

© 2004 г. А. Т. ИЛЬЧЕВ, А. С. САВИН

О ХАРАКТЕРЕ ПРОЦЕССА УСТАНОВЛЕНИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН В ПЛОСКОМ ПОТОКЕ

Описан механизм установления поверхностных волн малой амплитуды над источником возмущений, мгновенно начинающим равномерное и прямолинейное движение в толще изначально невозмущенной жидкости параллельно ее свободной границе. В качестве источников возмущений рассмотрены точечные гидродинамические особенности произвольных порядков.

Ключевые слова: обтекание гидродинамической особенности, решение Келдыша, установление нестационарного режима.

Классические решения задач генерации волн малой амплитуды на поверхности плоского равномерного потока идеальной несжимаемой жидкости, обтекающей точечные гидродинамические особенности, моделирующие различные тела, были получены в предположении существования установившегося стационарного режима течения [1, 2]. Обоснование физической корректности такого предположения предложено в [3], где найден предел в бесконечном будущем решения задачи о возмущении свободной границы потока гидродинамической особенностью, возникающей в изначально покоящейся жидкости и начинающей в ней равномерное и прямолинейное движение по горизонтали. В системе отсчета, связанной с гидродинамической особенностью, этот предел имеет вид классических решений [1, 2]. Однако такой предельный переход был осуществлен формально с помощью аппарата теории обобщенных функций и не позволил описать в деталях сам процесс установления поверхностной волны над движущейся гидродинамической особенностью. Изучение характера установления поверхностных волн имеет важное значение для понимания сути рассматриваемого явления и динамики сходных с ним процессов установления.

1. Общие выражения для профиля свободной поверхности жидкости, возмущаемой горизонтально движущейся гидродинамической особенностью. Если в момент времени $t = 0$ в неподвижной жидкости на глубине h возникает точечная гидродинамическая особенность порядка n постоянной интенсивности C , которая начинает двигаться параллельно невозмущенной свободной границе $y = 0$ с постоянной скоростью $-V$, то в системе координат, сопровождающей особенность по оси x , профиль свободной поверхности имеет вид [3]

$$S(x, t) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{2(\delta_{0n} - n)C}{i^n n! V} \int_0^\infty \lambda^n e^{(ix-h)\lambda} \int_{-Vt}^0 e^{i\lambda\xi} \cos(\xi\sqrt{v}\lambda) d\xi d\lambda \right\} \quad (1.1)$$

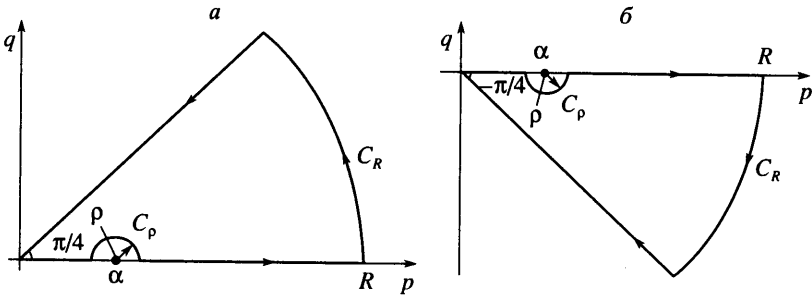
где $v = g/V^2$, g – ускорение свободного падения.

Вычислив внутренний интеграл, приведем выражение (1.1) к виду

$$S(x, t) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{2(\delta_{0n} - n)C}{i^n n! V} [J + i(K_+ + K_-)] \right\} \quad (1.2)$$

$$J = -i \int_0^\infty \frac{\lambda^n \exp[(ix-h)\lambda]}{\lambda - v} d\lambda, \quad K_\pm = \int_0^\infty \frac{p^{2n}}{p \pm \alpha} \exp[(il-h)p^2 \mp i\alpha Vtp] dp$$

$$p = \sqrt{\lambda}, \quad \alpha = \sqrt{v}, \quad l = x - Vt$$



Фиг. 1. Контурсы интегрирования $l > 0$ (а), $l < 0$ (б)

Выражение (1.2) для формы свободной поверхности жидкости содержит сингулярные интегралы K_{\pm} и J , которые следует понимать в смысле главного значения. Преобразуем эти интегралы к регулярным при помощи контурного интегрирования. Перейдем в подынтегральном выражении для K_{\pm} в формуле (1.2) от действительной переменной p к комплексной переменной $\mu = p + iq$ и проинтегрируем его, в случае $l > 0$, по контуру, изображенному на фиг. 1, а в случае $l < 0$ – по контуру, изображенному на фиг. 1, б.

