

УДК532.517.013.4

© 2004 г. С. В. МАНУЙЛОВИЧ

О ВОЗМУЩЕНИЯХ ТЕЧЕНИЯ ГАМЕЛЯ, ВЫЗВАННЫХ НЕРОВНОСТЬЮ СТЕНОК КАНАЛА

Предложен метод исследования восприимчивости течений, неоднородных в продольном направлении. Процесс возбуждения собственных колебаний изучен на примере простейшего из неоднородных потоков – двумерного течения вязкой несжимаемой жидкости в канале с плоскими непараллельными стенками. В качестве физических факторов, порождающих возмущения, рассмотрены случаи стационарной неровности и локализованной вибрации стенок канала. С помощью замены независимых переменных и искомым параметров возмущенного движения задача о генерации стационарных возмущений над неровностью сводится к продольно-однородной краевой задаче, решение которой построено с использованием преобразования Фурье по продольной переменной. Эта же проблема исследована другим методом, основанным на представлении искомого решения в виде суперпозиции решений однородной задачи и вынужденного решения, вычисленного в локально-однородном приближении. В результате задача расчета продольных распределений амплитуд нормальных мод сводится к решению бесконечномерной неоднородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Численное решение, полученное этим методом, протестировано на основе точного расчета, выполненного методом Фурье. С помощью предложенного метода исследована задача о восприимчивости течения к гармоническим колебаниям участков стенок канала. Проведенные расчеты показывают перспективность применения метода к исследованию восприимчивости продольно-неоднородного течения в ламинарном пограничном слое.

Ключевые слова: восприимчивость, продольно-неоднородное течение.

Как правило, линейная стадия ламинарно-турбулентного перехода в пограничном слое на крыле занимает более протяженный участок течения, чем нелинейная [1], поэтому изучение линейных явлений в переходной области (восприимчивость, устойчивость) играет ключевую роль в решении важной инженерной проблемы предсказания положения перехода. При описании линейного этапа переходного процесса основная трудность связана с продольной неоднородностью невозмущенного течения, что делает некорректным применение классической теории линейной устойчивости параллельных течений к расчету коэффициентов усиления неустойчивых возмущений. Вместе с тем эта неоднородность – единственный фактор, ответственный за трансформацию внешних возмущений во внутренние волны пограничного слоя, рост которых и приводит в конечном счете к турбулизации течения [1]. В этой связи приобретает актуальность разработка оперативных методов расчета линейного этапа ламинарно-турбулентного перехода, поскольку применение методов прямого численного моделирования [2] сопряжено с большими вычислительными затратами, а использование метода параболизированных уравнений устойчивости [3] ограничено допущением о слабой неоднородности осредненного течения.

Для исследования линейного этапа перехода предлагается метод, суть которого заключается в представлении процесса распространения возмущения в виде идущих параллельно независимых эволюций мод локально-однородной задачи (приводящих к их усилению или ослаблению) и перераспределений этих мод друг в друга на местной не-

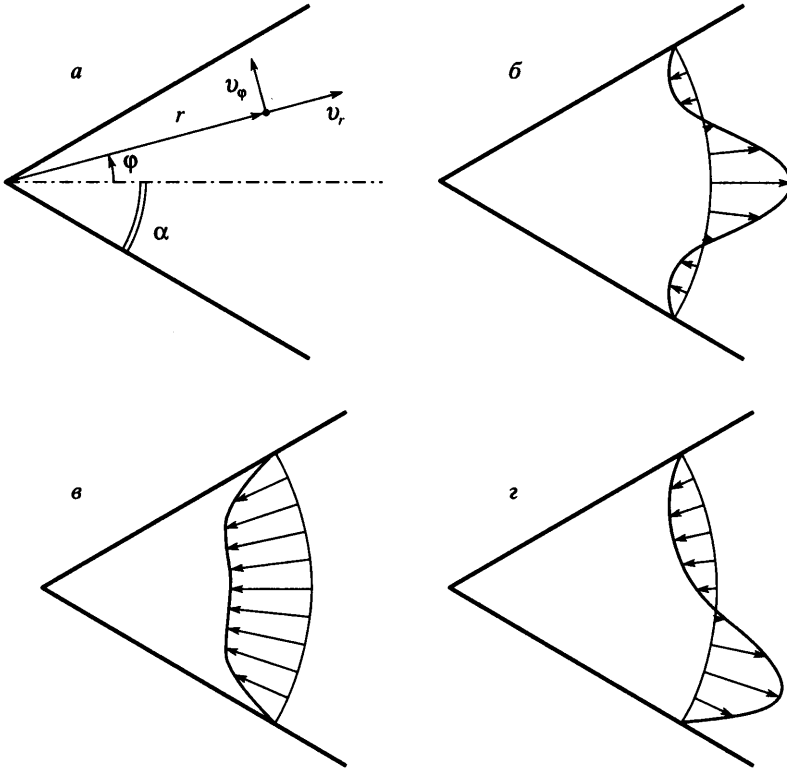
однородности основного течения. Эффективность метода была проиллюстрирована на примере задачи о распространении возмущений в плоском канале, содержащем секцию с податливыми стенками [4]. Удобство рассмотренной там постановки заключалось в дискретности спектра возмущений и в возможности варьирования неоднородности путем исследования различных распределений податливости стенок. Кроме того, численное решение рассмотренной задачи могло быть получено и другим точным методом (метод интегрального уравнения): последний метод использовался как “эталонный” при тестировании разрабатываемого метода.

