

УДК 532.59

© 2004 г. М. И. ИВАНОВ

О СВОБОДНЫХ ПРИЛИВАХ В ПЛОСКИХ БАСЕЙНАХ ПОСТОЯННОЙ ГЛУБИНЫ

Рассмотрена задача о распространении свободных приливных волн в плоских бассейнах постоянной глубины. Для ее решения разработан численный алгоритм, являющийся разновидностью метода Бабенко. Построенный алгоритм позволяет решить задачу в односвязной области, допускающей конформное отображение на круг. Решение может быть получено как для невращающегося бассейна, так и для вращающегося. Найдены первые собственные частоты для эллиптических бассейнов с различными эксцентриситетами и угловыми скоростями вращения и построены некоторые характерные собственные формы, иллюстрирующие особенности приливного движения в эллиптическом бассейне. Рассмотрена эволюция мод во времени во вращающемся эллиптическом бассейне.

Ключевые слова: приливная волна, собственное колебание, свободное колебание, эллиптический бассейн.

В классических работах [1, 2] задача определения свободного прилива в предположении, что невозмущенный слой жидкости является плоским, была решена только для некоторых форм бассейнов специального вида. В большинстве для нахождения приливных мод использовались асимптотические методы, при этом Дж. Праудмен [3], заменяя Черное море полукруглым бассейном, получал результаты, находящиеся в хорошем соответствии с фактическими данными. Им же получено решение задачи для бассейна, мало отличающегося по форме от окружности [4] (в частности, решение может быть использовано для эллиптического бассейна с малым эксцентриситетом). В работах [5–10] исследовались приливные волны в бассейнах эллиптической формы. В [11] приближенно найдены простейшие приливные моды для вращающегося эллиптического бассейна. Систематическое изложение классических результатов можно найти в [1, 2]. В [12] было получено высокоточное решение задачи о приливных колебаниях в невращающихся эллиптических бассейнах в широком диапазоне изменения эксцентриситета для пяти первых мод.

Решение задачи о свободных приливах во вращающихся бассейнах произвольной формы представляет значительные трудности. Автором разработан алгоритм, позволяющий получать решение задачи о приливных колебаниях во вращающихся бассейнах, которые допускают конформное отображение на круг. Для его построения используются интерполяционные полиномы специального вида. Изложение данного метода и соответствующие оценки погрешности следует искать в [13–15].

1. Постановка задачи. Рассматриваются колебания плоского слоя жидкости под действием силы Кориолиса. Угловая скорость ω постоянна. Пусть при отсутствии вращения и возмущающих сил свободный уровень жидкости располагается по плоскости xz . Вращение происходит вокруг оси z .

Рассматривается вращающаяся с угловой скоростью ω вокруг оси z система координат x, y, z . Вводится функция глубины рассматриваемого слоя жидкости $h(x, y)$, причем отсчет глубины ведется от поверхности относительного равновесия. Через u и v обозначаются горизонтальные компоненты скорости относительного движения. В предположении, что эти компоненты малы вместе со всеми своими производными и пре-

небрегая вертикальными ускорениями частиц жидкости, запишем уравнения, описывающие волновое движение в поле силы Кориолиса [1, 2]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} + 2\omega v, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial y} - 2\omega u \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} \quad (1.2)$$

Здесь ζ есть функция уклонения поверхности возмущенной жидкости от формы относительного равновесия, а g – ускорение свободного падения.

На границе бассейна система уравнений (1.1)–(1.2) дополняется условием непротекания

$$lu + mv = 0 \quad (1.3)$$

где l, m – направляющие косинусы нормали к стенкам бассейна.

Будем предполагать, что компоненты скорости по осям x и y и уклонение поверхности жидкости от формы относительного равновесия ζ над плоскостью xy подчиняются закону

$$u = u_1 \cos \sigma t + u_2 \sin \sigma t, \quad v = v_1 \cos \sigma t + v_2 \sin \sigma t, \quad \zeta = \zeta_1 \cos \sigma t + \zeta_2 \sin \sigma t \quad (1.4)$$

Вводя комплексную функцию $Z = \zeta_1 + i\zeta_2$ и подставляя (1.4) в (1.1), получим

$$\zeta = \operatorname{Re}(Ze^{-\sigma t i})$$

$$\frac{\sigma^2 - 4\omega^2}{g} u = \operatorname{Re} \left[\left(-\sigma i \frac{\partial Z}{\partial x} + 2\omega \frac{\partial Z}{\partial y} \right) e^{-\sigma t i} \right] \quad (1.5)$$

$$\frac{\sigma^2 - 4\omega^2}{g} v = -\operatorname{Re} \left[\left(\sigma i \frac{\partial Z}{\partial y} + 2\omega \frac{\partial Z}{\partial x} \right) e^{-\sigma t i} \right]$$

Внесение (1.4) с учетом (1.5) в уравнение неразрывности (1.2) дает уравнение для функции Z :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial Z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial Z}{\partial y} \right) + \frac{\sigma^2 - 4\omega^2}{g} Z = \frac{2\omega D(h, Z)}{\sigma i D(x, y)} \quad (1.6)$$

