

УДК 532.59

© 2004 г. М. В. КАЛАШНИК, В. О. КАХИАНИ, Д. Г. ЛОМИНАДЗЕ, К. И. ПАТАРАШВИЛИ,  
П. Н. СВИРКУНОВ, С. Д. ЦАКАДЗЕ

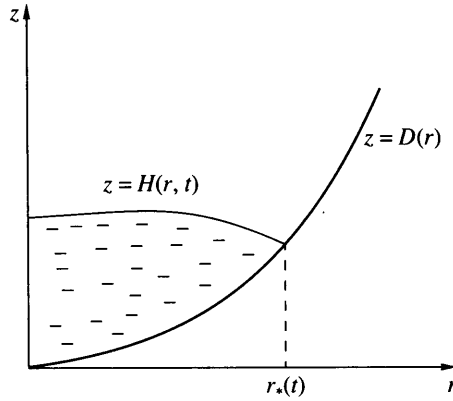
## НЕЛИНЕЙНЫЕ ИЗОХРОННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЖИДКОСТИ В ПАРАБОЛОИДЕ: ТЕОРИЯ И ЭКСПЕРИМЕНТ

В рамках модели мелкой воды исследованы нелинейные осесимметричные колебания жидкости в параболоиде вращения и неограниченном параболическом канале. Установлено, что в параболоиде вращения период колебаний не зависит от амплитуды, т.е. колебания имеют изохронный характер. Экспериментальные исследования свободных колебаний жидкости в параболоиде подтверждают этот теоретический результат.

*Ключевые слова:* теория мелкой воды, нелинейные колебания, точные решения, сосуд параболической формы, сейши, эксперимент.

Исследования свободных колебаний жидкости в сосудах (бассейнах) различной формы имеют разнообразие технические и геофизические приложения. Важный пример геофизического приложения – проблема описания сейшевых колебаний в озерах, бухтах и окраинных морях. Значительная часть исследований на эту тему выполнена в рамках теории длинных волн (теории мелкой воды), достаточно простой в математическом плане (двумерной) и позволяющей корректно учесть изменения глубины бассейна. Линейная теория свободных колебаний жидкости в параболоиде вращения и неограниченном параболическом канале изложена в классических монографиях [1, 2]. Здесь детально изучена структура различных мод свободных колебаний и получены явные формулы для их периодов. Нелинейные колебания жидкости в параболоиде вращения изучались в [3–6]. В этих работах, частично дублирующих друг друга, построены примеры точных решений осесимметричных уравнений мелкой воды, описывающие нелинейный аналог первой, самой низкочастотной, моды колебаний. Особенностью построенных решений является линейная зависимость от радиуса для радиальной компоненты скорости полиномиальная – для азимутальной компоненты и уровня. Более широкий класс решений построен в [7] на основе рассмотрения уравнений динамики в лагранжевых переменных. Этот класс характеризуется функциональным произволом в распределении уровня и включает в себя решения [3–6] как частные случаи.

В первом разделе настоящей работы предложен простой способ построения класса точных решений [7], использующий традиционные переменные Эйлера и основанный на записи уравнений динамики в форме лагранжевых законов сохранения. Установлено, что нелинейные колебания жидкости описываемые данным классом решений, обладают замечательным свойством изохронности, т.е. их период определяется только параметрами параболоида и не зависит от амплитуды колебаний. Другими словами, нелинейные колебания жидкости в параболоиде являются моделью точных водяных часов, подобных изохронным циклоидальным часам Гюйгенса [8, 9]. Напомним, что в этих часах изохронность колебаний обеспечивается движением материальной точки в поле силы тяжести по дну желоба в форме перевернутой циклоиды. В случае водяных часов выполнение свойства изохронности обеспечивает геометрия параболоида.



Фиг. 1. Геометрия задачи

Во втором разделе исследованы свободные колебания жидкости в бассейне, имеющем форму неограниченного параболического канала. Для этого бассейна также построен класс точных решений с линейной зависимостью скорости от горизонтальной координаты. В третьем разделе описаны результаты экспериментов по изучению свободных колебаний жидкости в параболоиде, проведенных на экспериментальной установке Абастуманской астрофизической обсерватории. Свободные колебания в этих экспериментах возбуждались импульсным погружением в жидкость тел вращения (цилиндр, конус, полусфера). Данные измерений, проведенных в различных условиях, подтверждают независимость периода колебаний от амплитуды.

**1. Колебания в параболоиде.** Рассмотрим в рамках теории мелкой воды движение жидкости в параболоиде вращения с формой дна

$$z = D(r) = \frac{\kappa r^2}{2} \quad (1.1)$$

где  $\kappa$  – кривизна параболоида в полюсе. С учетом (1.1) в цилиндрической системе координат  $z, r, \varphi$ , с вертикальной осью  $z$ , совпадающей с осью симметрии параболоида (фиг. 1), осесимметричные движения описываются системой уравнений [2]

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} - \frac{v^2}{r} &= -g \frac{\partial H}{\partial r}, & \frac{dv}{dt} + \frac{uv}{r} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(H - D) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(ru(H - D)) &= 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь  $u(r, t)$ ,  $v(r, t)$  – радиальная и азимутальная компоненты скорости,  $H(r, t)$  – высота уровня жидкости, отсчитываемая от уровня  $z = 0$ ,  $g$  – ускорение свободного падения,  $d/dt = \partial/\partial t + u\partial/\partial r$ . Решения (1.2) ищем в интервале  $r \in (0, r_*(t))$ , для которого  $H \geq D$ . Здесь граница  $r_*(t)$  определена равенством  $H - D = 0$  при  $r = r_*(t)$ . Начальное условие, задаваемое при  $t = 0$ , будет конкретизировано ниже.

