

УДК 532.526.013.4:533.6.011.5

© 2004 г. С. В. ДУБИНСКИЙ, И. И. ЛИПАТОВ

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЗМУЩЕНИЙ В ПОГРАНИЧНЫХ СЛОЯХ ВО ВНУТРЕННИХ ТЕЧЕНИЯХ

Исследованы нестационарные процессы взаимодействия течения в пограничных слоях на стенках плоских каналов с вязким сверхзвуковым течением. Рассмотрены такие режимы течения, для которых возмущения, вносимые пограничным слоем на одной стенке, влияют на течение в пограничном слое на другой стенке. Изучен режим относительно больших амплитуд возмущений давления, инициируемых в области среза сопла или под влиянием деформации поверхности канала. В этих условиях процессы взаимодействия описываются системой уравнений Бюргерса с запаздывающими аргументами. Получены численные решения этой системы уравнений для симметричных и антисимметричных изменений формы поверхности канала.

Ключевые слова: течение в канале, вязко-невязкое взаимодействие, асимптотический анализ, модели.

Проблема распространения и развития возмущений в каналах кроме академического интереса имеет, несомненно, и прикладное значение. В экспериментальных исследованиях из-за малой относительной толщины пограничного слоя на стенках аэродинамических труб влияние вязкости обычно не учитывается. В то же время наличие пограничного слоя создает возможность распространения возмущений вверх по потоку, даже если невязкое течение сверхзвуковое.

Отмеченные эффекты принципиально важны также для течений в перспективных воздушно-реактивных двигателях. В частности, распространение возмущений по пограничным слоям может влиять на возникновение нерасчетных режимов, связанных с образованием псевдоскачка.

Распространение возмущений вверх по потоку в сверхзвуковых течениях исследуется с начала 50-х годов. В [1] предложена линейная модель невязкого течения, модифицированная в [2, 3] для учета диссипативных эффектов. В [4, 5] создана линейная теория свободного взаимодействия, позволившая описать самоиндуцированный отрыв ламинарного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке. Процессы взаимодействия в каналах рассмотрены в [6–10].

Уравнения, описывающие течения со свободным взаимодействием при относительно большом уровне возмущений, можно свести к более простым эволюционным уравнениям типа Бюргерса, Бенджамина – Оно или Кортевега – де Вриза. Режимы, для которых реализуются такие уровни возмущений, проанализированы в [11–14].

1. Постановка задачи. Предполагается, что в плоском канале реализуется сверхзвуковое течение, при котором на стенках расположены пограничные слои. Пусть на изначально невозмущенный сверхзвуковой поток в плоском канале, имеющем ширину d , воздействует возмущение, инициируемое падением скачка на пограничный слой на одной из стенок, или контур стенки деформируется. Возмущения могут быть также индуцированы вне сопла. Предполагается, что вносимые возмущения могут распространяться по пограничному слою вверх и вниз по потоку. Такого рода эффекты, как известно, существенно зависят от числа Маха, температуры поверхности и состояния течения в пограничном слое (ламинарного или турбулентного).

Вводятся следующие обозначения для координат, отсчитываемых вдоль поверхности канала и по нормали к ней, времени, компонентов вектора скорости, плотности, давления, полной энтальпии, коэффициента вязкости: lx , ly , lt/μ_∞ , $u_\infty u$, $u_\infty v$, $\rho_\infty \rho$, $\rho_\infty u_\infty^2 p$, $u_\infty^2 H/2$, $\mu_\infty \mu$. Параметр l определяет расстояние от входного сечения канала до области, где вносятся возмущения. Индекс ∞ относится к размерным параметрам невозмущенного набегающего потока. Предполагается, что число Рейнольдса $Re = \rho_\infty u_\infty l / \mu_\infty$ велико, но не превосходит критического значения, так что сохраняется ламинарный режим течения.

В зависимости от соотношения геометрических параметров и числа Re возможны различные режимы течения. Ниже рассматриваются такие режимы, для которых пограничные слои на стенках имеют малую толщину по сравнению с шириной канала: $d \gg l Re^{-1/2}$.

При воздействии возмущения давления с амплитудой $\Delta p \ll 1$ меняется толщина вытеснения пограничного слоя, при этом основной вклад в это изменение вносит пристеночная область с малыми скоростями [4]. При нелинейном воздействии на пристеночное течение изменения скорости можно оценить как $\Delta u \sim u \sim \Delta p^{1/2}$. Эта оценка верна, если влияние сил вязкости здесь в первом приближении несущественно. Ниже получены значения амплитуд возмущения давления, при которых такой режим имеет место.