Граничное условие (1.3) для функции Z с учетом (1.5) получит вид

$$\frac{\partial Z}{\partial n} \Big|_{\partial \Gamma} = -\frac{2\omega \partial Z}{\sigma i \partial s} \Big|_{\partial \Gamma} \quad (1.7)$$

где dn – дифференциал внутренней нормали, ds – дифференциал длины контура, отсчитываемый в положительном направлении, $\partial \Gamma$ – граница бассейна. При предположении постоянной глубины бассейна краевая задача (1.6), (1.7) приобретает следующий вид:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} + k^2 Z = 0, \quad k^2 = \frac{\sigma^2 - 4\omega^2}{gh} \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial n} = -\frac{2\omega \partial Z}{\sigma i \partial s}, \quad (x, y) \in \partial \Gamma$$

2. Построение численного алгоритма. Для решения задачи применялся метод “без насыщения” [13]. Для построения этого алгоритма используется интерполяционная формула Бабенко для функции двух переменных в круге. Интерполяционные узлы выбираются так, что их плотность увеличивается к границе области. Это позволяет точнее учитывать краевые эффекты.

Во внутренности круга выбирается mN интерполяционных узлов вида

$$\zeta_{\nu l} = r_\nu e^{i\theta_l}, \quad r_\nu = \cos \frac{(2\nu-1)\pi}{4m}, \quad \nu = 1, \dots, m$$

$$\theta_l = \frac{2\pi l}{N}, \quad N = 2n+1, \quad l = 0, \dots, 2n$$
(2.1)

Далее используется интерполяционный полином вида

$$(P_M f)(r, \theta) = \sum_{l=0}^{2n} \sum_{\nu=1}^m f_{\nu l} L_{\nu l}(r, \theta), \quad f_{\nu l} = f(\zeta_{\nu l})$$

$$L_{\nu l}(r, \theta) = \frac{2T_{2m}(r)}{NT'_{2m}(r_\nu)} \left(\frac{D_n(\theta - \theta_l)}{r - r_\nu} - \frac{D_n(\theta - \theta_l + \pi)}{r + r_\nu} \right)$$
(2.2)

$$D_n(\theta) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k\theta, \quad T_m(r) = \cos(m \arccos x)$$

Чтобы применить алгоритм [13], необходимо переформулировать задачу (1.8) следующим образом. В односвязной области $\Gamma \in R^2$ с границей $\partial\Gamma$ решается краевая задача

$$\Delta u(z) + f(z) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Gamma} = C i \frac{\partial u}{\partial s} \Big|_{\partial\Gamma}$$
(2.3)

$$f(z) = k^2 u(z), \quad C = 2\omega/\sigma$$

С использованием формулы Грина определяется условие разрешимости краевой задачи (2.3)

$$\int_{|s| \leq 1} f ds = 0$$
(2.4)

т.е. условие разрешимости задачи (2.4) аналогично условию разрешимости задачи Неймана для оператора Лапласа, рассматривавшейся в [14, 15]. С точки зрения гидродинамики условие разрешимости (2.4) означает сохранение объема колеблющейся жидкости.

К задаче (2.3) применяется алгоритм [13]. Для этого используется конформное отображение области $\Gamma \in R^2$ на единичный круг $|\zeta| \leq 1$. Независимая переменная выражается как $z = \varphi(\zeta)$, $|\zeta| \leq 1$, где функция $\varphi(\zeta)$ задает конформное отображение единичного круга на область Γ . Здесь $\vartheta = \rho e^{i\theta}$. Тогда определится $u(z(\vartheta))$ вместо $u(z)$ и $|\varphi'(\vartheta)|^2 f(z(\vartheta))$ вместо $f(z)$. Решение задачи (2.3) будет даваться формулой

$$u(\zeta) = - \int_{|\xi| \leq 1} K(\zeta, \xi) |\varphi'(\xi)|^2 f(\xi) d\xi + \int_0^{2\pi} K_0(\zeta, \theta) \psi(\theta) d\theta$$

$$K(\zeta, \xi) = -\frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{1 - \zeta \bar{\xi}}{\zeta - \xi} \right|, \quad K_0(\zeta, \theta) = \frac{1 - \rho^2}{2\pi(1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\theta - \varphi))}$$
(2.5)

$$\zeta = \rho e^{i\varphi}, \quad \psi(\theta) = u|_{\partial\Gamma}$$

где $K(\zeta, \xi)$ есть функция Грина оператора Лапласа в круге. Чертой обозначена операция комплексного сопряжения.