Вводя полную глубину  $h = H - D$  и угловой момент жидкой частицы  $M = rv$ , системе (1.2) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} - \frac{M^2}{r^3} &= -g \frac{\partial h}{\partial r} - g\kappa r, & \frac{dM}{dt} &= 0 \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(ruh) &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Система (1.3) имеет класс стационарных решений:  $u = 0$

$$\frac{M^2}{r^3} = g \frac{\partial h}{\partial r} + gkr \quad (1.4)$$

описывающих состояния циклострофического баланса, т.е. баланса между градиентом давления и центробежной силой. Поскольку одну из функций  $M(r)$ ,  $h(r)$ , входящих в (1.4), можно выбрать произвольно, этот класс характеризуется функциональным произволом. Состояние механического равновесия описывается частным решением (1.4), для которого  $M = 0$  и  $h = h_* - kr^2/2$ . Здесь  $h_*$  – полная глубина жидкости при  $r = 0$ . Ниже построен класс нестационарных решений, описывающих колебания около стационарных состояний баланса (1.4).

Для построения нестационарных решений удобно преобразовать систему (1.3). Введем в рассмотрение функцию

$$I = g \int_0^r h r dr$$

пропорциональную массе жидкости в цилиндрической области радиуса  $r$ . Умножая третье уравнение системы (1.3) на  $r$  и интегрируя от 0 до  $r$ , получим, что функция  $I(r, t)$  удовлетворяет тому же уравнению, что и  $M$ :  $dI/dt = 0$ , т.е. является лагранжевым инвариантом. Учитывая, что  $grh = \partial I/\partial r$ , запишем систему (1.3) в терминах  $M, I$

$$\frac{du}{dt} - \frac{M^2}{r^3} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial I}{\partial r} \right) - gkr \quad (1.5)$$

$$\frac{dM}{dt} = 0, \quad \frac{dI}{dt} = 0 \quad (1.6)$$

Будем искать нестационарные решения для переменных  $M, I$  в виде

$$M = M_0(s), \quad I = I_0(s), \quad s = r/c(t) \quad (1.7)$$

где  $c(t)$  – некоторая функция времени, функции  $M_0(s), I_0(s)$  определены ниже. Из уравнений (1.6) при этом следует

$$u = \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} r, \quad \dot{c} \equiv \frac{dc}{dt} \quad (1.8)$$

Подстановка (1.7), (1.8) в (1.5) дает уравнение с разделяющимися переменными

$$s[\ddot{c} + gkc] - \frac{1}{c^3} \left[ \frac{M_0^2}{s^3} - \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{1}{s} \frac{\partial I_0}{\partial s} \right) \right] = 0$$

которое удовлетворяется, если функции  $M_0(s), I_0(s)$  связаны соотношением

$$\frac{M_0^2}{s^3} = \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{1}{s} \frac{\partial I_0}{\partial s} \right) + As \quad (1.9)$$

Здесь  $A$  – константа разделения, а функция  $c(t)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\ddot{c} + gkc - \frac{A}{c^3} = 0 \quad (1.10)$$

решение которого выписывается в элементарных функциях (см. ниже).

Таким образом, построен класс точных нестационарных решений уравнения мелкой воды, характеризуемый линейной зависимостью (1.8) радиальной компоненты

скорости от радиуса и функциональным произволом в выборе одной из функций  $M_0(s)$ ,  $I_0(s)$ , удовлетворяющих соотношению (1.9). Нетрудно показать, что аналитические решения [3–6] отвечают конкретному выбору этих функций в виде полиномов по степеням  $s$ .

Обозначая  $h_0(s) = (gs)^{-1}dI_0/ds$ ,  $v_0(s) = M_0(s)/s$ , соотношение (1.9) можно записать в виде  $v_0^2/s = gh_0/ds + As$ , а решение для переменных  $h$ ,  $v$  как

$$v = \frac{1}{c(t)} v_0\left(\frac{r}{c(t)}\right), \quad h = \frac{1}{c^2(t)} h_0\left(\frac{r}{c(t)}\right) \quad (1.11)$$

Без ограничения общности далее будем рассматривать уравнение (1.10) с условиями:  $c(0) = 1$ ,  $\dot{c}(0) = \varepsilon$ . Решение (1.8), (1.11) при этом удовлетворяет начальным условиям

$$t = 0: u = \varepsilon r, \quad v = v_0(r), \quad h = h_0(r) \quad (1.12)$$

$$\frac{v_0^2}{r} = g \frac{\partial h_0}{\partial r} + Ar$$

Выбор константы  $A$  в (1.12) определяется физическими соображениями. Случай  $A = g\kappa$  отвечает ситуации, когда в начальный момент имеется состояние циклострофического баланса (частный случай – состояние механического равновесия), на которое наложен радиальный поток  $u = \varepsilon r$ . Другая интересная задача связана с ситуацией, когда в начальный момент жидкость вращается как твердое тело, а глубина совпадает с равновесной:  $v_0(r) = \Omega r$ ,  $h_0(r) = h_* - \kappa r^2/2$  (такое состояние можно создать, накрыв поверхность вращающейся жидкости твердой крышкой). Для этого начального состояния  $A = \Omega^2 + g\kappa$ .