Проведенные в [4] расчеты показали, что предлагаемый метод позволяет количественно верно описывать поведение возмущений при их рассеянии на короткой (порядка одной длины волны Толлмина – Шлихтинга) и интенсивной неоднородности. К достоинствам метода относится возможность изменения числа учитываемых мод в зависимости от характера неоднородности. В случае умеренной неоднородности даже одномодовое приближение дает результаты, практически не отличающиеся от точных, а в случае сильной неоднородности оно обеспечивает точность расчета, вполне достаточную с точки зрения инженерных задач.

В описанной выше постановке основное течение однородно в продольном направлении (плоское течение Пуазейля), а неоднородность задачи обусловлена переменной податливостью стенок канала. Пример использования метода для расчета эволюции возмущений в простейшем течении с неоднородным ядром (течение Гамеля [5]) был продемонстрирован в [6]. Сильная неоднородность такого течения носит “естественный” характер и не может регулироваться. В дальнейшем предполагается применить предлагаемый метод к расчету эволюции возмущений в ламинарном пограничном слое. По сравнению с постановками [4, 6] в этом случае при описании динамики мод необходимо учитывать моды непрерывного спектра. Учет последних позволит единым образом описать процессы, происходящие на линейной стадии ламинарно-турбулентного перехода – трансформацию возмущений набегающего потока во внутренние волны пограничного слоя (восприимчивость) и их последующий рост (неустойчивость).

Во всех рассмотренных выше примерах использования метода построенные решения принадлежат классу “свободных”, поскольку соответствующим краевым задачам удовлетворяет тождественно нулевое решение. В то же время во многих сценариях ламинарно-турбулентного перехода важную роль играют “вынужденные” возмущения, например стационарные возмущения, вызванные неровностью обтекаемой поверхности, или пульсации течения в пограничном слое на вибрирующем крыле. В случае продольно-однородного основного течения механизм возбуждения таких возмущений является хорошо изученным (см., например [7, 8]). В данной работе предложен метод, применимый для расчета вынужденных возмущений в случае продольно-неоднородного течения. Работоспособность метода показана на примере расчета возмущений, вносимых в течение Гамеля стационарным или нестационарным искривлением стенок канала.

1. Математическая постановка задач восприимчивости. Будем изучать стационарные и нестационарные двумерные возмущения, порождаемые неровностью обтекаемой поверхности в двумерных неоднородных течениях. Генерацию возмущений изучим на примере течения Гамеля – радиального движения вязкой несжимаемой жидкости в канале с плоскими стенками, расположенными под углом 2α . В качестве независимых переменных будем использовать время t и полярные координаты r, φ (фиг. 1, *a*). Радиальную и азимутальную компоненты скорости обозначим v, v_φ , давление – p . Независимые переменные и параметры возмущенного течения будем считать безразмерными, используя в качестве основных единиц измерения плотность жидкости ρ° , масштаб длины r° , характеризующий местоположение неровности и максимальное значение абсолютной величины скорости основного течения v° на



Фиг. 1. Конфигурации течения Гамеля при $R = 100$, $\alpha = \pi/6$: *a* – система координат, *б* – симметричная струя (режим I), *в* – симметричный сток (режим II); *г* – асимметричное течение (режим III)

упомянутом расстоянии от вершины угла. В качестве числа Рейнольдса будем использовать величину $R = v^0 r^0 / \nu^0$, где ν^0 – размерный кинематический коэффициент вязкости.

Введем новую независимую переменную $\xi = \ln r$ и новые неизвестные функции $u = rv_r$, $v = rv_\phi$, $f = r^2 p$. Будем также использовать функцию g [6], характеризующую завихренность течения: введение этой функции приводит систему уравнений Навье – Стокса к виду [6], содержащему только первые производные от функций v , u , f , g по переменным t , ξ , ϕ .

Предположим, что возмущения течения вызваны стационарными или колеблющимися по гармоническому закону малыми искривлениями стенок вида $\sigma h^{(+,-)}(r) \exp(-i\omega t) + \text{с.с.}$, где функции $h^{(+,-)}$ характеризуют местное отклонение верхней и нижней стенок, отсчитываемое против часовой стрелки по нормали к соответствующей невозмущенной поверхности. Будем считать, что точки вибрирующих стенок перемещаются вдоль этих нормалей с частотой $\omega > 0$ (в случае стационарной неровности $\omega = 0$). В новых переменных уравнения искривленных стенок приобретают вид

$$\begin{aligned} \phi &= \pm\alpha + \sigma[\phi^{(+,-)}(\xi) \exp(-i\omega t) + \text{с.с.}], \quad 0 < \sigma \ll 1 \\ \phi^{(+,-)} &= e^{-\xi} h^{(+,-)}(e^\xi) \end{aligned} \quad (1.1)$$

В линейном приближении решение задачи, описывающей движение жидкости в плоском диффузоре с искривленными стенками (1.1), имеет вид амплитудного разложения

$$\mathbf{q} = \mathbf{Q}(\varphi) + \sigma[\mathbf{q}'(\xi, \varphi)\exp(-i\omega t) + \text{c.c.}] + O(\sigma^2) \tag{1.2}$$

Здесь \mathbf{q} – вектор с компонентами $q_{1,2,3,4} = v, u, f, g$. Главное приближение в разложении (1.2) описывает невозмущенное течение Гамеля. Функции $Q_{1,2,3,4} = V, U, F, G$ характеризующие азимутальное распределение параметров основного течения, удовлетворяют нелинейной системе уравнений

$$V \equiv 0, \quad \frac{d^3 U}{d\varphi^3} + 2RU \frac{dU}{d\varphi} + 4 \frac{dU}{d\varphi} = 0 \tag{1.3}$$

$$F = \frac{2}{R}U - \frac{1}{2R} \frac{d^2 U}{d\varphi^2}(0), \quad G = \frac{1}{R} \frac{dU}{d\varphi}$$

Краевыми условиями для нее служат условия прилипания $U(\pm\alpha) = 0$ и нормировки $\max|U| = 1$.