Подынтегральные функции формулы (2.5) заменяются их интерполяционными полиномами вида (2.2) с интерполяционными узлами (2.1). Для функции $|\varphi'(\xi)|^2 f(\xi)$ используется интерполяционный полином (2.2), а для $\psi(\theta)$ применяется тригонометрическая интерполяция:

$$\psi(\theta) = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{2n} D_n(\theta - \theta_j) \psi_j, \quad \psi_j = \psi(\theta_j), \quad \theta_j = \frac{2\pi j}{N}, \quad j = 0, \dots, 2n \quad (2.6)$$

Функция D_n была определена выше формулой (2.2). В итоге искомая функция будет выражена

$$u(\zeta) = \sum_{p=1}^M H_p(\zeta) f_p + \sum_{j=0}^{2n} H_j^0(\zeta) \psi_j$$

$$H_{vl}(\zeta) = \frac{1}{N} a_{v0}(\rho) + \frac{2}{N} \sum_{k=1}^n a_{vk}(\rho) \cos k(\varphi - \theta_l) \quad (2.7)$$

$$H_{vl}(\zeta) = - \int_{|\xi| \leq 1} K(\zeta, \xi) L_{vl}(\xi) d\xi, \quad \xi = r e^{i\theta}$$

где L_{vl} определяется согласно (2.2), а $K(\zeta, \xi)$ – согласно (2.5). У матрицы H один индекс (p) вместо двух (v и l) получается перенумерацией. Матрица H_j^0 определяется выражением

$$H_j^0 = \frac{2}{N} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{L=1}^n \rho^L \cos L(\varphi - \theta_j) \right\}, \quad \zeta = \rho e^{i\varphi} \quad (2.8)$$

получаемся при подстановке интерполяционного полинома (2.6) во второе слагаемое правой части формулы (2.5).

В формуле (2.7) искомая функция $u(\zeta)$ выражена через неизвестные значения граничной функции $\psi(\theta)$. Однако для значений $u(\zeta)$ на границе имеется краевое условие (1.7). После подстановки формулы (2.7) в это краевое условие с учетом (2.8) получится следующая система уравнений для нахождения функции ψ :

$$\sum_{j=0}^N B_{ij} \psi_j + \sum_p H'_p(\theta_i) f_p = 0$$

$$H'_{vl}(\theta_i) = \frac{1}{N} a'_{v0}(1) + \frac{2}{N} \sum_{k=1}^N a'_{vk}(1) \cos k(\theta_i - \theta_l) \quad (2.9)$$

$$B_{kj} = \sum_{L=1}^n (L \cos L\theta_{k-j} + C i L \sin L\theta_{k-j}), \quad C = \frac{2\omega}{\sigma}, \quad k, j = 0, \dots, N-1$$

Для нахождения граничной функции необходимо решить систему уравнений (2.9). Эта система существенно отличается от аналогичной в случае задачи Неймана, рассмотренной в [14, 15], где матрица B вещественна. Система (2.9) может быть решена при любых значениях $C < 1$. Опуская некоторые вычислительные подробности, получаем

$$u(\zeta) = \sum_i H_i(\zeta) f_i + \sum_{p=0}^{2n} \left\{ H_p^0(\zeta) \left(\xi_N - \sum_{q=1}^N C_{pq} \sum_i H'_i(\theta_q) f_i \right) \right\} \quad (2.10)$$

Значение ξ_N должно быть найдено из условия разрешимости (2.4). При этом элементы матрицы C находятся по формуле

$$C_{pq} = \frac{2}{(2n+1)^2} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\exp(i\theta_j^{p-q})}{(C+1)j} + \sum_{j=n+1}^{2n} \frac{\exp(i\theta_j^{p-q})}{(1-C)(N-j)} \right) \quad (2.11)$$

$$\theta_j^{p-q} = \frac{2\pi}{N}(p-q)j, \quad p, q = 1, \dots, N$$

Здесь матрица C – эрмитова. Полученная формула для элементов матрицы C обобщает аналогичную формулу для задачи Неймана.

Формула (2.10) позволяет построить матрицу дискретной задачи. Для нахождения собственных чисел существуют специальные численные алгоритмы. Численный алгоритм решения задачи (2.3) для краевых условий Неймана изложен в [14, 15]. Тексты программ, реализующих этот алгоритм, приведены в [16].

3. Круговые бассейны. Из [1, 2] известны точные аналитические решения задачи о свободных приливах в плоских круговых бассейнах с постоянной глубиной. Частное решение имеет вид

$$Z = J_m(kr) \exp(i(m\theta + \varepsilon)) \quad (3.1)$$

Здесь m – целое число, k определяется из граничного условия как решение уравнения

$$kaJ'_m(ka) + \frac{2\omega m}{\sigma} J_m(ka) = 0 \quad (3.2)$$

где a – радиус бассейна. В случае вращающегося бассейна будем иметь волну

$$\zeta = J_m(kr) \cos(\sigma t - m\theta + \varepsilon), \quad \sigma^2 = 4\omega^2 + ghk^2 \quad (3.3)$$

При наличии вращения бассейна происходит расщепление частот свободных колебаний невращающейся жидкости. Для волны (3.3) существует m узловых диаметров, при $m=0$ мода является стоячей, при $m=1$ имеет форму склона или скоса, при $m=2$ – седла, при $m=3$ – тройного седла (седло с тремя осями симметрии). Кроме того, существует некоторое число узловых окружностей, которое зависит от номера корня ka уравнения (3.2). Радиусы узловых окружностей находятся из уравнения $J_m(kr_0) = 0$.