Обратимся к исследованию уравнения (1.10). Это уравнение описывает движение материальной частицы в поле силы с потенциалом  $U(c) = g\kappa c^2/2 + A/2c^2$  и имеет первый интеграл

$$\frac{1}{2}\dot{c}^2 + U(c) = E, \quad E = \frac{1}{2}(\varepsilon^2 + g\kappa + A)$$

из которого следует неявная формула для решения

$$t = \pm \int_1^c \frac{dx}{\sqrt{2(E - U(x))}}$$

Легко видеть, что в случае  $A > 0$  уравнение имеет положение равновесия  $c_* = \sqrt[4]{A/g\kappa}$ , являющееся точкой минимума для потенциала  $U(c)$ . Отсюда следует, что в окрестности положения равновесия решения (1.10) являются периодическими функциями с периодом

$$T = 2 \int_{c_1(E)}^{c_2(E)} \frac{dx}{\sqrt{2(E - U(x))}} \quad (1.13)$$

где  $c_1(E)$ ,  $c_2(E)$  – корни уравнения  $U(c) = E$ . Для потенциала  $U(c)$  приведенные интегралы, а следовательно, и решение, выражаются в элементарных функциях. Для начальных условий  $c(0) = 1$ ,  $\dot{c}(0) = \varepsilon$  решение имеет вид

$$c(t) = \frac{1}{\sqrt{g\kappa}} \sqrt{E + B \sin(\pm 2\sqrt{g\kappa}t + \psi)} \quad (1.14)$$

$$\psi = \arcsin((g\kappa - E)/B), \quad B = \sqrt{E^2 - g\kappa A}$$

где знак плюс берется для  $\epsilon > 0$ , знак минус – для  $\epsilon < 0$ . Замечательная особенность решения (1.14) состоит в том, что период колебаний совершенно не зависит от начальной энергии (амплитуды)  $E$  и определяется только кривизной параболоида

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{g\kappa}} \quad (1.15)$$

Осесимметричные колебания мелкой воды в параболоиде вращения, таким образом, обладают свойством изохронности и являются простейшей моделью точных водяных часов. Подчеркнем, что для нелинейных колебаний свойство изохронности является исключением, а не правилом; в данной задаче его выполнение связано со специальной структурой потенциала  $U(c)$ . Отметим также, что период колебаний (1.15) совпадает с периодом колебаний первой, самой низкочастотной моды в линейном приближении [1].

В случае  $A < 0$  решение (1.10) по-прежнему дается формулой (1.14), однако при этом  $c(t)$  за конечное время обращается в нуль, и решение теряет смысл. Этот случай отвечает физически нереализуемым начальным ситуациям.

С методической точки зрения полезно привести еще один способ построения класса точных аналитических решений (1.7), (1.8). Этот способ учитывает тот факт, что между лагранжевыми инвариантами системы (1.5), (1.6) (переменными  $M, I$ ) существует сохраняющаяся в процессе эволюции функциональная связь, которая однозначно определяется начальными данными при  $t = 0$ :  $M = M_0(r), I = I_0(r)$ . Действительно, решения уравнений (1.6) можно записать в виде  $M = M_0(r_0), I = I_0(r_0)$ , где  $r_0(r, t)$  – начальная (лагранжева) координата жидких частиц. Исключая из последних равенств координату  $r_0$ , получаем искомую связь:  $M = F(I)$ , где  $F(I) = M_0(I_0^{-1}(I))$ . С учетом данной связи, система (1.5), (1.6) редуцируется к системе из двух уравнений

$$\frac{du}{dt} - \frac{F^2(I)}{r^3} + g\kappa r + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial I}{\partial r} \right) = 0, \quad \frac{dI}{dt} = 0$$

которая, в свою очередь, сводится к одному уравнению, если использовать замену независимых переменных  $(r, t) \rightarrow (I, t)$ , а в качестве неизвестной функции использовать  $r = r(I, t)$  (фактически это вариант уравнений динамики в лагранжевых переменных)

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} - \frac{F^2(I)}{r^3} + g\kappa r + 2r \frac{\partial}{\partial I} \left( \frac{\partial r^2}{\partial I} \right)^{-2} = 0 \quad (1.16)$$

Решения (1.7), (1.8) отвечают простейшим решениям уравнения (1.16) с разделяющимися переменными вида  $r = c(t)s(I)$ . Действительно, подставляя последнее выражение в (1.16) после разделения переменных, приходим к уравнению (1.10) и уравнению

$$\frac{F^2(I)}{s^3} = 2s \frac{d}{dI} \left( \frac{ds^2}{dI} \right)^{-2} + As$$

которое, с учетом того, что  $s(I)$  – функция, обратная к  $I_0(s), M^2 = F^2(I)$ , совпадает с соотношением (1.9). Отметим, что редукция системы осесимметричных уравнений мелкой воды к одному линейному уравнению может оказаться полезной при проведении численных расчетов.