Очевидно, что на части действительной оси, состоящей из отрезков $[0, \alpha - \rho]$ и $[\alpha + \rho, R]$, интегралы от функций комплексной переменной μ

$$L_{\pm} = \int \frac{\mu^{2n}}{\mu \pm \alpha} \exp[(il - h)\mu^2 \mp i\alpha Vt\mu] d\mu \quad (1.3)$$

совпадают при $\rho \rightarrow +0, R \rightarrow +\infty$ с соответствующими интегралами в (1.2).

Оценим значения интегралов (1.3) на дугах окружностей C_R . Положив $\mu = Re^{i\varphi}$, найдем вещественную часть показателя экспоненты в подынтегральном выражении (1.3) в виде

$$-u(\varphi)R^2 \pm \alpha VtR \sin \varphi, \quad u(\varphi) = l \sin 2\varphi + h \cos 2\varphi \quad (1.4)$$

Нетрудно показать, что в случае $l > 0$ ($0 \leq \varphi \leq \pi/4$) величина $u(\varphi)$ достигает своего положительного минимума на одном из концов отрезка $[0, \pi/4]$, а в случае $l < 0$ ($-\pi/4 \leq \varphi \leq 0$) – на одном из концов отрезка $[-\pi/4, 0]$. Таким образом, в обоих случаях

$$0 < m = \min(h, |l|) \leq u(\varphi) \quad (1.5)$$

С учетом выражений (1.4), (1.5) и неравенства

$$|R - \alpha| \leq |Re^{i\varphi} \pm \alpha|$$

получаем оценку для модулей интегралов (1.3), взятых по дугам окружностей C_R , как в случае $l > 0$, так и при $l < 0$:

$$|L_{\pm}| \leq \frac{\pi R^{2n+1}}{4|R - \alpha|} \exp\{-mR^2 + (\alpha Vt)R\}$$

Из этой оценки следует, что на $C_R |L_{\pm}| \rightarrow 0$ при $R \rightarrow +\infty$. В силу равенства нулю интегралов (1.3), взятых по замкнутым контурам (фиг. 1), получаем для интегралов K_{\pm} в (1.2) выражения $l > 0$:

$$K_{+} = \frac{\sqrt{2}}{2} \exp\left[i\left(\frac{2n+1}{4}\right)\pi\right] \int_0^{\infty} \frac{r^{2n}(r + \alpha\sqrt{2} - ir)}{r^2 + \sqrt{2}\alpha r + \alpha^2} \exp\left\{-lr^2 + \frac{\alpha Vt}{\sqrt{2}}r - i\left(hr^2 + \frac{\alpha Vt}{\sqrt{2}}r\right)\right\} dr$$

$$K_- = \frac{\sqrt{2}}{2} \exp\left[i\left(\frac{2n+1}{4}\right)\pi\right] \int_0^\infty \frac{r^{2n}(r - \alpha\sqrt{2} - ir)}{r^2 - \sqrt{2}\alpha r + \alpha^2} \exp\left\{-lr^2 - \frac{\alpha Vt}{\sqrt{2}}r - i\left(hr^2 - \frac{\alpha Vt}{\sqrt{2}}r\right)\right\} dr +$$

$$+ i\pi\alpha^{2n} \exp[(ix - h)\alpha^2]$$

$l < 0$

$$K_+ = \frac{\sqrt{2}}{2} \exp\left[-i\left(\frac{2n+1}{4}\right)\pi\right] \int_0^\infty \frac{r^{2n}(r + \alpha\sqrt{2} + ir)}{r^2 + \sqrt{2}\alpha r + \alpha^2} \exp\left\{lr^2 - \frac{\alpha Vt}{\sqrt{2}}r + i\left(hr^2 - \frac{\alpha Vt}{\sqrt{2}}r\right)\right\} dr$$

$$K_- = \frac{\sqrt{2}}{2} \exp\left[-i\left(\frac{2n+1}{4}\right)\pi\right] \int_0^\infty \frac{r^{2n}(r - \alpha\sqrt{2} + ir)}{r^2 - \sqrt{2}\alpha r + \alpha^2} \exp\left\{lr^2 + \frac{\alpha Vt}{\sqrt{2}}r + i\left(hr^2 + \frac{\alpha Vt}{\sqrt{2}}r\right)\right\} dr -$$