При фиксированных значениях параметров R, α решение задачи (1.3), вообще говоря, не единственно. В данной работе все расчеты проводились для $R = 100, \alpha = \pi/6$. Этим значениям параметров удовлетворяют три возможные конфигурации течения: режим I – симметричная струя с пристеночными зонами возвратного течения (фиг. 1, б), режим II – симметричный сток (фиг. 1, в) и режим III – асимметричное течение (фиг. 1, г). В симметричных режимах максимум скорости $|U| = 1$ достигается на оси канала, в асимметричном режиме при $\varphi = -0.301 (\approx -17^\circ)$.

Комплексные амплитуды параметров возмущения $q'_{1,2,3,4} = v', u', f', g'$ удовлетворяют линеаризованной системе уравнений Навье – Стокса, записанной в переменных ξ, φ :

$$\frac{\partial u'}{\partial \xi} + \frac{\partial v'}{\partial \varphi} = 0$$

$$-i\omega e^{2\xi} u' + U \frac{\partial u'}{\partial \xi} - 2Uu' + \frac{dU}{d\varphi} v' + \frac{\partial f'}{\partial \xi} - 2f' = \frac{\partial g'}{\partial \varphi} \tag{1.4}$$

$$-i\omega e^{2\xi} v' + U \frac{\partial v'}{\partial \xi} + \frac{\partial f'}{\partial \varphi} = -\frac{\partial g'}{\partial \xi} + 2g'$$

$$Rg' = \frac{\partial u'}{\partial \varphi} - \frac{\partial v'}{\partial \xi}$$

На стенках канала (1.1) возмущенное течение (1.2) удовлетворяет условиям прилипания. Выписывая эти условия в линейном по σ приближении, получим

$$v'(\xi, \pm\alpha) = -i\omega e^{2\xi} \phi^{(+,-)}(\xi), \quad u'(\xi, \pm\alpha) = -\frac{dU}{d\varphi}(\pm\alpha) \phi^{(+,-)}(\xi) \tag{1.5}$$

Решение краевой задачи (1.4), (1.5) обладает свойством подобия: если $\mathbf{q}'(\xi, \varphi)$ – возмущение, генерируемое в потоке неровностями вида $\phi^{(+,-)}(\xi)$, колеблющимися с частотой ω , то функция $\mathbf{q}'(\xi + b, \varphi)$ описывает возмущения того же основного течения, порождаемые вибрацией неровностей $\phi^{(+,-)}(\xi + b)$ с частотой ωe^{2b} . С точки зрения теории размерностей это свойство следует из преобразования, соответствующего увеличению масштаба длины в $a = e^b$ раз с одновременным уменьшением масштаба скорости в a раз. При этом масштаб частоты уменьшается в a^2 раз, а сама безразмерная частота увеличивается во столько же раз.

Решение задачи (1.4), (1.5) не единственно: оно определено с точностью до произвольной линейной комбинации свободных возмущений течения Гамеля [6] – линейно-

независимых решений краевой задачи для системы (1.4) с однородными граничными условиями. Ниже строятся частные решения задачи (1.4), (1.5), единственность которых обеспечивается с помощью дополнительных условий, выставляемых вверх и вниз по потоку от неровностей.

2. Метод Фурье для решения задачи генерации стационарных возмущений. Проведенная замена независимых переменных и искомым функций приводит линеаризованную систему уравнений Навье – Стокса к удобному виду: большинство коэффициентов системы (1.4) не зависят от “продольной” переменной ξ . Продольная неоднородность сохраняется лишь в нестационарных членах системы (первые слагаемые второго и третьего уравнений (1.4), содержащие множитель ω). Возможность преобразования системы к виду (1.4) обусловлена тем, что стационарное течение Гамеля не имеет выделенного масштаба длины, и лишь введение параметра размерной частоты возмущения ω^0 позволяет сформировать такой масштаб [6].

Изучим сначала процесс возбуждения стационарных возмущений на неровностях стенок ($\omega = 0$). По форме краевая задача, описывающая генерацию стационарных возмущений в течении Гамеля, совершенно аналогична краевым задачам, описывающим восприимчивость течения Пуазейля в плоском канале [7.9]. Роль продольной декартовой координаты играет переменная ξ , роль поперечной – азимутальная переменная φ , а вместо параболического профиля скорости течения Пуазейля используется азимутальное распределение скорости течения Гамеля. Единственное отличие заключается в том, что система (1.4) содержит дополнительные члены (с множителем 2). Главное сходство между рассматриваемой здесь стационарной задачей восприимчивости и постановками [7–9] состоит в том, что соответствующие краевые задачи являются продольно-однородными, так что для построения их решения применим аппарат преобразования Фурье по продольной переменной.