Проведенный анализ легко переносится на случай колебаний жидкости в параболоиде, вращающемся с угловой скоростью  $\Omega$  вокруг вертикальной оси. В системе ко-

ординат, связанной с вращающимся параболоидом, осесимметричная система уравнений динамики имеет вид [1, 10]

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} - \frac{v^2}{r} &= -g \frac{\partial H}{\partial r} + 2\Omega v + \Omega^2 r, & \frac{dv}{dt} + \frac{uv}{r} + 2\Omega u &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(H - D) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(ru(H - D)) &= 0 \end{aligned} \quad (1.17)$$

где последние два слагаемых в правой части первого уравнения представляют собой соответственно силу Кориолиса и вклад в центробежную силу от вращения системы как целого. Нетрудно видеть, что, сделав в (1.17) замену  $v = v' - \Omega r$ , получим прежнюю систему (1.2), в которой вместо  $v$  стоит  $v'$  (система (1.2) инвариантна относительно перехода во вращающуюся систему координат). Отсюда следует, что период свободных колебаний жидкости во вращающемся параболоиде не зависит от угловой скорости  $\Omega$  и по-прежнему определяется формулой (1.15).

Сделанное замечание позволяет дать интересную интерпретацию формуле для периода. Как следует из (1.17), для того, чтобы свободная поверхность жидкости во вращающемся параболоиде приняла форму дна (имела постоянную толщину  $h = H - D$  по вертикали), параболоид следует вращать с угловой скоростью  $\Omega = \sqrt{g\kappa}$  или, что эквивалентно, с периодом  $T_* = 2\pi/\sqrt{g\kappa}$ . Период свободных колебаний жидкости в таком параболоиде, таким образом, в точности равен половине периода вращения:  $T = T_*/2$ . Для земной атмосферы, вращающейся с периодом  $T_* = 2\pi/\Omega$  и имеющей в среднем постоянную толщину, подобные колебания аналогичны хорошо известным инерционным колебаниям с периодом  $T = 2\pi/f_c = \pi/\Omega \sin \varphi$  [10]. Здесь  $f_c = 2\Omega \sin \varphi$  – параметр Кориолиса,  $\varphi$  – географическая широта.

**2. Колебания в параболическом канале.** Исследуем теперь свободные колебания жидкости в неограниченном параболическом канале с осью симметрии, совпадающей с осью  $u$  и профилем дна

$$z = D(x) = \frac{\kappa x^2}{2} \quad (2.1)$$

С учетом (2.1), одномерная (не зависящая от координаты  $u$ ) система уравнений динамики имеет вид [2]

$$\frac{du}{dt} = -g \frac{\partial h}{\partial x} - g\kappa x, \quad \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uh) = 0 \quad (2.2)$$

где  $d/dt = \partial/\partial t + u\partial/\partial x$ ,  $h$  – полная глубина,  $u$  – компонента скорости вдоль оси  $x$ .

Система (2.2) имеет класс точных нестационарных решений, аналогичный (1.8), (1.11). Будем искать решение для  $h$  в виде

$$h = \frac{1}{c(t)} h_0(s), \quad s = \frac{x}{c(t)} \quad (2.3)$$

Из второго уравнения (2.2) при этом следует

$$u = \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} x \quad (2.4)$$

Подставляя (2.3), (2.4) в первое уравнение, приходим к уравнению с разделяющимися переменными

$$s[\ddot{c} + g\kappa c] + \frac{1}{c^2} \frac{dh_0}{ds} = 0$$

которое удовлетворяется, если

$$\frac{dh_0}{ds} = -As, \quad h_0 = h_* - \frac{As^2}{2}$$

Здесь  $A$  – константа разделения,  $c(t)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\ddot{c} + gkc - \frac{A}{c^2} = 0 \quad (2.5)$$

Таким образом, построен класс точных нестационарных решений системы (2.2), характеризуемый линейной зависимостью от горизонтальной координаты для скорости  $u$  и квадратичной – для  $h$ . Обратим внимание, что для этого класса функциональный произвол в распределении глубины отсутствует.

Рассмотрим уравнение (2.5). Оно отличается от (1.10) только показателем степени в нелинейном слагаемом и описывает движение частицы в поле силы с потенциалом  $U(c) = gkc^2/2 + A/c$ . При  $A > 0$  это уравнение имеет положение равновесия  $c_* = \sqrt[3]{A/gk}$ , в окрестности которого все решения являются периодическими (так как  $c_*$  – точка минимума для  $U(c)$ ). В отличие от (1.10), соответствующие решения, однако, выражаются не через элементарные, а через эллиптические функции. Кроме того, колебания являются неизохронными – выражаемый через эллиптические интегралы период (1.3) зависит от начальной энергии  $E$ .