$$- i\pi\alpha^{2n} \exp[(ix - h)\alpha^2]$$

Таким образом, формула (1.2) для профиля поверхностной волны имеет вид (после перехода к безразмерным переменным $r = \alpha s$)

$$S(x, t) = S_0(x) + S_1(x, t)$$

$$S_0 = \operatorname{Re}\left\{\frac{2(\delta_{0n} - n)C}{i^n n! V} (J - \sigma\pi v^n \exp[(ix - h)v])\right\} \tag{1.6}$$

$$S_1(x, t) = \operatorname{Re}\left\{\frac{2(\delta_{0n} - n)C}{i^{n-1} n! V} (I_+ + I_-) \exp\left[i\sigma\left(\frac{2n+1}{4}\right)\pi\right]\right\}$$

$$I_\pm = \frac{\sqrt{2}}{2} v^n \int_0^\infty \frac{s^{2n} [(1 - i\sigma)s \pm \sqrt{2}]}{s^2 \pm \sqrt{2}s + 1} \exp\left[-\sigma(lv + ihv)s^2 \pm \frac{\sigma - i}{\sqrt{2}} v Vts\right] ds$$

$$\sigma = \operatorname{sign} l$$

Аналогичным образом можно показать, что интеграл J в (1.2), (1.6) представляется в виде

$$J = \gamma\pi v^n \exp[(ix - h)v] - i^{n+1} (\gamma v)^n \int_0^\infty \frac{s^n (s - i\gamma) \exp[-\gamma(x + ih)vs]}{s^2 + 1} ds \tag{1.7}$$

$$\gamma = \operatorname{sign} x$$

Легко заметить, что

$$J \rightarrow \gamma\pi v^n \exp[(ix - h)v] + O\left(\frac{1}{vx}\right) \tag{1.8}$$

при $|x| \rightarrow \infty$, т.е. интеграл в выражении (1.7) стремится к нулю при увеличении абсолютного значения пространственной переменной x .

Из выражений для интегралов в (1.6), (1.7) видно, что явления распространения возмущений от движущегося источника при различных глубинах погружения и различных скоростях источника подобны при совпадении чисел Фруда

$$Fr = (vh)^{-1/2} = \frac{V}{\sqrt{gh}}$$

При этом формы поверхности, соответствующие различным глубинам погружения источников и различным скоростям их движения, получаются простым пересчетом на пространственных и временных масштабах, определяемых равенством величин $v\lambda$ и vVt , для этих двух процессов. Этими тремя величинами исчерпываются свободные параметры в безразмерных выражениях, определяющих форму поверхности в формулах (1.6), (1.7).

2. Развитие возмущений свободной поверхности жидкости. Для того чтобы описать установление профиля свободной поверхности жидкости и его выход на стационарный режим, рассмотрим асимптотическое поведение функции $S(x, t)$ (1.6) при больших временах. Рассмотрение будем проводить в двух различных областях $l < 0$ и $l > 0$ ($l = x - Vt$) на плоскости x, t . Асимптотика интегралов I_{\pm} , входящих в выражения (1.6) для формы поверхности $S(x, t)$, оценивается при помощи метода перевала.

В случае $l < 0$ будем рассматривать интегралы I_{\pm} при фиксированном значении x , тогда их асимптотическое поведение при $t \rightarrow \infty$ определяется критическими точками аналитической функции $f(s)$

$$f(s) = \sigma s^2 \pm \frac{\sigma - i}{\sqrt{2}} s$$

которая является множителем при vVt в показателе экспоненты в подынтегральном выражении (1.6).