При нелинейных изменениях скорости толщина пристеночной области сдвигового течения также меняется в главном члене, что следует из условия сохранения расхода. Тогда из оценки для продольной скорости $u \sim \epsilon u$, $\epsilon = Re^{-1/2}$ следует и оценка для изменения толщины вытеснения $\Delta y \sim \epsilon \Delta p^{1/2}$. При этом существенно, что основная часть пограничного слоя с конечными скоростями дает существенно меньший вклад в суммарное изменение толщины вытеснения $\Delta \delta \sim \epsilon \Delta p$, поскольку изменения скорости здесь при малых амплитудах давления линейны.

Если возмущения, вносимые во внешний сверхзвуковой поток, можно оценить по формуле Аккерета, и эти возмущения имеют тот же порядок, что и исходное возмущение давления, инициирующее процессы взаимодействия, тогда $\Delta p \sim \epsilon \Delta p^{1/2} / \Delta x$. Условия, при которых линейная теория сверхзвуковых течений может быть использована для определения индуцированного возмущения давления, будут выписаны ниже. Оценка для величины давления непосредственно определяет и длину области возмущенного течения: $\Delta x \sim \epsilon / \Delta p^{1/2}$. Отсюда следует, что для всех малых возмущений давления длина области возмущенного течения превосходит толщину пограничного слоя, что и предопределяет возможность использования формулы Аккерета для определения индуцированного возмущения давления.

Предположение о влиянии вязкости в области нелинейных изменений скорости приводит к известным оценкам теории свободного взаимодействия [4]. Ниже рассмотрен режим, для которого влияние вязкости в первом приближении несущественно. При малых возмущениях такой режим реализуется, если амплитуда давления удовлетворяет неравенству $\epsilon^{1/2} \ll \Delta p \ll 1$.

В этих условиях в поле возмущенного течения можно выделить четыре характерные области. Область l содержит струйки тока невязкого сверхзвукового течения, характерный поперечный размер этой области определяется длиной этой области и наклоном характеристик, тогда для конечных чисел Маха $u_1 \sim \epsilon / \Delta p^{1/2}$.

Эта оценка справедлива, если ширина канала d не меньше по порядку величины, чем характерная толщина области невязкого течения. Таким образом, предполагается, что $d/l \geq \epsilon / \Delta p^{1/2}$. При меньших величинах ширины канала для определения индуцированного возмущения давления необходимо использовать гидравлическое приближение, где величина возмущения давления вычисляется из условия сохранения расхода.

Область 2 – это основная часть пограничного слоя. На дне этой области расположена область нелинейных возмущений продольной скорости (область 3), в которой влияние вязкости в первом приближении несущественно. Для учета влияния вязкости необходимо ввести в рассмотрение область 4, поперечный размер которой оценивается из условия баланса сил вязкости и инерции: $y_4 \sim \varepsilon^{3/2}/\Delta p^{1/2}$. Следует отметить, что возможность существования предполагаемой структуры течения зависит от существования безотрывного течения в локальном пограничном слое (область 4).

Ниже рассмотрены такие режимы течения, для которых ширина канала совпадает по порядку величины с поперечным размером области 1. Такое условие приводит к необходимости учитывать воздействие течения вблизи одной стенки на течение вблизи другой стенки канала. При этом существенно, что характерная скорость в рассматриваемой области определяется как отношение продольного размера, одинакового для всех рассматриваемых областей, к характерному времени. Поскольку наименьшие величины продольной скорости характерны для областей 3 и 4, оказывается, что нестационарные процессы в областях 3 и 4 сопровождаются квазистационарными процессами в областях 1 и 2 ($t_1 \sim \varepsilon/\Delta p^{1/2}$, $t_3 \sim \varepsilon/\Delta p$). Таким образом, любое возмущение, индуцируемое течением вблизи нижней стенки, мгновенно (в масштабе времени, характерном для пристеночного течения) передается вдоль характеристики в невязком течении и воздействует на течение около верхней стенки.

2. Формулировка краевой задачи. Решение в области 3 можно записать в следующем виде, основываясь на полученных выше оценках:

$$x = 1 + \varepsilon \left(\frac{\rho_\infty}{\rho_w} \right)^{1/2} (a\beta \Delta p^{1/2})^{-1} x_3, \quad y = -\frac{d}{2l} + \varepsilon \left(\frac{\rho_\infty}{\rho_w} \right)^{1/2} a^{-1} \Delta p^{1/2} y_3$$

$$t = \varepsilon a^{-1} \beta^{-1} \Delta p^{-1} t_3$$

$$u(x, y, t, \varepsilon, \Delta p) = \left(\frac{\rho_\infty}{\rho_w} \right)^{1/2} \Delta p^{1/2} u_3(x_3, y_3, t_3) + \dots \tag{2.1}$$

$$v(x, y, t, \varepsilon, \Delta p) = \left(\frac{\rho_\infty}{\rho_w} \right)^{1/2} \beta \Delta p^{3/2} v_3(x_3, y_3, t_3) + \dots$$

$$p(x, y, t, \varepsilon, \Delta p) = 1/(\gamma M_\infty^2) + \Delta p p_3(x_3, t_3) + \dots$$

$$\rho = \rho_w + \dots$$

где параметр a определяется из решения для течения в невозмущенном пограничном слое $a = du/dy_w$. Следует отметить, что этот параметр по порядку величины равен $O(\text{Re}^{1/2})$.