Для построения решений удобно использовать асимптотические методы. Рассмотрим колебания, для которых глубина мало отличается от равновесной  $h = h_* - gkx^2/2$ . В этом случае можно считать  $A = gk$  и положение равновесия  $c_* = 1$ . Полагая  $c = 1 + q$  и разлагая  $(1 + q)^{-2}$  в ряд Тейлора, из (2.5) получим уравнение

$$\ddot{q} + \omega^2 \left[ q - q^2 + \frac{4}{3}q^3 + \dots \right] = 0, \quad \omega = \sqrt{3gk} \quad (2.6)$$

Далее воспользуемся асимптотической теорией. Как показано в [11, 12], для уравнения

$$\ddot{q} + \omega^2 [q + \alpha_2 q^2 + \alpha_3 q^3 + \dots] = 0 \quad (2.7)$$

асимптотическое разложение решения по степеням начальной амплитуды  $\epsilon$  имеет вид

$$q = \epsilon a_0 \cos(\tau + \beta_0) + \frac{1}{6} \epsilon^2 a_0^2 \alpha_2 [\cos(2\tau + 2\beta_0) - 3] + \dots \quad (2.8)$$

$$\tau = \omega t \left[ 1 + \left( \frac{3}{8} \alpha_3 - \frac{5}{12} \alpha_2^2 \right) \epsilon^2 + \dots \right]$$

где  $a_0, \beta_0$  – постоянные, определяемые условиями  $q(0) = 0, \dot{q}(0) = \epsilon$ . Из (2.8) имеем формулу для периода

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \left[ 1 - \left( \frac{3}{8} \alpha_3 - \frac{5}{12} \alpha_2^2 \right) \epsilon^2 \right]$$

содержащую амплитудную поправку, обусловленную нелинейностью (второе слагаемое в квадратных скобках). Для уравнения (2.6)  $\alpha_2 = -1, \alpha_3 = 4/3$ , откуда период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{3gk}} \left[ 1 - \frac{1}{12} \epsilon^2 \right] \quad (2.9)$$

В силу зависимости периода от амплитуды, колебания являются неизохронными. Обратим внимание, что нелинейность приводит к уменьшению периода.

Для сравнения проделаем тот же анализ для уравнения (1.10). Полагая  $A = g\kappa$  и  $c = 1 + q$ , после разложения в ряд Тейлора получим уравнение

$$\ddot{q} + \omega^2 \left[ q - \frac{3}{2}q^2 + \frac{5}{2}q^3 + \dots \right] = 0, \quad \omega = \sqrt{4g\kappa} \quad (2.10)$$

Для этого уравнения  $\alpha_2 = -3/2$ ,  $\alpha_3 = 5/2$ , и амплитудная поправка к периоду в точности равна нулю:  $(3/8)\alpha_3 - (5/12)\alpha_2^2 = 0$ . Этот результат еще раз подчеркивает уникальность свойства изохронности колебаний: оно выполняется лишь при специальном алгебраическом соотношении между коэффициентами уравнения (2.7).

Линейная теория свободных колебаний жидкости в параболическом канале с равновесной глубиной  $h = h_*(1 - x^2/a^2)$ ,  $a$  – ширина канала (озера), изложена в [2]. Для периодов первых двух низкочастотных мод при этом получены выражения:  $T_1 = 2\pi a / \sqrt{2gh_*}$ ,  $T_2 = 2\pi a / \sqrt{6gh_*}$ . Эти выражения можно переписать в терминах кривизны дна  $\kappa = 2h_*/a^2$

$$T_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{g\kappa}}, \quad T_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{3g\kappa}} \quad (2.11)$$

Из сравнения (2.11) с (2.9) видно, что формула (2.9) дает период не первой, а второй низкочастотной моды. Структура решения (2.3), (2.4) также согласуется со структурой именно второй линейной моды [2]. Оказывается, можно построить точное решение, описывающее первую низкочастотную моду, не имеющую аналога для параболоида вращения. Для этой моды, как и в линейной теории, скорость  $u$  не зависит от  $x$ , а отклонение глубины от равновесной  $\xi = h - (h_* - \kappa x^2/2)$  – линейная функция  $x$

$$u = u(t), \quad \xi = m(t)x + d(t) \quad (2.12)$$

Легко проверить, что подстановка (2.12) в (2.2) дает систему уравнений

$$\dot{u} = -gm, \quad \dot{m} = \kappa u, \quad \dot{d} = -mu$$

решение которой имеет вид

$$u(t) = \lambda \cos(\omega t + \beta), \quad m(t) = \frac{\lambda \omega}{g} \sin(\omega t + \beta)$$

$$d(t) = \delta + \frac{\lambda^2}{4g} \cos(2\omega t + 2\beta)$$

где  $\omega = \sqrt{g\kappa}$ ,  $\lambda$ ,  $\beta$ ,  $\delta$  – произвольные постоянные, определяемые начальными условиями. Полученное решение описывает первую моду колебаний с периодом  $T_1 = 2\pi / \sqrt{g\kappa}$ . Коэффициент  $d(t)$  при этом дает поправку к линейному решению за счет нелинейности. В силу линейности уравнений для  $u$ ,  $m$  колебания, описываемые первой модой, также изохронны.