Для интеграла I_- точка

$$A \left\{ s_0 = \frac{1+i}{2\sqrt{2}} \right\}$$

является точкой перевала поверхности $\Sigma \{w|w = \text{Re}f(s)\}$; контуром наиболее быстрого спуска $\text{Im}f(s) = \text{const}$, проходящим через точку перевала, является прямая параллельная вещественной оси, линии нулевого уровня поверхности Σ задаются уравнением

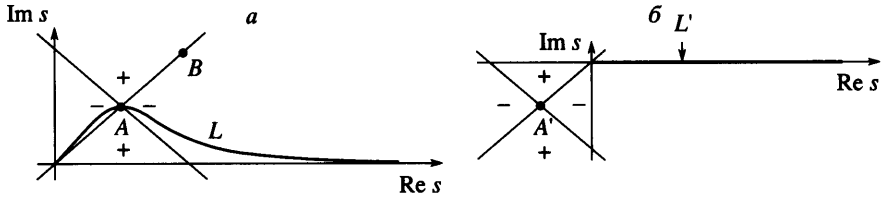
$$\text{Im}s = \frac{1}{2\sqrt{2}} \pm \sqrt{\frac{1}{8} + (\text{Re}s)^2} - \frac{\text{Re}s}{\sqrt{2}}$$

Продеформируем контур интегрирования в I_- , совпадающий с положительной вещественной полуосью, в контур L , лежащий в области аналитичности подынтегральной функции, проходящий через точку перевала A и лежащий в "долине" поверхности Σ , где $\text{Re}f < 0$, так что точка $B \{s = (1+i)/\sqrt{2}\}$, где у подынтегральной функции имеется простой полюс, остается сверху от контура L (фиг. 2, а). Тогда основной вклад в асимптотику I_- при $t \rightarrow \infty$ ожидается от точки перевала A и от начала координат, где контур L пересекает линию уровня $\text{Re}f(s) = 0$. Однако если в точке перевала A старший член асимптотики пропорционален $1/\sqrt{t}$, то в начале координат, которое является концевой точкой контура L — только $1/t$ (см., например, [4]), поэтому основной вклад в асимптотику дается точкой перевала, и эта асимптотика имеет вид

$$I_- = -\frac{2}{\sqrt{vVt}} \left(\frac{v}{4}\right)^n \exp \left[\frac{i\pi n}{2} + \frac{iV}{4}(x + Vt) - \frac{hV}{4} \right] + O\left(\frac{1}{vVt}\right) \quad (2.1)$$

Для интеграла I_+ точкой перевала поверхности Σ является точка

$$A' \left\{ s_0 = -\frac{1+i}{2\sqrt{2}} \right\}$$



Фиг. 2. Контуры интегрирования L и L' для подсчета асимптотики интегралов $I_-(a)$, $I_+(b)$ в случае $x - Vt < 0$. A и A' – точки перевала, B – полюс подынтегрального выражения в I_- . Знаком “-” отмечены долины $\text{Re}f(s) < 0$ гиперповерхности $w = \text{Re}f(s)$, а знаком “+” – возвышения $\text{Re}f(s) > 0$

лежащая во втором квадранте комплексной плоскости s ; линии нулевого уровня поверхности Σ задаются уравнением

$$\text{Im} s = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \pm \sqrt{\frac{1}{8} + (\text{Re} s)^2 + \frac{\text{Re} s}{\sqrt{2}}}$$

В этом случае контур интегрирования L' в I_+ совпадает с положительной вещественной полуосью, которая лежит в “долине” поверхности Σ , где $\text{Re}f < 0$ (фиг. 2, б), и основной вклад в асимптотику I_+ при $t \rightarrow \infty$ дается концевой точкой контура – началом координат, и этот вклад пропорционален $1/t$.

Таким образом, при $l < 0$ асимптотика при больших t функции $S(x, t)$, описывающей эволюцию формы поверхности жидкости, имеет вид

$$S(x, t) = \text{Re} \left\{ \frac{2(\delta_{0n} - n)C}{i^n n! V} \left(-i^{n+1} (-v)^n \int_0^\infty \frac{s^n (s+i) e^{(xv+ihv)s}}{s^2+1} ds \right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{vVt}}\right) \right\}, \quad x < 0$$

$$S(x, t) = \text{Re} \left\{ \frac{2(\delta_{0n} - n)C}{i^n n! V} \times \right. \tag{2.2}$$

$$\left. \times \left(2\pi v^n e^{(ix-h)v} - i^{n+1} v^n \int_0^\infty \frac{s^n (s-i) e^{-(xv+ihv)s}}{s^2+1} ds \right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{vVt}}\right) \right\}, \quad x > 0$$

Интегралы в (2.2) убывают до нуля при возрастании абсолютной величины пространственной переменной, а при больших x таких, что $x < Vt$, форма свободной поверхности жидкости в системе отсчета, связанной с источником возмущений, приближается с течением времени к стоячей периодической волне с волновым числом v и при $x \rightarrow -\infty$ стремится к нулю в любой фиксированный момент времени t .