Данное аналитическое решение может быть использовано в качестве проверочного при тестировании построенного алгоритма. Рассматривалось фиксированное значение $C = 2\omega/\sigma$. Полученные результаты сведены в табл. 1, где в первой строке выписаны значения ka , полученные численно посредством построенного в разд. 2 алгоритма, а строкой ниже приводятся проверочные значения для ka , найденные из уравнения (3.2). Из таблицы следует, что при приближении к критическому значению $C = 1$ точность алгоритма падает. Точность вычисления собственного числа зависит от числа m , которое определяет количество узловых диаметров. При этом для далеких от единицы значений C построенный алгоритм достигает высокой точности. Наличие вращения изменяет порядок следования мод по отношению к случаю невращающегося бассейна.

4. Эллиптические бассейны. В [12] для решения краевой задачи (1.8) в эллиптической области вводились эллиптические координаты ξ и η по формулам $x = c \operatorname{ch} \xi \cos \eta$, $y = c \operatorname{sh} \xi \sin \eta$, где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, a и b – полуоси эллипса. Тогда, применяя к (1.8) метод разделения переменных Фурье, получим систему Матье, решениями которой являются функции Матье. Численное решение системы Матье было предпринято в [12] и позволило получить высокоточное решение для первых мод невращающегося эллипти-

Таблица 1

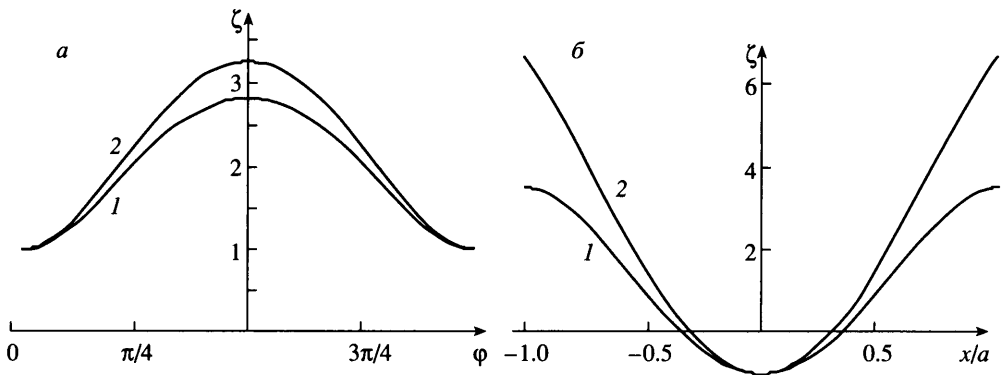
C	$\sqrt{\lambda_1}$	$\sqrt{\lambda_2}$	$\sqrt{\lambda_3}$	$\sqrt{\lambda_4}$	$\sqrt{\lambda_5}$	$\sqrt{\lambda_6}$	$\sqrt{\lambda_7}$	$\sqrt{\lambda_8}$	$\sqrt{\lambda_9}$
0.02	1.83	1.852	3.034	3.074	3.832	4.173	4.228	5.284	5.328
0.02	1.826	1.856	3.031	3.077	3.832	4.172	4.23	5.282	5.352
0.1	1.783	1.891	2.946	3.151	3.832	4.055	4.331	5.14	5.313
0.1	1.761	1.915	2.934	3.164	3.832	4.047	4.339	5.134	5.481
0.2	1.717	1.933	2.825	3.237	3.832	3.891	4.445	4.938	5.293
0.2	1.674	1.984	2.934	3.164	3.832	4.1	4.295	5.228	5.292
0.5	1.465	1.981	2.362	3.253	3.426	3.832	4.138	4.714	5.02
0.5	1.357	2.166	2.3	3.209	3.518	3.832	4.105	4.773	4.993