Отметим, что, как и в предыдущем разделе, систему (2.2) можно свести к одному нелинейному уравнению волнового типа. Так, вводя вместо  $h$  функцию  $I = \int h dx$  и учитывая, что  $I(x, t)$  удовлетворяет уравнению  $dI/dt = 0$  и  $gh = \partial I / \partial x$ , вместо (2.2) получим систему

$$\frac{du}{dt} + g \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + g\kappa x = 0, \quad \frac{dI}{dt} = 0$$



которая сводится к одному уравнению, если использовать замену независимых переменных  $(x, t) \rightarrow (I, t)$  и в качестве искомой функции использовать  $x = x(I, t)$ :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial I} \left( \frac{\partial x}{\partial I} \right)^{-2} + g k x = 0 \quad (2.13)$$

Первая и вторая моды колебаний отвечают частным решениям (2.13) соответственно вида  $x = x(t)$  и  $x = x(t)s(I)$ .

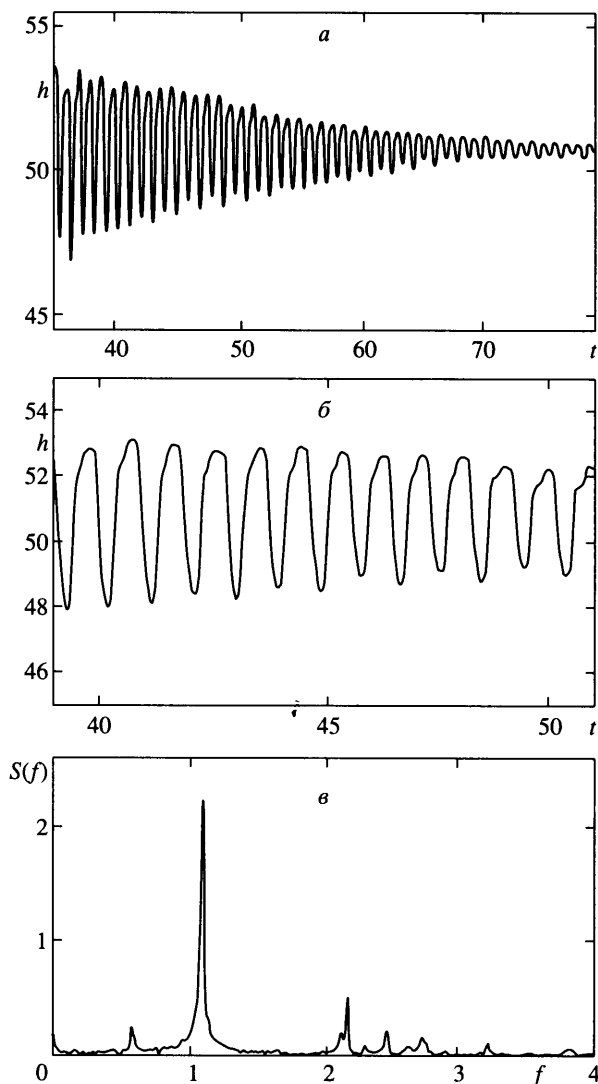
**3. Эксперимент.** Экспериментальные исследования свободных колебаний жидкости проводились на специальной установке Абастуманской астрофизической обсерватории, изначально предназначенной для изучения динамики вихрей во вращающихся планетных атмосферах. Эта установка представляет собой способный вращаться вокруг вертикальной оси параболоид вращения (точнее – параболический сегмент) с максимальным диаметром  $d = 120$  см и профилем дна  $z = r^2/2R$ , где радиус кривизны параболоида в полюсе  $R = 1/\kappa = 0.698$  м. Определяемый формулой (1.15) период свободных колебаний жидкости в этом параболоиде  $T = 0.838$  с, соответственно частота свободных колебаний  $f = 1/T = 1.193$  Гц. Согласно предсказаниям теории, для данного параболоида приведенное значение периода есть универсальная постоянная, не зависящая ни от амплитуды колебаний, ни от массы жидкости в сосуде (период может меняться только за счет вязкости, которая в модели не учитывается).

Для проверки этого факта авторами проведена серия экспериментов. В этих экспериментах свободные колебания возбуждались импульсным (кратковременным) погружением в жидкость в центральной части параболоида осесимметричных тел вращения, в качестве которых использовались цилиндр, конус, полусфера. Свободные колебания при этом регистрировались специальными датчиками (сенсорами), измеряющими уровень жидкости и расположенными по радиусу параболоида. С помощью цифровой системы сбора и передачи данных показания каждого датчика можно было выводить на экран компьютера, а также проводить их цифровую обработку, в частности, рассчитывать временной спектр колебаний.

Типичный пример временной зависимости уровня (глубины)  $h$  в точке после начала возбуждения колебаний приведен на фиг. 2, а. На фиг. 2, б приведен центральный участок этой зависимости, не содержащий начальных переходных процессов. Здесь отчетливо виден практически периодический характер колебаний, причем значение периода можно оценить прямо по графику (изначально так и делалось). Форма колебаний отлична от гармонической, что свидетельствует об их нелинейности. Соответствующий приведенной зависимости временной спектр колебаний изображен на фиг. 2, в. Максимум на спектре соответствует частоте  $f = 1.113$  Гц, немного меньшей теоретического значения (относительная ошибка 6.7%).