Подстановка выражений (2.1) в систему уравнений Навье–Стокса в результате предельного перехода

$$\text{Re} \rightarrow \infty, \quad \Delta p \rightarrow 0, \quad \Delta p \text{Re}^{1/4} \rightarrow \infty \tag{2.2}$$

приводит к системе уравнений

$$\frac{\partial u_3}{\partial t_3} + u_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + v_3 \frac{\partial u_3}{\partial y_3} + \frac{\partial p_3}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial y_3} = 0, \quad \frac{\partial p_3}{\partial y_3} = 0 \tag{2.3}$$

с краевыми условиями

$$x_3 \rightarrow -\infty: v_3 = 0, \quad u_3 = y_3 \tag{2.4}$$

Отметим, что аналогичная система уравнений получается и для верхней стенки. Будем обозначать индексом “–” решение для нижней стенки канала, а индексом “+” решение для верхней стенки канала. Решение уравнений (2.3) ищем в виде

$$\begin{aligned} u_{3+}(x_3, y_{3+}, t_3) &= y_{3+} + A_{3+}(x_3, t_3) - A_{3-}(x_3 - \Delta, t_3) \\ u_{3-}(x_3, y_{3-}, t_3) &= y_{3-} + A_{3-}(x_3, t_3) - A_{3+}(x_3 - \Delta, t_3) \end{aligned} \tag{2.5}$$

Физический смысл функции A – это взятая с обратным знаком величина изменения толщины вытеснения пограничного слоя. Параметр подобия $\Delta = (\rho_w/\rho_\infty)^{1/2}(d/l)a\beta^2$ определяет расстояние между текущей точкой на одной из стенок и точкой, откуда приходит возмущение с противоположной стенки вдоль характеристики. Можно видеть, что к уменьшению этого параметра приводит нагревание поверхности, уменьшение поверхностного трения, приближение числа Маха к единице и уменьшение амплитуды возмущения.

Подставляя (2.5) в (2.3), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial(A_{3+} - B_{3-})}{\partial t_3} + (A_{3+} - B_{3-}) \frac{\partial(A_{3+} - B_{3-})}{\partial x_3} + \frac{\partial p_{3+}}{\partial x_3} &= 0 \\ \frac{\partial(A_{3-} - B_{3+})}{\partial t_3} + (A_{3-} - B_{3+}) \frac{\partial(A_{3-} - B_{3+})}{\partial x_3} + \frac{\partial p_{3-}}{\partial x_3} &= 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$B_{3+} = A_{3+}(x_3 - \Delta, t_3), \quad B_{3-} = A_{3-}(x_3 - \Delta, t_3)$$

Распределения функций A_{3-} , A_{3+} индуцируют во внешнем невязком потоке возмущение давления, которое можно найти из решения для области I , где возмущение давления удовлетворяет волновому уравнению. Решение волнового уравнения, учитывающее влияние возмущений, приходящих с противоположных стенок канала, имеет вид

$$\begin{aligned} p_{3+}(x_3, t_3) &= -\frac{\partial}{\partial x_3} [A_+(x_3, t_3) + A_-(x_3 - \Delta, t_3) - \delta_{w+}(x_3, t_3)] \\ p_{3-}(x_3, t_3) &= -\frac{\partial}{\partial x_3} [A_-(x_3, t_3) + A_+(x_3 - \Delta, t_3) - \delta_{w-}(x_3, t_3)] \end{aligned} \quad (2.7)$$

где функции δ_{w+} и δ_{w-} определяют изменение формы поверхности стенки канала в зависимости от продольной координаты и времени. Тогда уравнение (2.6), записанное для нижней и верхней стенок канала, с учетом (2.7), приводит к системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial(A_+ - B_-)}{\partial t} + (A_+ - B_-) \frac{\partial(A_+ - B_-)}{\partial x} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} (A_+ + B_- + \delta_{w+}) \\ \frac{\partial(A_- - B_+)}{\partial t} + (A_- - B_+) \frac{\partial(A_- - B_+)}{\partial x} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} (A_- + B_+ + \delta_{w-}) \end{aligned} \quad (2.8)$$

в которой нижний индекс опущен.