Стационарные двумерные возмущения, генерируемые неровностью стенок в плоском течении Пуазейля, исследовались в [9]. Подобно [9], для выделения единственного решения задачи (1.4), (1.5) будем налагать на возмущение условие затухания вверх и вниз по потоку от неровности: $\mathbf{q}' \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \pm\infty$; в этом случае решение можно искать в форме преобразования Фурье по переменной ξ :

$$\mathbf{q}' = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\tau^{(+)} \phi_k^{(+)} \mathbf{q}_k^{(+)}(\varphi) + \tau^{(-)} \phi_k^{(-)} \mathbf{q}_k^{(-)}(\varphi)] \exp(ik\xi) dk \quad (2.1)$$

Решение (2.1) представлено в виде суперпозиции двух возмущений: первое соответствует неровной верхней стенке и гладкой нижней, а второе – обратной ситуации. Фурье-образы обоих слагаемых ради удобства нормированы на фурье-образы формы неровностей и на величины сдвига невозмущенного течения на соответствующих стенках

$$\phi_k^{(+,-)} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi^{(+,-)}(\xi) \exp(-ik\xi) d\xi, \quad \tau^{(+,-)} = \frac{dU}{d\varphi}(\pm\alpha)$$

Нормированные фурье-образы $\mathbf{q}_k^{(+,-)}$ удовлетворяют неоднородным краевым задачам для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\mathbf{L}(k, 0) \mathbf{q}_k^{(+,-)} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{L}(k, \Omega) = \frac{d}{d\varphi} + ik\mathbf{A} + \mathbf{B}(\Omega)$$

$$q_{k1}^{(+)}(\pm\alpha) = q_{k1}^{(-)}(\pm\alpha) = q_{k2}^{(+)}(-\alpha) = q_{k2}^{(-)}(\alpha) = 0 \quad (2.2)$$

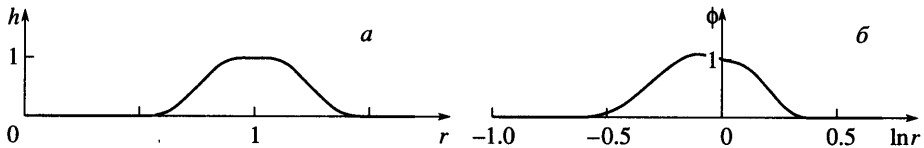
$$q_{k2}^{(+)}(\alpha) = q_{k2}^{(-)}(-\alpha) = -1$$

Здесь A, B – матрицы, не равные 0, элементы которых задаются равенствами:

$$A_{12} = A_{34} = -A_{21} = -A_{43} = 1, \quad A_{31} = -A_{42} = U, \quad B_{24} = -R$$

$$B_{31} = -i\Omega, \quad B_{43} = -B_{34} = 2, \quad B_{41} = -dU/d\varphi, \quad B_{42} = i\Omega + 2U$$

Произведенная нормировка фурье-амплитуд искомого решения приводит краевую задачу к универсальному виду (2.2), не зависящему от формы неровности (он зависит только от конфигурации основного течения). Раз построенное решение задачи (2.2) может затем использоваться для расчета возмущений, возбуждаемых неровностями различной формы.



Фиг. 2. Форма локального искривления стенки: *a* – в декартовых переменных; *б* – в полярных координатах

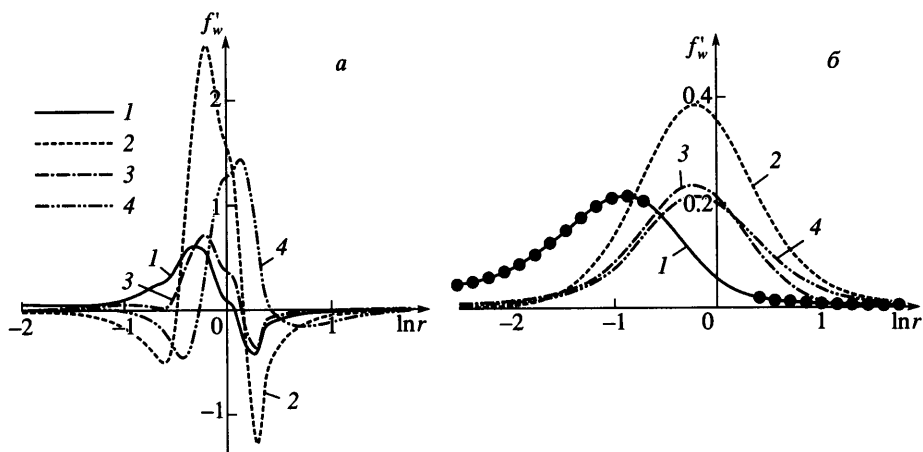
Изучим сначала структуру стационарных возмущений, вносимых в течение локальными искривлениями стенок канала (т.е. неровностями, форма которых задается финитными функциями $h^{(+,-)}(r)$). Будем считать, что в декартовых координатах форма неровностей описывается функцией

$$h(r) = H\left(\frac{r-1}{l}\right), \quad H(x) = \frac{1}{2\pi} \int \prod_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{2^n}{k} \sin \frac{k}{2^n} \right) \exp(-ikx) dk \quad (2.3)$$

Функция H бесконечно дифференцируема и финитна с носителем $(-1, 1)$. При $l = 0.5$ неровность (2.3) имеет вид, показанный на фиг. 2, *a*. Та же неровность изображена на фиг. 2, *б* в координатах ξ, φ . Обтекание такой неровности исследовалось для всех трех режимов основного течения, показанных на фиг. 1. Вычисление решения (2.1), (2.2) производилось способом, аналогичным методу расчета восприимчивости течения Пуазейля [4].