Таблица 2

N	$\epsilon = 0$	0.1	0.25	0.5	0.8	0	0.1	0.25	0.5	0.8
	C = 0					C = 0.02				
1	1.841	1.842	1.844	1.851	1.866	1.83	1.834	1.841	1.85	1.865
2	1.841	1.85	1.899	2.112	2.984	1.852	1.857	1.901	2.113	2.984
3	3.054	3.062	3.101	3.223	3.376	3.034	3.041	3.081	3.216	3.376
4	3.054	3.062	3.104	3.293	4.102	3.074	3.082	3.123	3.299	4.103
5	3.832	3.841	3.898	4.19	4.842	3.832	3.841	3.898	4.191	4.84
6	4.201	4.212	4.268	4.479	5.304	4.173	4.184	4.24	4.456	5.305
7	4.201	4.212	4.268	4.495	5.718	4.228	4.239	4.296	4.517	5.718
8	5.318	5.331	5.374	5.568	6.336	5.284	5.297	5.368	5.568	6.334
9	5.318	5.331	5.402	5.682	6.626	5.328	5.337	5.374	5.647	6.627
N	C = 0.2					C = 0.5				
1	1.717	1.721	1.74	1.785	1.824	1.465	1.468	1.484	1.535	1.605
2	1.933	1.938	1.97	2.144	2.989	1.981	1.987	2.021	2.188	2.802
3	2.825	2.832	2.869	3.01	3.274	2.362	2.368	2.398	2.516	2.996
4	3.237	3.245	3.289	3.454	4.136	3.253	3.261	3.304	3.473	3.91
5	3.832	3.841	3.898	4.157	4.669	3.426	3.435	3.482	3.651	4.312
6	3.891	3.901	3.953	4.192	5.366	3.832	3.841	3.898	4.2	5.034
7	4.446	4.458	4.518	4.747	5.722	4.138	4.148	4.203	4.422	5.737
8	4.938	4.95	5.016	5.278	6.131	4.714	4.726	4.791	5.029	5.779
9	5.293	5.306	5.36	5.564	6.67	5.02	5.032	5.099	5.367	6.186

ческого бассейна, которое использовалось как проверочное при тестировании алгоритма, построенного в разд. 2.

В настоящей статье решение (1.8) находилось при помощи алгоритма, изложенного в разд. 2. Рассматривалось фиксированное значение C . Использовалось численное конформное отображение внутренности эллипса на круг. Тогда задача нахождения



Фиг. 1. Влияние наличия вращения на форму мод ($\epsilon = 0.5$): а – стоячий прилив на границе эллипса $\partial\Gamma$, $\varphi \in [0, \pi]$: 1 – при $C = 0$ ($k = 4.19$), 2 – при $C = 0.5$ ($k = 4.2$); б – профиль прилива вдоль большой оси эллипса $x/a \in [-1, 1]$, $y = 0$: 1 – при $C = 0$ ($k = 3.223$), 2 – при $C = 0.5$ ($k = 2.516$)

свободных колебаний вращающегося эллиптического бассейна сводится к решению спектральной задачи (2.3) с условием разрешимости (2.4). Численные расчеты для различных C и ϵ вынесены в табл. 2. Собственные числа показаны в порядке возрастания величины для колебаний при отсутствии вращения бассейна ($C = 0$), для быстрых колебаний ($C = 0.02$), а также для $C = 0.2$ и $C = 0.5$. При увеличении как величины эксцентриситета эллипса, так и параметра C происходит изменение порядка следования мод по отношению к случаю круглого невращающегося бассейна.

Все моды в невращающемся эллиптическом бассейне разобьем на два класса: косинусоидальные волны, описываемые четными функциями Матье, и синусоидальные, описываемые нечетными. Косинусоидальные волны симметричны относительно большой оси эллипса, а синусоидальные – антисимметричны. Все синусоидальные волны имеют узловую линию, совпадающую с большой осью эллипса.

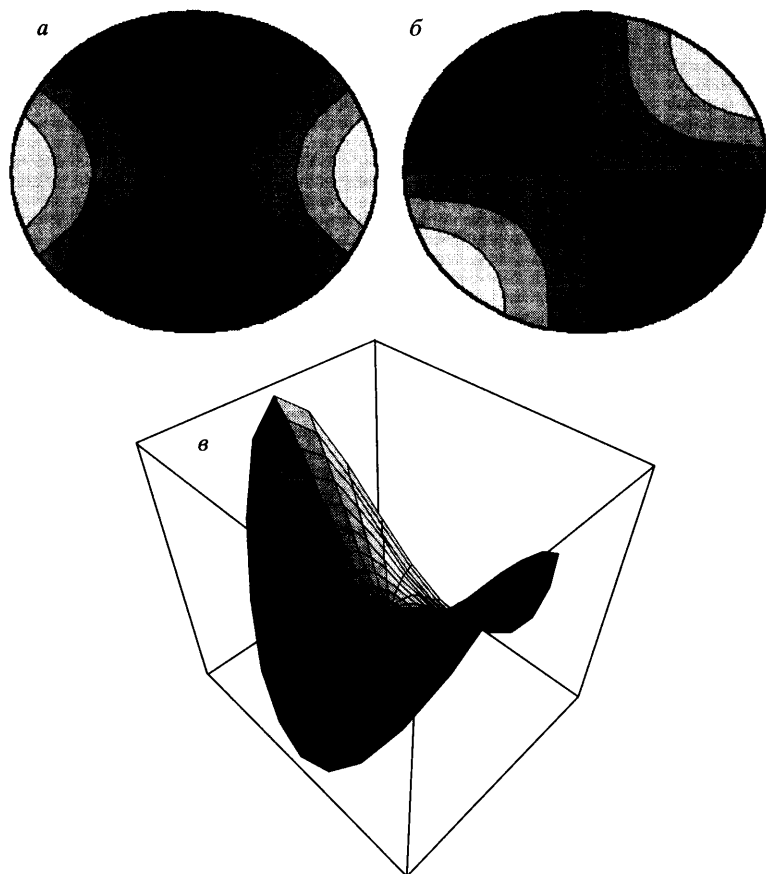
В случае ненулевой угловой скорости вращения бассейна выделим для приливной волны два предельных состояния. Симметричное относительно большой оси состояние назовем косинусоидальной волной $C(x, y)$, а антисимметричное – синусоидальной $S(x, y)$. Эти волны наследуют свойства соответствующих волн невращающегося бассейна, но уже не могут быть представлены функциями Матье. Тогда приливное отклонение ζ в любой момент времени может быть выражено комбинацией этих волн:

$$\zeta(x, y) = C(x, y)\cos\sigma t + S(x, y)\sin\sigma t \quad (4.1)$$

Для нахождения значения прилива в любой момент времени достаточно определить лишь две функции $C(x, y)$ и $S(x, y)$.

На фигурах изображены приливные отклонения ζ поверхности жидкости от формы равновесия. Различие между вращающимися и невращающимися модами показано на фиг. 1. У вращающихся мод больше амплитуда приливной волны. Основные различия между вращающейся и невращающейся модами имеются у границы бассейна, что связано с различием в краевых условиях, и в расположении точки нулевого прилива – у вращающейся моды эти точки расположены ближе к центру бассейна. На основании фигуры можно сделать вывод, что наличие вращения не влияет качественным образом на форму соответствующих мод.

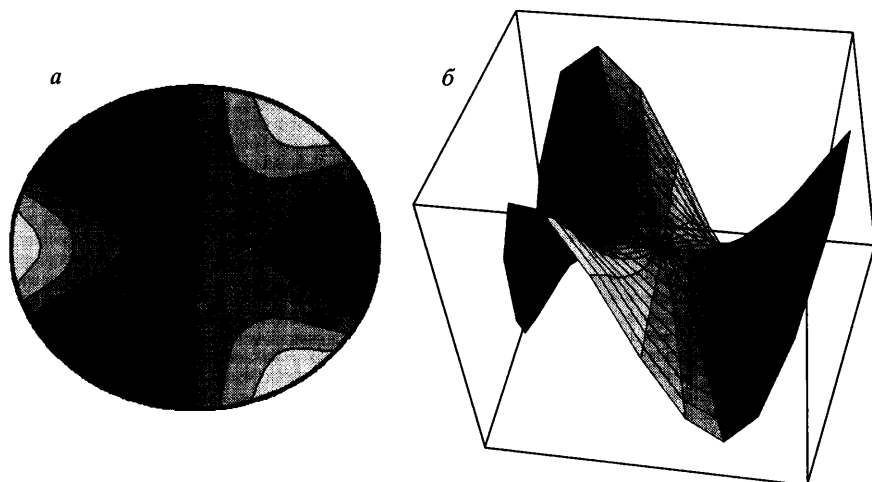
Вращение влияет на эволюцию моды во времени, при этом эволюция зависит от характера собственной формы. На фиг. 2 изображена мода “седло”. У этой моды в



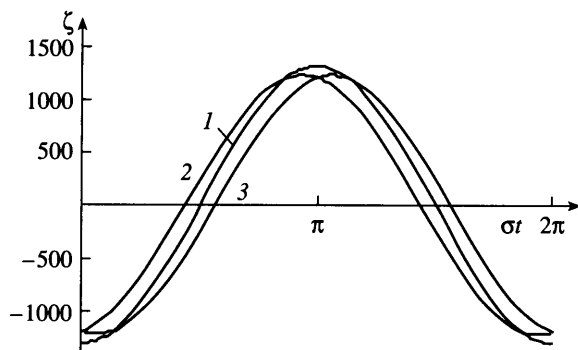
Фиг. 2. Мода “седло” ($k = 2.516$) в эллипсе $\varepsilon = 0.5$ ($C = 0.5$): *a* – контурные карты косинусоидальной (*a*) и синусоидальной (*б*) волн, *в* – косинусоидальная волна в аксонометрической проекции

центре эллипса высота прилива равна нулю только в конкретные моменты времени $t = (2n - 1)\pi/2\sigma$, $n = 1, 2, 3, \dots$, отвечающие состоянию синусоидальной волны. Косинусоидальная волна, контурная карта которой показана на фиг. 2,*a*, имеет две непересекающиеся линии нулевой высоты прилива, которые при $\omega = 0$ представляют гиперболы. Через промежуток времени $\pi/2\sigma$ волна поворачивается и становится синусоидальной (фиг. 2,*б*). В центре эллипса высота прилива становится равной нулю, а линии нулевой высоты прилива образуют крест в центре бассейна, совпадающий с пересекающимися большой и малой осями эллипса. Мода “седло” имеет две амфидромические точки (точки, в которых высота прилива в любой момент времени равна нулю), расположенные на большой оси эллипса.