В случае $l > 0$ ($x > Vt$) будем рассматривать асимптотику интегралов в (1.6) при больших временах на лучах $x = V_0 t$, $V_0 > V$. Подынтегральное выражение интеграла I_+ в рассматриваемом случае имеет полюсы в точках $(-1 \pm i)/\sqrt{2}$, лежащие в левой полуплоскости комплексного переменного s . Правая полуплоскость, таким образом, является областью аналитичности подынтегрального выражения, и контур интегрирования – положительную вещественную полуось – можно деформировать в контур S , проходящий через точку перевала

$$s_0 = \frac{1-i}{2\sqrt{2}W}, \quad W = \frac{\Delta V}{V}, \quad \Delta V = V_0 - V$$

лежащую в четвертом квадранте. Аналогично вычислению асимптотики интеграла I_- для случая $l < 0$ в качестве контура S выберем контур, лежащий в долине $w < 0$ поверхности $w = \text{Ref}(s)$

$$f(s) = -\Delta V s^2 + \frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

Линии нулевого уровня $\text{Ref}(s) = 0$, проходящие через точку перевала s_0 , имеют вид, аналогичный изображенным на фиг. 2, и задаются уравнениями

$$\text{Im}s = -\frac{1}{2\sqrt{2}W} \pm \sqrt{\frac{1}{8W^2} + (\text{Res})^2 - \frac{\text{Res}}{\sqrt{2}W}}$$

Как и в предыдущих случаях, вклад от начала координат, лежащего на перевале, пропорционален $O(1/t)$ при $t \rightarrow \infty$, в то время как вклад от точки перевала пропорционален $O(1/\sqrt{t})$. Окончательно, асимптотика I_+ при $t \rightarrow \infty$ имеет вид

$$I_+ = -4\left(\frac{v}{4}\right)^n \frac{\sqrt{\pi}}{W^{2n-1}(W+1/2)} \exp\left(-i\frac{\pi n}{2} - \frac{3}{4}i v V t - \frac{h v}{4W^2}\right) \frac{1}{\sqrt{v\Delta V t}} + O\left(\frac{1}{v\Delta V t}\right)$$

Интегрирование в интеграле I_- осуществляется по положительной вещественной полуоси, которая лежит в долине $\text{Ref}(s) < 0$ поверхности $w = \text{Ref}(s)$, $f = -\Delta V s^2 - (1-i)\sqrt{2}Vs$. Линии уровня $\text{Ref} = 0$, проходящие через точку перевала $s_0 = -(1-i)/2\sqrt{2}W$, задаются уравнениями

$$\text{Im}s = \frac{1}{2\sqrt{2}W} \pm \sqrt{\frac{1}{8W^2} + (\text{Res})^2 + \frac{\text{Res}}{W\sqrt{2}}}$$

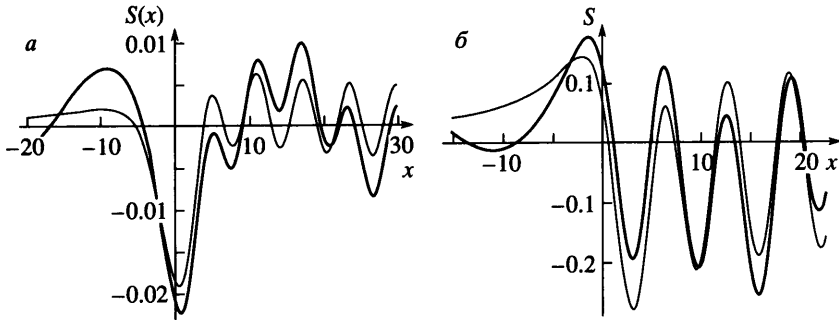
Главный вклад в интеграл I_- при $t \rightarrow \infty$ дает точка $s = 0$, которая находится на линии уровня $\text{Ref} = 0$; он имеет порядок $O(1/t)$.