На фиг. 3 проиллюстрированы результаты расчета возмущений, порождаемых в течении Гамеля неровностью одной из стенок канала. В качестве меры интенсивности возмущений использованы функции $f_w^i = f^i(\xi, \pm\alpha)$, характеризующие распределение возмущенного давления на стенках канала: с точностью до мультипликативной постоянной эти функции равны амплитуде возмущенного давления, отнесенного к местному давлению в невозмущенном потоке. На фиг. 3, *a* показаны распределения возмущения на неровной стенке, а на фиг. 3, *б* – на противоположной гладкой. На симметричных режимах I и II неровность расположена на верхней стенке ($h^{(+)} = h(r)$, $h^{(-)} \equiv 0$), при асимметричном режиме III отдельно рассмотрены случаи неровной верхней ($h^{(+)} = h(r)$, $h^{(-)} \equiv 0$) и нижней ($h^{(-)} = -h(r)$, $h^{(+)} \equiv 0$) стенок. Функции $h^{(+,-)}$ выбраны таким образом, что во всех случаях имеет место локальное “расширение” канала, поэтому над неровностью течение замедляется, а давление возрастает.

Результаты расчета демонстрируют ярко выраженное различие амплитуд возмущений, генерируемых одной и той же неровностью при разных режимах осредненного течения. Хотя все три режима течения имеют отличающиеся конфигурации, это явление, по-видимому, связано с разной скоростью локального обтекания неровности, определяемой величиной сдвига основного течения на искривленной стенке



Фиг. 3. Поведение функции $f'_w = r^2 p'(r, \pm\alpha)$, характеризующей относительное возмущение давления на стенках канала: *a* – на искривленной стенке, *б* – на противоположной (гладкой) стенке; 1 и 2 – для I и II режимов основного течения, 3 и 4 – для III режима (неровность на верхней и нижней стенке, соответственно)

(с формальной точки зрения – с различием коэффициентов во втором граничном условии (1.5)). Приведем величины сдвигов для всех трех режимов течения (индекс соответствует порядковому номеру режима): $\tau_1^{(+)} = -\tau_1^{(-)} = 3.71$, $\tau_2^{(+)} = -\tau_2^{(-)} = 11.40$, $\tau_3^{(+)} = \tau_3^{(-)} = 4.30$. Величина сдвига пристеночного течения в режиме II в 3 раза превышает аналогичную величину для режима I; примерно во столько же раз различаются максимумы интенсивностей соответствующих возмущений.

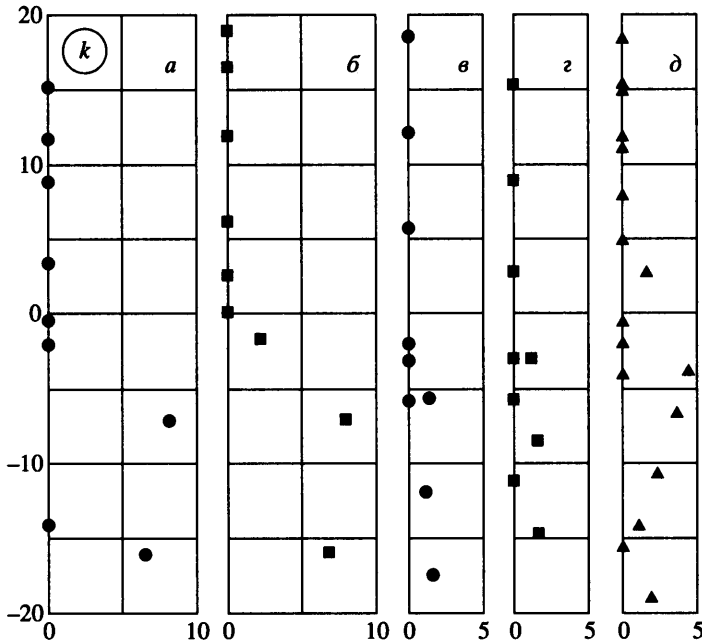
Фигура 3, *a* обнаруживает также качественное различие распределения давления на неровности, расположенной на нижней стенке при несимметричном режиме течения: оно является как бы зеркально отраженным по сравнению с другими распределениями. Эта особенность объясняется местным направлением основного течения: в отмеченном случае неровность обтекается локально расходящимся течением, в то время как в остальных случаях – сходящимся.

Исследуем более детально структуру возмущений вверх и вниз по потоку от неровности. Не ограничивая общности, будем считать, что финитная неровность (2.3) расположена на верхней стенке, а нижняя стенка – плоская ($h^{(+)} = h(r)$, $h^{(-)} \equiv 0$; под величинами τ , q_k подразумеваем $\tau^{(+)}$, $q_k^{(+)}$). Подобно [7], для вычисления интеграла (2.1) при $|r - 1| > l$ замкнем контур интегрирования полуокружностью асимптотически большого радиуса, проходящей в зависимости от знака ξ в верхней (+) или нижней (-) части комплексной плоскости k , и применим интегральную теорему Коши о вычетах. Переходя к переменным r , φ , получим вид возмущения вверх и вниз по потоку от искривленного участка

$$q^{\pm} = \text{sign}(r-1) \sum h_n C_n q_n(\varphi) r^{ik_n}, \quad |r-1| > l \quad (2.4)$$

$$h_n = \int_{1-l}^{1+l} h(r) r^{-(ik_n+2)} dr, \quad C_n = i\tau \text{res } q_{k3}(\alpha)_{k=k_n}$$