Предполагается, что на больших расстояниях вверх по потоку от области взаимодействия возмущения отсутствуют, чему соответствует краевое условие

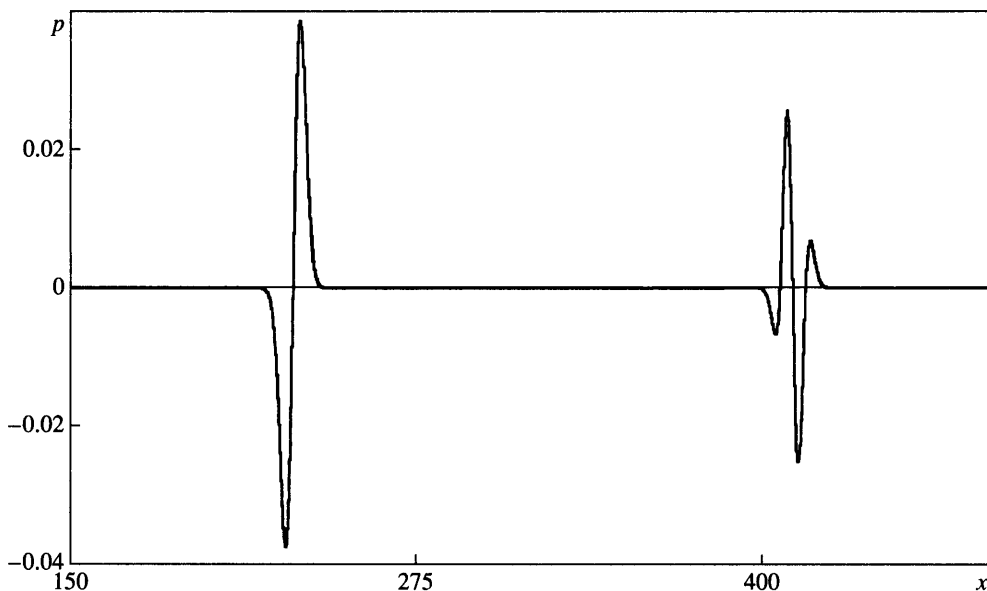
$$x = -\infty: \quad A_{\pm} = 0 \quad (2.9)$$

На больших расстояниях вниз по потоку ставятся условия вида

$$x = +\infty: \quad \frac{\partial A_{\pm}}{\partial x} = 0 \quad (2.10)$$

или, если на правую границу приходит возмущение, ставится условие отсутствия отражения от правой границы.

При больших значениях параметра Δ система уравнений (2.8) разделяется на два независимых уравнения Бюргерса, описывающих течение около верхней и нижней



Фиг. 1. Распределение давления на стенке канала для симметричных возмущений геометрии поверхности при $\Delta = 150$

поверхности. Такое разделение имеет место, если возмущение, например, формы поверхности ограничено в пространстве, тогда с противоположной стенки будет приходить сигнал из области, где возмущения отсутствуют.

Система уравнений (2.8) описывает волновые процессы в каналах, которые могут включать в себя такие эффекты, как многократное переотражение волн от стенок, распространение этих волн вниз и вверх по потоку и т.д.

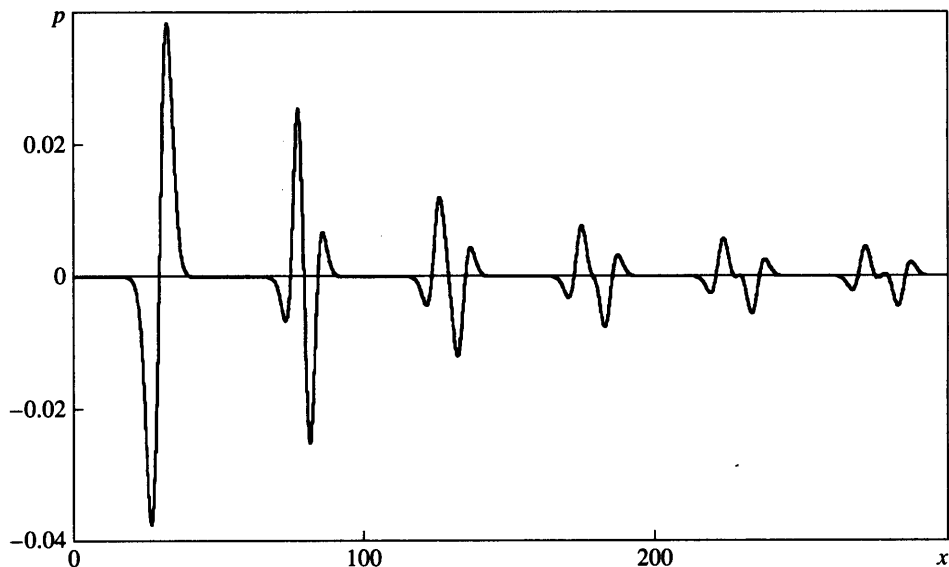
3. Результаты решения для симметричных возмущений поверхности. Рассмотрим случай симметричного изменения поверхности стенок для возмущений вида

