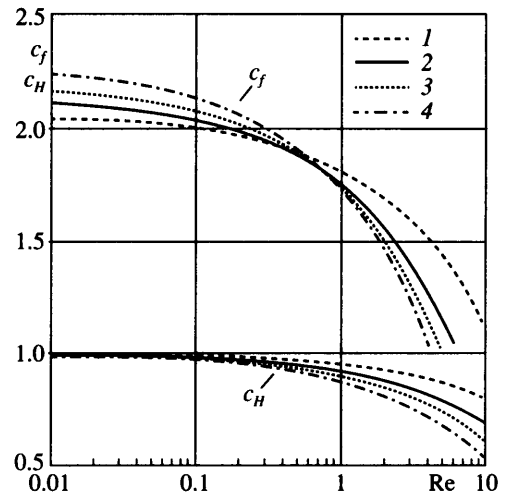
Это связано с тем, что при $Re \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$ толщина тонкого вязкого ударного слоя тоже стремится к нулю: $y_s \rightarrow 0$, что подтверждается также полученным в данной работе выражением для y_s . В пределе, когда ударный слой утоньшается до нулевой толщины, граничные условия на ударной волне как бы перемещаются на тело, и они как раз в пределе при $u_s \rightarrow 0$, $g_s \rightarrow 0$ превращаются в выражения, дающие для коэффициентов трения и теплопередачи значения, равные их значениям в свободно-молекулярном потоке. Все это относится к охлажденной стенке, к режиму I. В случае конечных значений T_w граничные условия со скольжением могут быть полезны, поскольку снижают возрастающие с уменьшением числа Re тепловой поток и напряжение трения и тем самым продлевают область применимости модели сплошной среды до меньших чисел Re .

Фиг. 3 и 4 демонстрируют влияние на коэффициенты теплопередачи и трения параметров ω и ε в зависимости от числа Рейнольдса. На фиг. 3 приведено также численное решение уравнений тонкого вязкого ударного слоя [1], хорошо согласующееся с асимптотическим решением при $\omega = 1$. Фиг. 4 показывает, что с уменьшением ε коэффициент трения при $Re \rightarrow 0$ приближается к своему свободно-молекулярному пределу, равному 2.

На фиг. 5 проводится сравнение асимптотических решений для c_H при разных значениях параметров ω и ε с различными экспериментальными данными [10–12], показывающее хорошее согласование полученных решений с результатами экспериментов. Здесь же приведены результаты расчетов, выполненных в рамках теории первых межмолекулярных столкновений [13], хорошо согласующееся с асимптотическими решениями при $Re < 1$. Проводится также сравнение с численным решением уравнений Навье-Стокса [14]. На основании проведенных сравнений можно сказать, что полученные асимптотические решения дают хорошую точность для c_f – при $Re \leq 7-8$, а для c_H – при $Re \leq 10-20$.



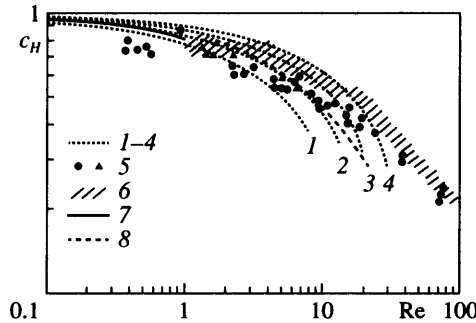
Фиг. 3



Фиг. 4

Фиг. 3. Влияние на коэффициенты трения и теплопередачи параметра ω . Асимптотическое решение: $\omega = 0.5; 0.75$; 1 – кривые 1–3. Кривая 4 – численное решение [1] при $\omega = 1$. $\gamma = 1.25$; $\sigma = 0.71$; $\kappa = 1$

Фиг. 4. Влияние на коэффициенты трения и теплопередачи параметра ϵ . Асимптотическое решение: $\epsilon = 0.05$ ($\gamma = 1.1$); 0.1 ($\gamma = 1.25$); 0.14 ($\gamma = 1.4$); 0.2 ($\gamma = 5/3$) – кривые 1–4; $\omega = 0.75$; $\sigma = 0.71$; $\kappa = 1$



Фиг. 5. Сравнения для коэффициента теплопередачи в точке торможения осесимметричного тела. Асимптотические решения: $(\omega, \gamma) = (1, 5/3)$; $(1, 1.4)$; $(0.75, 5/3)$; $(0.75, 1.4)$ – кривые 1–4 ($\sigma = 0.71$); 5 и 6 – экспериментальные данные [10] ($M \gg 1$, $T_w = 0.18$) и [11–12] ($M \gg 1$, $T_w = 0.1–0.175$); 7 – численное решение, полученное по теории первых межмолекулярных столкновений [13]; 8 – численное решение уравнений Навье-Стокса [14] ($\gamma = 1.4$, $\omega = 0.5$, $T_w = 0.025$)