Здесь суммирование ведется по бесконечному множеству полюсов k_n фурье-образа q_k , удовлетворяющих условию $\text{sign Im } k_n = \text{sign}(r-1)$. Эти полюса и функции q_n , задаю-



Фиг. 4. Спектры стационарных возмущений течения Гамеля: а, б – спектры симметричных и антисимметричных возмущений для режима I, в, г – то же для режима II, д – спектр возмущений асимметричного режима III

щие поперечные распределения компонент разложения (2.4), удовлетворяют задаче на собственные значения. Приведем здесь более общий вид этой задачи, используемый в разд. 3 при анализе процесса возбуждения нестационарных возмущений (в данном разделе всюду следует считать $\Omega = 0$):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{L}(k_n, \Omega) \mathbf{q}_n &= \mathbf{0} \\
 q_{n1}(\pm\alpha) &= q_{n2}(\pm\alpha) = 0, \quad q_{n3}(\alpha) = 1
 \end{aligned}
 \tag{2.5}$$

Таким образом, вверх и вниз по потоку от неровности возмущение представляет собой суперпозицию стационарных мод течения Гамеля. Комплексная амплитуда каждой моды определяется геометрическим параметром h_n и приведенным коэффициентом порождения C_n , зависящим только от конфигурации основного течения. В отличие от продольно-однородных течений свободные возмущения течения Гамеля имеют не экспоненциальный, а алгебраический вид по переменной r . В случае $Re k_n \neq 0$ эти возмущения имеют колебательный характер с амплитудой, затухающей по степенному закону, и частотой, обратно пропорциональной r .

Математическая постановка задачи о стационарных двумерных модах течения Гамеля содержится в [10]; там же аналитически исследован простейший случай $R \ll 1$. До сих пор оставался открытым вопрос, каким образом стационарные моды вносятся в основное течение. В данной работе подробно исследованы спектры стационарных возмущений для трех конфигураций течения (фиг. 1) и изучен один из возможных механизмов возбуждения стационарных мод (двумерные неровности стенок). Получены формулы (2.4), определяющие амплитуды генерируемых мод по конфигурации основного течения и форме неровностей.

Спектры k_n для всех трех изучаемых режимов течения Гамеля показаны на фиг. 4. Поскольку спектры стационарных возмущений симметричны относительно мнимой

оси комплексной плоскости k , на фигуре приведены только моды с $\text{Re}k_n \geq 0$. В режимах I и II основное течение симметрично, поэтому свободное возмущение общего вида разделяется на симметричную \mathbf{q}'_s и антисимметричную \mathbf{q}'_a части, каждая из которых удовлетворяет линеаризованной системе уравнений Навье – Стокса и условиям прилипания; при этом функции v'_a, u'_s, f'_s, g'_a являются четными, а функции v'_s, u'_a, f'_a, g'_s – нечетными по азимутальной переменной φ . Для симметричных режимов основного течения спектры симметричных и антисимметричных возмущений приведены на фиг. 4 по отдельности. Расчет спектров возмущений k_n производился одновременно с вычислением коэффициентов восприимчивости C_n методом [4].

Опишем также другой возможный способ вычисления коэффициентов порождения мод, основанный на ортогональных свойствах собственных функций. Для формулировки этих свойств введем операцию скалярного произведения вектор-функций \mathbf{x} и \mathbf{y} (звездочкой помечены комплексно сопряженные величины):

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j=1-\alpha}^4 \int x_j^*(\varphi) y_j(\varphi) d\varphi \quad (2.6)$$

Введем также функции \mathbf{q}_n^+ – решения сопряженной задачи на собственные значения

$$\mathbf{L}^+ \mathbf{q}_n^+ = \mathbf{0}, \quad \mathbf{L}^+(k_n, \Omega) = -\frac{d}{d\varphi} - ik_n^* \mathbf{A}^{*T} + \mathbf{B}^{*T}(\Omega) \quad (2.7)$$

$$q_{n3}^+(\pm\alpha) = q_{n4}^+(\pm\alpha) = 0, \quad q_{n2}^+(\alpha) = 1$$

Последнее равенство (2.7) нормирует собственную функцию.

Спектры основной (2.5) и сопряженной (2.7) задач совпадают, а собственные функции, соответствующие разным собственным значениям, обладают свойством ортогональности

$$(\mathbf{q}_n^+, \mathbf{A} \mathbf{q}_m) = 0, \quad n \neq m \quad (2.8)$$

Преобразуем систему уравнений (2.2) к эквивалентному виду

$$i(k - k_n) \mathbf{A} \mathbf{q}_k = -\mathbf{L}(k_n, 0) \mathbf{q}_k$$

скалярно умножим (в смысле (2.6)) полученное соотношение слева на \mathbf{q}_n^+ и совершим предельный переход $k \rightarrow k_n$. В результате получим

$$C_n = \frac{\tau}{(\mathbf{q}_n^+, \mathbf{A} \mathbf{q}_n)}$$

Здесь использовано равенство $(\mathbf{q}^+, \mathbf{L} \mathbf{x}) = x_2(\alpha)$, выполненное для любой гладкой функции $\mathbf{x}(\varphi)$, удовлетворяющей условиям $x_1(\pm\alpha) = x_2(-\alpha) = 0$, а также тот факт, что при $k \rightarrow k_n$ для фурье-амплитуды справедливо асимптотическое представление

$$\mathbf{q}_k(\varphi) = \text{res}_{k=k_n} q_{k3}(\alpha) \frac{\mathbf{q}_n(\varphi)}{k - k_n} + O(1)$$