$$\delta(x) = K_1 e^{-K_2(x-x_0)^2}, \quad K_1 = 0.2, \quad K_2 = 0.1 \quad (3.1)$$

$$\delta_w(x, 0) = 0, \quad \delta_{w+} = \delta_{w-} = \delta_w$$

Задача (2.8)–(2.10), (3.1) решалась численно с использованием неявной маршевой схемы, основанной на методе прогонки с итерациями. На фиг. 1 приведено распределение давления при $L = 300$ и при $\Delta = 150$ для момента времени $t_1 \approx 5$. На расстоянии $x_0 = \Delta$ от неровности формируется возмущенная зона, вызванная падением волны от противоположного пограничного слоя. В более протяженной области при $L = 500$, $\Delta = 100$, количество волн, падающих на пограничный слой, соответственно увеличивается (фиг. 2).

Таким образом, на некоторой длине рассматриваемой области на расстоянии Δ друг от друга формируются очаги возмущенного давления, вызванные волнами, отраженными от противоположной стенки. До тех пор пока эти очаги достаточно далеко разнесены в пространстве и не оказывают влияния друг на друга, решения в областях локализации возмущений эволюционирует таким же образом, как и в вырожденной задаче (для независимых решений уравнений Бюргерса при больших значениях параметра подобия).

Фиг. 2. То же, что на фиг. 1, при $\Delta = 100$

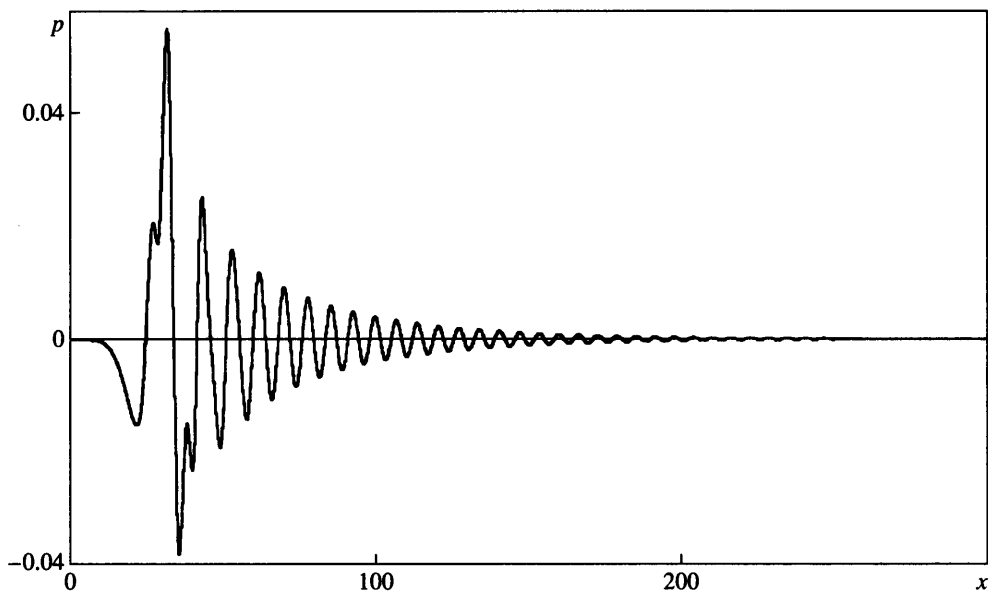
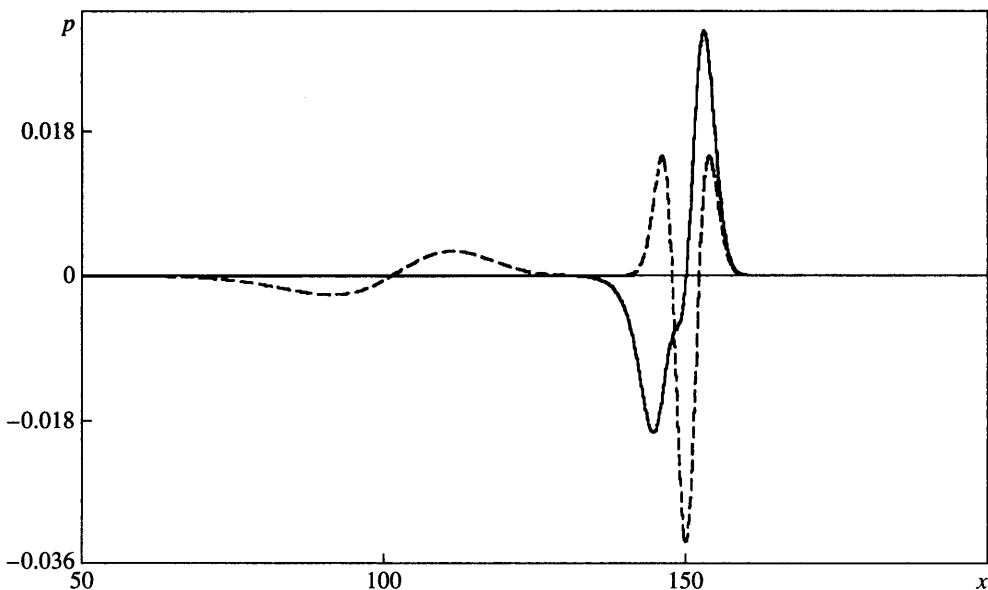
По мере сужения канала (уменьшения параметра Δ), влияние противоположного пограничного слоя усиливается и интенсивность возмущений, приходящих извне, увеличивается. Вследствие этого очаги начинают сближаться друг с другом, постепенно перерастая в непрерывно возмущенную область, протяженность которой, в свою очередь, уменьшается.