Отметим, что приведенные зависимости относятся к показаниям датчика, наиболее удаленного от центра параболоида (источника возбуждения колебаний). Для датчиков, расположенных вблизи источника, рассчитанные спектры содержат вторичные максимумы, что объясняется присутствием здесь вынужденных колебаний, навязываемых источником (его формой). По этой причине в анализе использовались только показания наиболее удаленного от центра датчика, регистрирующего свободные колебания в чистом виде. Как показал анализ, рассчитанная форма спектра колебаний практически не зависит от того, берется ли полный участок временного хода уровня, начиная от момента возбуждения до момента полного затухания под влиянием вязкости, либо только его центральная (периодическая) часть. Это свидетельствует о том, что вязкость, уменьшая амплитуду, практически не оказывает влияния на период колебаний.

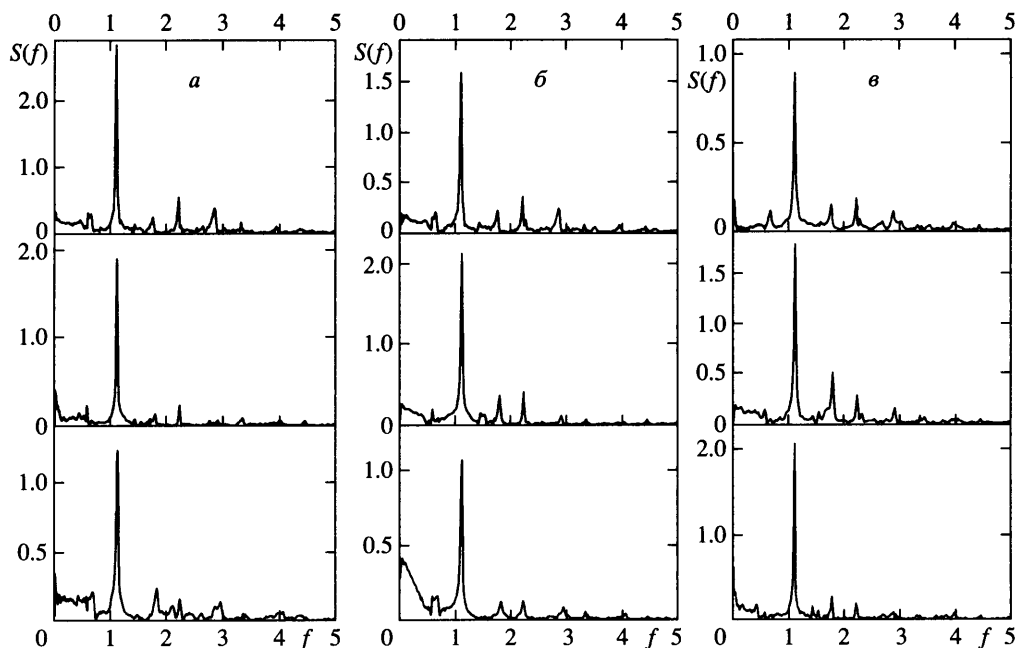
В ходе экспериментов можно было менять как способ возбуждения колебаний (цилиндр, конус, полусфера), так и их амплитуду – путем изменения интенсивности погружения. Кроме того, эксперименты проводились при различной глубине жидкости



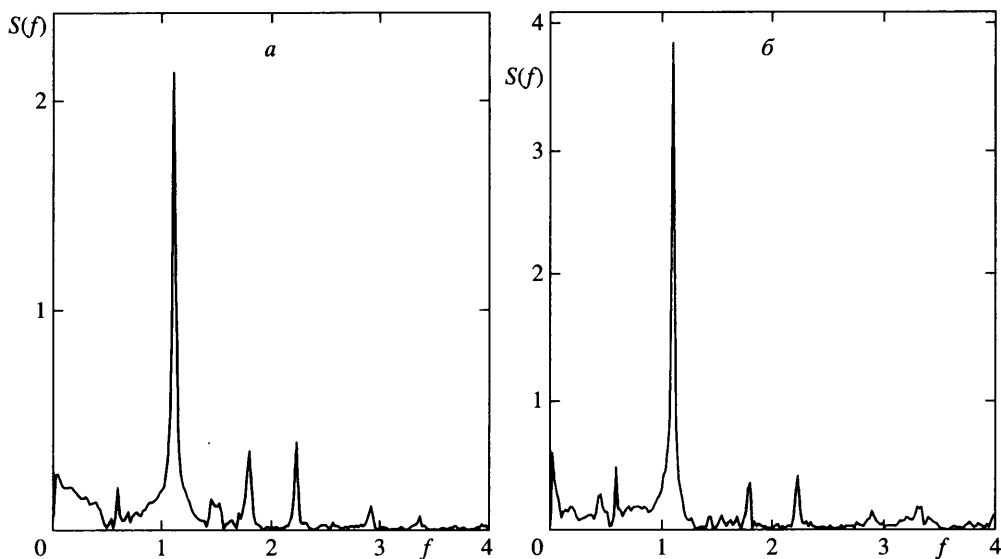
Фиг. 2. Временной ход уровня  $h$  жидкости в точке (а, б) и соответствующий временной спектр  $S(f)$  колебаний (в). Максимум на спектре отвечает частоте  $f = 1.113$