Разложения (2.4) могут использоваться для численного расчета возмущений в областях течения, лежащих вверх и вниз по потоку от неровности. Эффективность такого метода продемонстрирована на примере расчета относительного возмущения давления на гладкой стенке, противоположащей искривленной, на режиме I (результаты нанесены точками на фиг. 3, б). Вычисление проведено с учетом 23 мод; соответствующие моды, удовлетворяющие условию $\text{Re}k_n \geq 0$, показаны на фиг. 4, а, б. При

фиксированном $r > 1 + l$ (или $r < 1 - l$) ряды (2.4) быстро сходятся: приведенные результаты практически не отличаются от полученных методом Фурье (кривая 1 на фиг. 3, б). Заметим, что вверх по потоку от неровности возмущение сначала растет и лишь затем начинает затухать. Такое поведение возмущения объясняется тем, что на умеренных расстояниях от неровности доминирует осциллирующая компонента разложения (2.4), задаваемая антисимметричными модами с волновыми числами $k = \pm 0.224 - i1.666$: симметричная мода с $k = -i0.421$ хоть и медленнее затухает, однако ее начальная амплитуда в 4 раза меньше.

Таким образом, характерный сдвиг вверх по потоку максимума нормированного возмущения давления на нижней стенке обусловлен локальным ростом доминирующих антисимметричных мод. Чисто колебательное возмущение течения Гамеля на режиме I реализуется вверх по потоку от антисимметричной неровности $h^{(+)} = h^{(-)}$ (разд. 3, фиг. 7).

В двух случаях задача на собственные значения имеет точное решение. Первый ($k = -2i$) связан с тем, что в рамках модели несжимаемой жидкости давление определено с точностью до аддитивной постоянной, а функция f соответственно с точностью до $\text{const} \cdot r^2$; при этом остальные параметры течения не претерпевают изменений. С учетом условия нормировки соответствующее “тривиальное” возмущение задается равенствами $f' = e^{2z}$, $v' = u' = g' = 0$.

Второй случай связан с возможностью бесконечно малого изменения расхода течения Гамеля при сохранении масштабов r^0 , v^0 (см. разд. 1; при этом уже не будет выполнено $\max|U| = 1$). Такая вариация основного течения $Q_u(\varphi)$, характеризуемая компонентами

$$V_u \equiv 0, \quad U_n = \frac{\partial U}{\partial R} + \frac{U}{R}, \quad F_u = \frac{\partial F}{\partial R} + \frac{2F}{R}, \quad G_u = \frac{\partial G}{\partial R} + \frac{2G}{R}$$

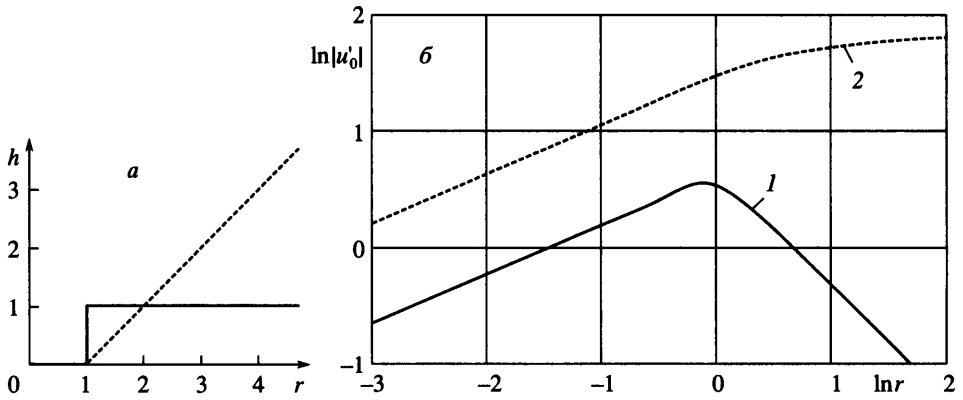
порождает собственное решение $Q_u(\varphi)/F_u(\alpha)$ задачи (2.5), соответствующее собственному значению $k = 0$.

Мода $k = 0$ является единственной модой, не принадлежащей множеству полюсов нормированной фурье-амплитуды возмущения (2.1) (именно поэтому она не приведена на фиг. 4). С физической точки зрения генерация такого возмущения в потоке на стационарной неровности противоречит закону сохранения массы. Само понятие возбуждения моды предполагает ее появление либо выше, либо ниже по потоку от места локализации внешнего воздействия (см. (2.4)). В отношении рассматриваемой моды это означало бы нарушение баланса потоков массы через контрольные сечения канала, расположение вверху и внизу по течению от неровности.

До сих пор изучались возмущения, возбуждаемые локальными искривлениями стенок канала. Ниже приведены два примера расчета возмущений, вносимых в течение Гамеля нелокальными неровностями. В качестве первого рассмотрим уступообразное симметричное расширение канала (фиг. 5, а, сплошная линия). Форма соответствующих неровностей стенок определяется равенствами $h^{(+)} = -h^{(-)} = h(r) : h \equiv 0$ при $r < 1$; $h \equiv 1$ при $r \geq 1$. В этом случае граничные условия для возмущения, выставляемые при $\varphi = \pm\alpha$, имеют разрыв при $r = 1$.