Теперь зоны концентрации возмущений носят нелокальный характер и их взаимное влияние проявляется в том, что: 1) возмущения двигаются вниз по потоку в виде осцилляторных цугов; 2) волны отсоединяются от неровности и двигаются по потоку вверх. Иллюстрацией этих выводов служат результаты расчетов, представленные на фиг. 3, где приведена картина распределения давления в непрерывно возмущенной области для момента времени $t \approx 20$.

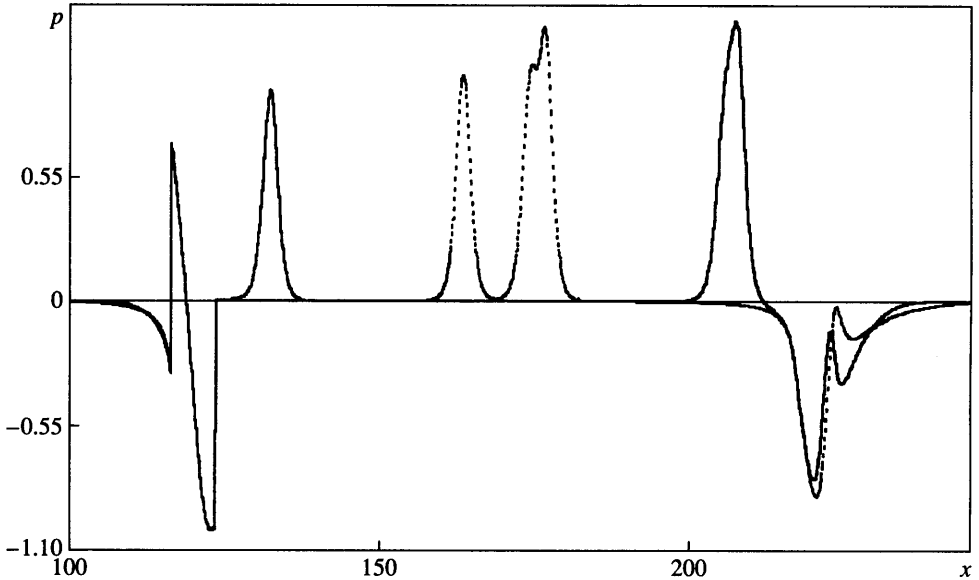
Как было отмечено, протяженность области концентрации возмущений обратно пропорциональна ширине канала. По мере уменьшения расстояния между взаимодействующими пограничными слоями зона появления возмущений все теснее примыкает к неровности вследствие смещения к ней очагов, индуцированных отраженными волнами. В области расположения неровности, заданной условиями (3.1), существует решение в виде стоячей волны, как и в невырожденной задаче, и это дает основания предполагать, что предельное решение в зоне неровности существует при всех значениях параметра Δ .

Расчеты при минимальных значениях параметра $\Delta = 0.1$ показали, что возмущения по направлению вниз от неровности вообще перестают формироваться. Остаются лишь установившееся решение на самой неровности и затухающая волна,двигающаяся вверх по потоку. На фиг. 4 приведено сравнительное распределение возмущений давления для двух моментов времени. Штриховой кривой соответствует более ранний момент времени, сплошной – более поздний.