Заключение. Важным параметром, определяющим гиперзвуковое течение разреженного газа, при степенной зависимости коэффициента вязкости от температуры, является $(Re\epsilon)^{1/(1+\omega)}$. Получены приближенные асимптотические решения уравнений тонкого вязкого ударного слоя в окрестности линии торможения при малых числах Re в случае холодной поверхности в виде простых аналитических выражений для тепло-

вого потока, напряжения трения и отхода ударной волны в зависимости от определяющих параметров течения: Re , ϵ , σ , ω , κ . При стремлении числа Re к нулю значения коэффициентов теплопередачи и трения (при $\epsilon \rightarrow 0$), определяемые этим решением, стремятся к своим значениям в свободно-молекулярном потоке. Эти результаты получены вне зависимости от конкретных свойств газа как для двумерных, так и для трехмерных течений. Показано, что в разреженном газе учет продольных составляющих градиента давления влияет на напряжение трения и не влияет на теплопередачу. Асимптотические решения хорошо согласуются с численными решениями и экспериментальными данными при малых числах Рейнольдса.

Автор выражает благодарность Г.А. Тирскому за внимание к работе и полезные обсуждения.

Работа выполнена при поддержке грантов: “Научные Школы” – НШ-1899.2003.1, “Университеты России” – УР.04.01.020 и РФФИ (№ 03-01-00542).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Cheng H.K.* Hypersonic shock-layer theory of the stagnation region at low Reynolds Number // Proc. 1961 Heat Transfer and Fluid Mech. Inst. Stanford, Calif.: Stanford Univ. Press, 1961. P. 161–175.
2. *Тирский Г.А.* Континуальные модели в задачах гиперзвукового обтекания затупленных тел разреженным газом // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 6. С. 903–930.
3. *Tirskiy G.A.* Continuum models for the problem of hypersonic flow of rarefied gas over blunt body // Systems Analysis Modelling Simulation. 1999. V. 34. № 2. P. 205–240.
4. *Брыкина И.Г.* Интегрирование уравнений гиперзвукового вязкого ударного слоя методом последовательных приближений // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1978. Т. 18. № 1. С. 154–166.
5. *Хейз У.Д., Пробстин Р.Ф.* Теория гиперзвуковых течений. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 407 с.
6. *Брыкина И.Г., Русаков В.В.* Аналитическое исследование трения и теплообмена в окрестности трехмерной критической точки при малых и умеренных числах Рейнольдса // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 2. С. 143–150.
7. *Анкудинов А.Л.* Вязкий ударный слой в окрестности затупления // Учен. зап. ЦАГИ. 1975. Т. 6. № 3. С. 35–41.
8. *Гершбейн Э.А., Колесников А.Ф.* Численное решение уравнений Навье-Стокса в окрестности притупления тел с проницаемой поверхностью, обтекаемых гиперзвуковым потоком разреженного газа // Отчет Ин-та механики МГУ. 1977. № 1908. 47 с.
9. *Власов В.И., Горшков А.Б.* Сравнение результатов расчетов гиперзвукового обтекания затупленных тел с летным экспериментом OREX // Изв. АН. МЖГ. 2001. № 5. С. 160–168.
10. *Гусев В.Н., Никольский Ю.В.* Экспериментальное исследование теплопередачи в критической точке сферы в гиперзвуковом потоке разреженного газа // Учен. зап. ЦАГИ. 1971. Т. 2. № 1. С. 122–125.
11. *Wilson M.R., Wittliff C.E.* Low density stagnation point heat transfer measurements in the hypersonic shock tunnel // ARS Journal. 1962. V. 32. № 2. P. 275–276.
12. *Vidal R.J., Wittliff C.E.* Hypersonic low density studies of blunt and slender bodies // Rarefied Gas Dynamics. N. Y.: Acad. Press, 1963. V. 2. P. 343–378.
13. *Переухов В.А.* Аэродинамические характеристики сферы и затупленного конуса в потоке сильно разреженного газа // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1967. Т. 7. № 2. С. 444–452.
14. *Толстых А.И.* Аэродинамические характеристики охлажденного сферического затупления в гиперзвуковом потоке слаборазреженного газа // Изв. АН СССР. МЖГ. 1969. № 6. С. 163–166.