(в центре)  $h_* = 80\text{--}204$  мм. На фиг. 3, 4 показаны временные спектры колебаний уровня, полученные соответственно при различных полных глубинах жидкости, различных способах возбуждения колебаний и различных амплитудах колебаний. При изменении внешних факторов частота свободных колебаний остается практически постоянной. Анализ полученных экспериментальных данных показывает, что при изменении глубины более чем в два раза частота меняется лишь на 2%. Это доказывает изохронный характер колебаний жидкости в параболоиде.

Обратим внимание, что во всех экспериментах измеренное значение частоты немного меньше теоретического (максимальная относительная ошибка 10%). Это отклонение связано с некоторым отличием формы экспериментальной установки от формы правильного параболоида. В частности, полюс параболоида выполнен в форме круглого диска (конструктивная особенность установки), который в целом делает



Фиг. 3. Временные спектры колебаний уровня жидкости в точке при различных полных глубинах  $h_*$  в центре (верхние фрагменты –  $h_* = 115$  мм, средние – 100 мм, нижние – 80 мм) и различных способах возбуждения колебаний (*a* – цилиндр, *б* – конус, *в* – полусфера). Значения частот, отвечающих максимумам на спектрах (сверху вниз, Гц): 1.113, 1.113, 1.122 (*a*); 1.104, 1.113, 1.113 (*б*); 1.113, 1.113, 1.119 (*в*)



Фиг. 4. Временные спектры колебаний уровня жидкости в точке при различных амплитудах колебаний (различных интенсивностях погружения тела). Полная глубина в центре  $h_* = 100$  мм. Значения частот, отвечающих максимумам на спектрах: 1.113 (*a*) и 1.119 Гц (*б*)

параболоид более пологим (уменьшает  $\kappa$ ). За счет этого происходит уменьшение частоты колебаний. Незначительное изменение  $f$  при увеличении глубины жидкости может быть также связано с нарушением приближения длинных волн. При выбранном способе возбуждения колебаний практически не генерировались высшие моды, описываемые линейной теорией (им отвечают небольшие вторичные максимумы на спектрах). Вполне возможно, что здесь имеет место некоторый нелинейный эффект захвата частоты основной модой.

**Заключение.** Построенный класс точных решений уравнений мелкой воды, описывающий нелинейные осесимметричные колебания жидкости в параболоиде вращения и неограниченном параболическом канале, характеризуется линейной зависимостью от горизонтальной координаты для радиальной (поперечной) компоненты скорости. В параболоиде вращения колебания изохронны, т.е. их период не зависит от амплитуды и определяется только параметрами параболоида. В параболическом канале соответствующие колебания не изохронны, получена амплитудная поправка к периоду в приближении слабой нелинейности. Результаты выполненных лабораторных экспериментов свидетельствуют о независимости периода колебаний от амплитуды в параболоиде вращения.

Авторы признательны Л.Х. Ингелю за помощь в работе и полезные замечания. Настоящая работа выполнена при финансовой поддержке МНТЦ (проект G-553).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ламб Г. *Гидродинамика*. М.; Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
2. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. *Теоретическая гидромеханика*. Т. 1. Л.; М.: Гостехиздат, 1948. 535 с.
3. Miles J.W., Ball F.K. On free-surface oscillations in a rotating paraboloid // *J. Fluid Mech.* 1963. V. 17. Pt 2. P. 257–266.
4. Thacker W.C. Some exact solutions to the nonlinear shallow-water wave equations // *J. Fluid Mech.* 1981. V. 107. P. 499–508.
5. Ингель Л.Х. Класс точных нестационарных решений уравнений мелкой воды с вращением // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана*. 1994. Т. 30. № 5. С. 718–720.
6. Доценко С.Ф., Рубино А. Точные аналитические решения нелинейных уравнений длинных волн в случае осесимметричных колебаний жидкости во вращающемся параболическом бассейне // *Изв. РАН. МЖГ*. 2003. № 2. С. 158–164.
7. Свиркунов П.Н. Неустановившиеся осесимметричные течения в приближении теории мелкой воды // *ПММ*. 1996. Т. 60. Вып. 3. С. 520–522.
8. Гиндикин С.Г. *Рассказы о физиках и математиках*. М.: Наука, 1981. 191 с.
9. Амелькин В.В. *Дифференциальные уравнения в приложениях*. М.: Наука, 1987. 157 с.
10. Гилл А. *Динамика атмосферы и океана*. Т. 1. М.: Мир, 1986. 397 с.
11. Найфе А. *Введение в методы возмущений*. М.: Мир, 1984. 535 с.
12. Арнольд В.И. *Обыкновенные дифференциальные уравнения*. М.: Наука, 1984. 271 с.