Результаты решения системы (2.8)–(2.10) показывают, что при усилении взаимодействия пограничных слоев, расположенных на противоположных стенках канала, наблюдается переход от решений, типичных для уравнения Бюргерса, к более слож-

Фиг. 3. То же, что на фиг. 1, при $\Delta = 5$ Фиг. 4. То же, что на фиг. 1, при $\Delta = 0.1$

ным решениям, когда от стоячей волны вниз по потоку уходят осцилляции, а вверх – волновые пакеты, что напоминает поведение решений уравнения Кортевега – де Вриза. Следует отметить, что неровность вида (3.1), индуцирующая возмущения в канале, гладкая и волновые пакеты, формирующиеся в полученных решениях, не являются реакцией системы на разрыв в начальных данных.



Фиг. 5. Распределение давления на стенке канала при $\Delta = 100$ для антисимметричных возмущений геометрии поверхности: сплошная кривая $t = 20$, штриховая $t = 30$

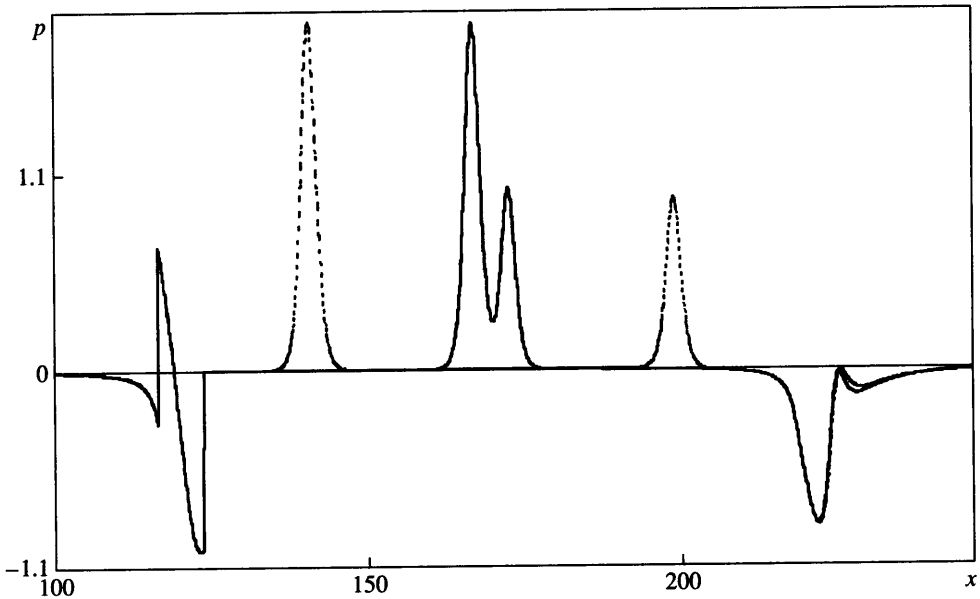
4. Результаты решения для антисимметричных возмущений поверхности. Рассмотрим решения, характеризующиеся образованием уединенных волн при антисимметричных возмущениях поверхности.

Для решения уравнения Бюргера, описывающего течение при больших расстояниях между стенками, характерно то, что в зоне источника сначала формируется, а затем убегает уединенная волна при наличии стационарного распределения вблизи неровности.

При трансформации уравнений Бюргера в невырожденную систему (сужении канала), на расстоянии Δ друг от друга появляются локально возмущенные области, вызванные падением волн давления с противоположной стенки. Когда очаги возмущений разделены невозмущенной областью и не оказывают влияния друг на друга при больших значениях параметра Δ , в зоне неровности скачок давления почти не претерпевает изменений, от каждой из локально возмущенных зон убегает уединенная волна (импульс), после чего решение там не изменяется.

Из анализа свойств уравнения Бюргера известно, что при некоторой форме источника волна может бежать и вверх по потоку. Поставим теперь в задаче (2.8)–(2.10) такие условия, при которых волны от неровности и от индуцированного очага распространялись навстречу друг другу. Это можно сделать, если рассмотреть задачу с антисимметричными начальными условиями, когда, например, на нижней стенке возникает выпуклая неровность с угловыми точками, а на верхней – впадина такой же формы, т.е. $\delta_{w+} = -\delta_{w-}$.