Все эллиптические моды, прообразы которых в круге имеют нечетное число осей симметрии, имеют в центре бассейна амфидромическую точку. Все эти моды, кроме первой, асимметричны. Иллюстрацией этого может служить мода “тройное седло” (фиг. 3). Сама мода (косинусоидальная волна) изображена на фиг. 3,*б* в аксонометрической проекции. Как косинусоидальная, так и синусоидальная волны имеют три непересекающиеся линии нулевой высоты прилива – одну прямую, совпадающую с ма-



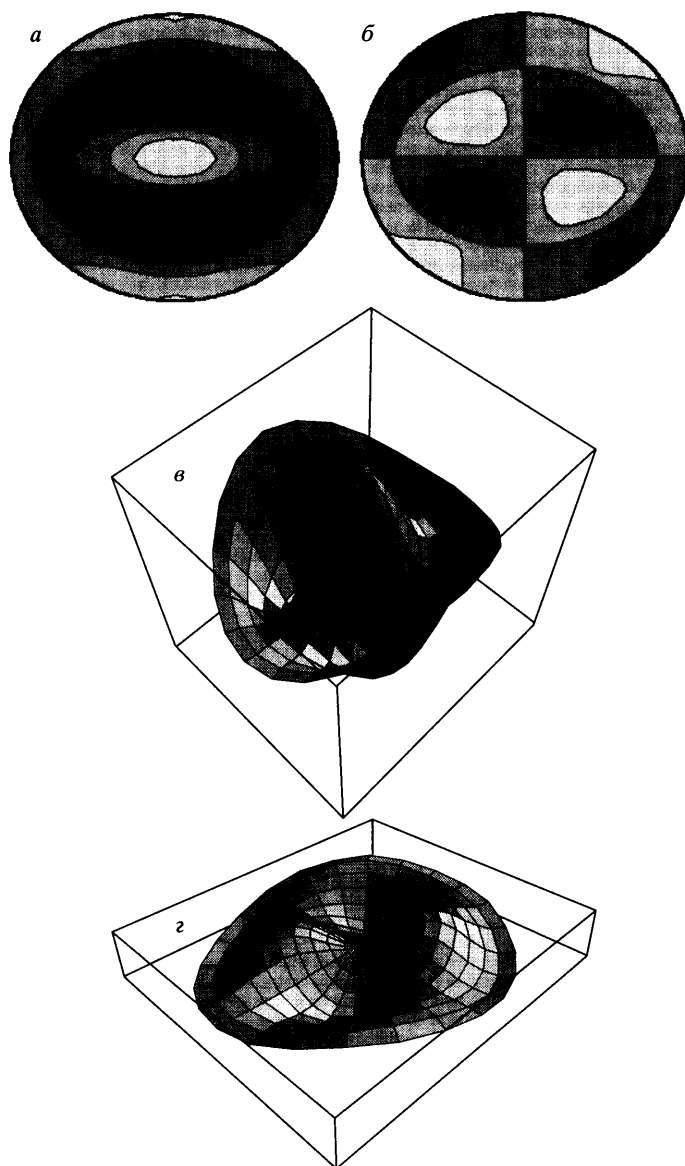
Фиг. 3. Мода “тройное седло” ($k = 3.473$) в эллипсе $\epsilon = 0.5$ ($C = 0.5$): *a* – контурная карта косинусоидальной волны; *б* – косинусоидальная волна в аксонометрической проекции



Фиг. 4. Асимметрия моды “тройное седло” ($k = 3.473$) в эллипсе $\epsilon = 0.5$ ($C = 0.5$) – колебания высоты прилива в точках границы эллипса $\partial\Gamma$: *1* – $\varphi = 0$, *2* – $\varphi = 2\pi/3$, *3* – $\varphi = 4\pi/3$

лой осью эллипса для косинусоидальной волны (для синусоидальной волны – с большой осью эллипса), и две кривые, сходные с гиперболами. На фиг. 4 изображены колебания высоты прилива в точках на границе бассейна, расположенных через равные углы $2\pi/3$. Видно, что колебания высоты прилива в этих точках асинхронны – мода асимметрична. В круглом бассейне для прообраза этой моды колебания в этих точках синхронны. Мода “тройное седло” имеет пять амфидромических точек, одна из них совпадает с центром бассейна.

Наиболее существенные изменения относительно случая круглого бассейна среди первых мод претерпевает стоячая волна [12]. В [12] рассматривалась только первая стоячая мода. Для второй стоячей моды изменения оказываются еще значительнее (фиг. 5). Прообраз этой моды в круглом бассейне имеет круговую симметрию, которая утрачивается в эллиптическом. Построенная мода имеет восемь амфидромичес-



Фиг. 5. Вторая стоячая волна ($k = 7.84$) в эллипсе $\varepsilon = 0.5$ ($C = 0.5$): контурные карты косинусоидальной (а) и синусоидальной волна (б); косинусоидальной (в) и синусоидальной волн (г) в аксонометрической проекции

ких точек. В эллиптическом случае косинусоидальная мода (фиг. 5,в) имеет две седловые точки, расположенные на большой оси эллипса, и две замкнутые линии нулевой высоты прилива, имеющие общий центр симметрии, совпадающий с центром бассейна (в невращающемся бассейне эти линии являются софокусными эллипсами).