Таким образом, для $x > Vt$ из (1.6) с учетом (1.8) имеем на лучах $x = V_0 t$, $V_0 > V$

$$S(x, t) = O(1/\sqrt{v\Delta V t}), \quad t \rightarrow \infty \quad (2.3)$$

Для умеренных времен форма свободной поверхности жидкости определялась при помощи численного счета интегралов в (1.6). Расчеты велись для диполя и источника. В случае диполя, моделирующего безотрывное обтекание цилиндра, $C = VR^2$, где R – радиус цилиндра. Для источника, моделирующего обтекание затупленного полубесконечного тела, $C = Q/(2\pi V)$, $Q = 2VH$, где H – асимптотическая полутолщина тела. Данные расчетов для $h = 6.6$ м, $V = 3.133$ м/с, $R = 0.5$ м, $t = 100$ с для диполя и $h = 3.3$ м, $V = 3.133$ м/с, $H = 1$ м, $t = 50$ с для источника представлены на фиг. 3, а, б.

3. Обсуждение. Характер установления профиля свободной поверхности жидкости над источником возмущений, начинающим свое движение в бесконечно глубокой идеальной несжимаемой жидкости, определяется формулами (2.2) и (2.3). Установление профиля свободной поверхности происходит следующим образом. После начала движения источника возмущений возникают две волны, распространяющиеся в системе отсчета, связанной с источником, со скоростями $V_{1,2}(k) = V + d\omega_{1,2}/dk$, $V_1 > V_2$, где $\omega_{1,2} = \pm\sqrt{gk}$ – частоты нормальных мод. Волна, распространяющаяся со скоростью $V_1(k) > V$, убегает вправо и в соответствии с (2.3) затухает, подвергаясь дисперсионному расплыванию. Волна, имеющая меньшую скорость, с течением времени трансформируется в сво-



Фиг. 3. Форма поверхности от движущегося источника возмущений (жирные линии) и стационарные профили (тонкие линии): а – диполь, $h = 6.6$ м, $V = 3.133$ м/с, $R = 0.5$ м, $t = 100$ с; б – источник, $h = 3.3$ м, $V = 3.133$ м/с, $H = 1$ м, $t = 50$ с

бодную волну с волновым числом ν , скорость распространения которой в движущейся системе отсчета

$$V_2(\nu) = V + \left. \frac{d\omega_2}{dk} \right|_{k=\nu} = V - \frac{1}{2} \frac{g}{\sqrt{\nu}} = \frac{V}{2} < V$$

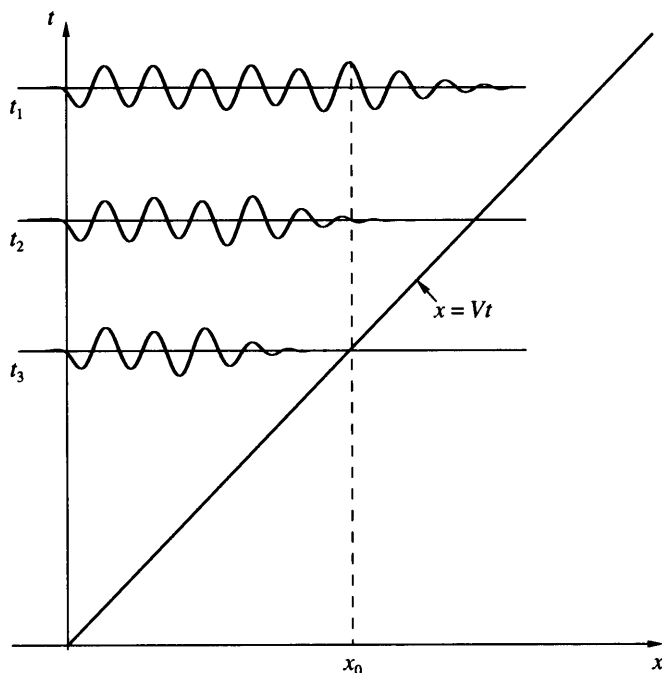
При $x < Vt$ форма поверхности поточечно стремится к стационарному профилю поверхности, найденному в [2]. Иными словами, для любого $\epsilon > 0$ и любого x_0 существует $T(x_0)$, такое, что для любого $t > T(x_0)$, $|S(x_0) - S_0(x_0)| < \epsilon$. Кроме того, в соответствии с (2.2) это верно для любого $|x| < |x_0|$. Возмущения стационарного профиля для фиксированного x затухают, как $O(1/\sqrt{\nu Vt})$.