В этом случае от выпуклой неровности отделяется волна, движущаяся вниз по потоку, а волна из индуцированного очага распространяется ей навстречу. Двигаясь с одинаковой скоростью, они встречаются на середине участка, разделяющего локализованные области возмущений. Две волны сливаются в одну, имеющую удвоенную амплитуду, которая в свою очередь затем вновь разделяется на две одиночные вол-



Фиг. 6. То же, что на фиг. 5, при $\Delta = 100$: сплошная кривая $t = 40$, штриховая – $t = 50$

ны. Разделившись, они сохраняют свои прежние формы и продолжают двигаться с той же скоростью, что и до слияния. Вся эта эволюция проиллюстрирована на фиг. 5, 6. Для сравнения на каждом из графиков изображено по два распределения, сплошная кривая соответствует более раннему моменту времени, штриховая – более позднему. Уединенная волна, распространяющаяся вверх по потоку, прекращает свое движение, не достигнув в области расположения неровности, где установившееся решение для давления представляет собой скачок.

Полученные результаты говорят о том, что рассматриваемые уединенные волны без видимых изменений проходят сквозь возмущенные области и друг через друга, хотя в то же время такая волна не может преодолеть область разрывного решения. Это позволяет сделать некоторые предположения о влиянии начальных условий на формирование решений эволюционных уравнений.

Обтекание относительно гладкой неровности, когда разрывна производная наклона неровности, не приводит к формированию волн в широком канале. Наличие скачка давления меняет картину. Решения уравнения Бюргерса свидетельствуют, что в этом случае от скачка могут отсоединиться уединенные волны. Пример же прохождения этих волн сквозь возмущенные зоны иллюстрирует наиболее интересное свойство полученных решений – их солитонный характер.

Заключение. На дне области нелинейно возмущенного течения находится локальный пограничный слой. Решения для этого пограничного слоя, равно как и для рассмотренной задачи, ограничены такими режимами, при которых не возникает нестационарный отрыв под влиянием заданного (полученного из решений задачи (2.8)–(2.10)) градиента давления. Предварительные расчеты показали, что существует временной период, при котором течение остается безотрывным и, следовательно, предположения о существовании решений сформулированной задачи выполняются.

Для исследования совместного влияния эффектов нелинейного взаимодействия и отрыва интересен режим, характеризующийся амплитудами давления $\Delta p \sim Re^{-1/4}$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (№ 02-01-00598).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Tsien H.S., Finston M.* // Interaction between parallel streams of subsonic and supersonic velocity // *J. Aeronaut. Sci.* 1949. V. 16. № 9. P. 515–528.
2. *Lighthill M.J.* Reflection of a laminar boundary layer of a weak steady disturbance to a supersonic stream, neglecting viscosity and heat conduction // *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 1950. V. 3. Pt 3. P. 303–325.
3. *Lighthill M.K.* On boundary layers and upstream influence. II Supersonic flows without separation // *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.* 1953. V. 217. № 1131. P. 478–507.
4. *Нейланд В.Я.* Асимптотические задачи теории вязких сверхзвуковых течений // *Тр. ЦАГИ.* 1974. Вып. 1529. 125 с.
5. *Stewartson K.* Multistructures boundary layers on flat plates and related bodies // *Advances in Applied Mechanics.* N.Y. etc.: Acad. Press, 1974. V. 14. P. 145–239.
6. *Smith F.T.* Flow through constricted or dilated pipes and channels // *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 1976. V. 29. Pt 3. P. 343–376.
7. *Smith F.T.* Upstream interactions in channel flows // *J. Fluid Mech.* 1977. V. 79. Pt 4. P. 631–655.
8. *Николаева Е.М., Тригуб В.Н.* О самоиндуцированном взаимодействии пограничных слоев в плоском канале // *Изв. РАН. МЖГ.* 1995. № 4. С. 131–141.
9. *Богданова Е.В., Рыжов О.С.* О свободных колебаниях вязкой несжимаемой жидкости в полубесконечном канале // *ПММ.* 1983. Т. 47. Вып. 1. С. 64–72.
10. *Рубан А.И., Тимошин С.Н.* О распространении возмущений в пограничном слое на стенках плоского канала // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1986. № 3. С. 74–79.
11. *Жук В.И., Рыжов О.С.* О локально-невязких возмущениях в пограничном слое с самоиндуцированным давлением // *Докл. АН СССР.* 1982. Т. 263. № 1. С. 56–59.
12. *Жук В.И., Попов С.П.* Моделирование нелинейных волн в пограничных слоях на основе уравнения Бюргерса, Бенджамина – Оно и Кортевега – де Вриза // *Мат. моделирование.* 1990. Т. 2. № 7. С. 96–109.
13. *Savenkov I.V.* Wave packets, resonant interactions and soliton formation in inlet pipe flow // *J. Fluid Mech.* 1993. V. 252. P. 1–30.
14. *Липатов И.И., Нейланд В.Я.* К теории нестационарного отрыва и взаимодействия пограничного слоя со сверхзвуковым потоком газа // *Учен. зап. ЦАГИ.* 1987. Т. 18. № 1. С. 36–49.

Москва

Поступила в редакцию
5.XII.2002