При наличии вращения в отличие от кругового бассейна для второй стоячей волны не существует момента времени, когда высота прилива всюду равна нулю. На фиг. 5,г

показан момент наименьшей высоты прилива, соответствующий случаю всюду нулевого прилива в невращающемся бассейне. Здесь имеется только одна седловая точка – в центре бассейна. В этом положении мода имеет три линии нулевой высоты прилива – одну замкнутую и две пересекающиеся, совпадающие с большой и малой осями эллипса.

При переходе из косинусоидального состояния волны (фиг. 5,а) в синусоидальное в некоторый момент времени внешняя (ближняя к границе) линия нулевого прилива размыкается и превращается в две незамкнутые линии, каждая из которых проходит через две амфидромические точки. При последующей эволюции во времени эти линии сближаются, пересекают внутреннюю замкнутую линию нулевого прилива и в синусоидальном состоянии (фиг. 5,б) касаются друг друга в центре бассейна, образуя прямой крест. При этом следует обратить внимание, что за промежуток времени $\pi/2\sigma$ мода повернулась на некоторый угол, следовательно, стоячая мода стала движущейся.

Заключение. С помощью построенного метода решение спектральной задачи может быть найдено как для задачи Неймана (большинство случаев, рассмотренных в научной литературе), так и для задачи с косой производной, что соответствует распространению приливных волн при условии ненулевой угловой скорости вращения бассейна. Можно выделить два крайних состояния приливной моды – косинусоидальную волну, симметричную относительно большей оси эллипса, и синусоидальную волну, антисимметричную относительно этой же оси. Для вращающегося бассейна приливная мода в любой момент времени представляет некоторую известную комбинацию этих волн. Эллиптические моды, прообразы которых в круглом бассейне имеют нечетное и притом большее двух число осей симметрии, асимметричны. Вращение бассейна увеличивает амплитуду приливного колебания. Во вращающихся эллиптических бассейнах не существует стоячих приливных мод.

Автор выражает свою благодарность С.В. Нестерову за поддержку работы и С.Д. Алгазину – за предоставленные материалы. Автор также благодарит А.А. Бармина, высказавшего замечания, которые позволили улучшить изложение результатов работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сретенский Л.Н.* Динамическая теория приливов. М.: Наука, 1987. 472 с.
2. *Ламб Г.* Гидродинамика. Т. 1. Москва–Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2003. 452 с.
3. *Proudman J.* On the tides in a flat semi-circular sea of uniform depth // *Mont. Not. Roy. Astr. Soc. Geoph. Suppl.* 1928. V. 2. P. 32–43.
4. *Proudman J.* On some cases of tidal motion of rotating sheets of water // *Proc. L. Math. Soc.* (2). 1913. V. 12. P. 453–473.
5. *Jeffreys H.* On certain approximate solutions of linear differential equations on the second order // *Proc. L. Math. Soc.* (2). 1924. V. 23. P. 428–436.
6. *Jeffreys H.* On certain solutions of Mathieu’s equation // *Proc. L. Math. Soc.* (2). 1924. V. 23. P. 437–448.
7. *Jeffreys H.* The free oscillations of water in an elliptical lake // *Proc. L. Math. Soc.* (2). 1924. V. 23. P. 455–476.
8. *Goldstein S.* A note on certain approximate solutions of linear differential equation of second order with an application to the Mathieu equation // *Proc. L. Math. Soc.* (2). 1928. V. 28. P. 81–90.
9. *Goldstein S.* The free oscillations of water in a canal of elliptic plan // *Proc. L. Math. Soc.* (2). 1928. V. 28. P. 91–101.
10. *Goldstein S.* A special case of tidal motion in elliptic basins // *Mont. Not. Roy. Astr. Soc. Geoph. Suppl.* 1928. V. 2. P. 44–56.
11. *Goldstein S.* Tidal motion in a rotating elliptic basins of constant depth // *Mont. Not. Roy. Astr. Soc. Geoph. Suppl.* 1929. V. 2. P. 213–231.

12. Акуленко Л.Д., Кумакишев С.А., Нестеров С.В. Собственные колебания тяжелой жидкости в эллиптическом бассейне // Изв. РАН. МЖГ. 2001. № 4. С. 129–142.
13. Бабенко К.И. Основы численного анализа. М.: Наука, 1986. 744 с.
14. Алгазин С.Д. Численные алгоритмы без насыщения в классических задачах математической физики. М.: Научный мир, 2002. 155 с.
15. Бабенко К.И., Алгазин С.Д. Об одном численном алгоритме решения задачи на собственные значения для линейных дифференциальных операторов. Препринт № 46. М.: ИПМ АН СССР им. М.В. Келдыша. 1978. 80 с.
16. Алгазин С.Д. Численные алгоритмы классической матфизики. I. Спектральные задачи для уравнения Лапласа. Препринт № 671. М.: ИПМ РАН. 2000. 39 с.

Москва

Поступила в редакцию
14.1.2004