Таким образом, процесс установления профиля свободной поверхности жидкости для достаточно больших t в системе отсчета, движущейся вместе с источником возмущений, представляет собой эволюцию волны, занимающей область пространства, расширяющуюся вправо (при движении источника влево) со скоростью, близкой к $V/2$ (фиг. 4). Внутри этой области происходит установление стационарного профиля Келдыша [2], а в области $x > Vt$ возмущения затухают при $x \rightarrow \infty$. В системе отсчета неподвижного наблюдателя возмущение от источника, стартующего из начала координат и стремящегося к решению Келдыша, занимает расширяющуюся область между источником и началом координат, и затухает справа от него.

Параметры источника, возмущающего поверхность, профиль которой изображен на фиг. 3, а, и сама форма поверхности могут быть пересчитаны вследствие указанного в разд. 1 подобия на параметры и форму поверхности, соответствующие другим режимам движения источника того же типа. Так, если отправляться от данных одного из экспериментов по определению формы свободной поверхности жидкости над движущимся цилиндром, представленных в [5]: $h' = 66$ мм, $V' = 345$ мм/с, $R' = 6$ мм, получим в дипольном приближении (напомним, что для режимов, представленных на фиг. 3, а, б, $\nu = 1 \text{ м}^{-1}$):

$$\nu' = \frac{g}{V'^2} = 82.5 \text{ м}^{-1}, \quad t' = \frac{VtV'}{V'V'} = 11 \text{ с}, \quad x' = \frac{xV'}{V}, \quad S'(x') = \frac{\nu R'^2}{\nu' R'^2} S(x)$$

Таким образом, по фиг. 3, а можно полностью судить также и о форме поверхности, соответствующей данным эксперимента, через 11 с после начала движения диполя.



Фиг. 4. Схема развития профиля поверхности от источника возмущений при больших t ; $t_1 > t_2 > t_3$. Установление стационарного профиля в контрольной точке x_0

Аналогичным образом может быть произведен пересчет на масштабы эксперимента для данных фиг. 3, б.

Описанный режим установления тем более соответствует действительности, чем с большим основанием можно пренебречь вязкими эффектами. Это пренебрежение справедливо для явлений больших масштабов. С другой стороны, лабораторные эксперименты [5–7] показывают, что при удалении от источника установившийся профиль свободной поверхности жидкости подвергается быстрому затуханию вниз по потоку. Это обстоятельство объясняется влиянием вязких поверхностных эффектов, которые значительны на малых масштабах эксперимента. Учет этих эффектов – самостоятельная задача, ожидающая своего решения.

Заключение. В статье установлен характер стремления возмущений свободной поверхности плоского потока идеальной несжимаемой жидкости бесконечной глубины, возникающих в результате движения гидродинамической особенности произвольного порядка в толще жидкости, к стационарному профилю, описываемому формулой Келдыша [2].

Авторы выражают благодарность А.А. Бармину и А.Г. Куликовскому за полезные обсуждения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 02-01-00481) и гранта ведущих научных школ НШ-1697.2003.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ламб Г. Гидродинамика. М.; Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
2. Келдыш М.В. Замечания о некоторых движениях тяжелой жидкости // М.В. Келдыш. Избр. тр. Механика. М.: Наука, 1985. С. 100–103.

3. *Савин А.С.* Установление поверхностных волн, вызываемых гидродинамическими особенностями в плоском потоке // Изв. РАН. МЖГ. 2002. № 3. С. 78–81.
4. *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ. Ч. 1. М.: Наука, 1985. 336 с.
5. *Бояринцев В.И., Леднев А.К., Прудников А.С., Савин А.С., Савина Е.О.* Моделирование и экспериментальное исследование возмущений свободной границы плоского потока погруженными источниками. Препринт № 720. М.: ИПМех РАН, 2002. 36 с.
6. *Нестеров С.В., Бояринцев В.И., Леднев А.К., Савин А.С., Савина Е.О.* Возмущение свободной поверхности жидкости погруженными источниками // Тр. конф. “Развитие идей Н.Е. Кочина в математике и механике”, М.: ИМП РАН, 2001. С. 60–67.
7. *Долина И.С., Ермаков С.А., Пелиновский Е.Н.* Смещение свободной поверхности жидкости при обтекании цилиндра // ПМТФ. 1988. № 4. С. 48–51.

Москва

Поступила в редакцию
16.XII.2003