Для расчета возмущения, порождаемого внезапным расширением канала, рассмотрим однопараметрическое семейство неровностей, имеющих вид сглаженных ступенек (d – протяженность сглаживающего участка, H – его форма, определяемая (2.3)):

$$h = \begin{cases} 0, & r < 1 - \frac{d}{2}; 1, r > 1 + \frac{d}{2} \\ H\left(\frac{r-1}{d} - \frac{1}{2}\right), & 1 - \frac{d}{2} \leq r \leq 1 + \frac{d}{2} \end{cases}$$



Фиг. 5. Симметричные стационарные возмущения течения Гамеля в режиме I, вызванные нелокальной неровностью стенок канала: *a* – форма неровностей, *б* – распределения амплитуды относительного возмущения скорости $u'_0 = r v'_r(r, 0)$; *1* – при внезапном расширении канала, *2* – при увеличении угла раствора стенок

Соответствующие функции $\phi^{(+,-)}$, задающие форму неровностей в координатах ξ, φ , являются бесконечно дифференцируемыми и затухают при $\xi \rightarrow \pm\infty$, поэтому для расчета возмущения течения можно снова привлечь преобразование Фурье (2.1).

Асимптотический анализ и численные расчеты показали, что с уменьшением d решение, задаваемое интегралом (2.1), “устанавливается” во всей области течения, за исключением окрестностей изогнутых участков стенок размером $O(d)$. В частности, на оси канала распределение амплитуды относительного возмущения скорости $u'_0 = u'(\xi, 0)$ при $d \rightarrow 0$ быстро сходится к функции, показанной на фиг. 5, *б* линией *1*. Как и следовало ожидать, вдоль всей линии симметрии скорость возмущенного движения ниже, чем в невозмущенном потоке ($u'_0 < 0$). Максимальная величина относительного торможения $u'_0 = -1.74$ достигается при $r = 0.90$.

Вверх и вниз по потоку от уступов возмущение затухает. В силу (2.4) при $r \rightarrow 0$ поведение возмущения определяется симметричной модой, имеющей наименьший декремент затухания: $u'_0 \sim -1.84 \cdot r^{0.42}$. На большом удалении вниз по потоку от уступов возмущенное течение имеет предельный вид течения Гамеля той же конфигурации в угле, сдвинутом влево на величину $\sigma/\sin\alpha$, поэтому при $\xi \rightarrow \infty$ асимптотическое представление возмущения имеет вид $\mathbf{q}' \sim \mathbf{Q}_x(\varphi)e^{-\xi}$, где

$$V_x = -\frac{U \sin \varphi}{\sin \alpha}, \quad U_x = -\frac{1}{\sin \alpha} \left(U \cos \varphi + \frac{dU}{d\varphi} \sin \varphi \right)$$

$$F_x = -\frac{2}{R \sin \alpha} \left[2U \cos \varphi - \frac{1}{2} \frac{d^2 U}{d\varphi^2} (0) \cos \varphi + \frac{dU}{d\varphi} \sin \varphi \right]$$

$$G_x = -\frac{1}{R \sin \alpha} \left(2 \frac{dU}{d\varphi} \cos \varphi + \frac{d^2 U}{d\varphi^2} \sin \varphi \right)$$

На оси симметрии $u'_0 \sim -2r^{-1}$ при $r \rightarrow \infty$. Графики на фиг. 5, б приведены в логарифмическом масштабе, чтобы наглядно продемонстрировать выраженный степенной характер возмущений уже на небольших расстояниях вверх и вниз по потоку от уступов.

Второй пример нелокальной неровности – симметричный излом стенок канала ($h^{(+)} = -h^{(-)} = h(r)$; $h \equiv 0, r < 1$; $h = r - 1, r \geq 1$), приводящий к увеличению полуугла раствора стенок на величину σ (фиг. 5, а, штриховая линия). В координатах ξ, φ форма неровностей описывается не затухающими вниз по потоку функциями ($\phi^{(+,-)} \rightarrow \pm 1$ при $\xi \rightarrow \infty$), поэтому соответствующее возмущение течения не представимо в виде классического интеграла Фурье (2.1): фурье-образы формы неровностей имеют особенность при $k = 0$ ($\phi_k^{(+,-)} \sim k^{-1}$ при $k \rightarrow 0$).

Для расчета возмущения, вносимого в течение симметричным изломом стенок, изменением контур интегрирования в (2.1), обходя полюс $k = 0$ снизу по окружности достаточно малого радиуса с тем, чтобы контур не охватил других полюсов подынтегрального выражения. Компоненты вектор-функции, являющейся результатом интегрирования, удовлетворяют задаче (1.4), (1.5) и условию затухания вверх по потоку. Вниз по потоку картина возмущенного движения асимптотически приближается к течению Гамеля с тем же расходом в канале со стенками, расположенными под углом $2(\alpha + \sigma)$ и сдвинутыми вправо на величину $\sigma/\sin\alpha$, поэтому при $\xi \rightarrow \infty$ возмущение течения описывается двучленным разложением $q' \sim Q_a(\varphi) - Q_r(\varphi)e^{-\xi}$. Главный член разложения представляет собой вариацию основного течения по полууглу раствора стенок при сохранении расхода:

$$Q_\alpha = \frac{\partial Q}{\partial \alpha} + C Q_u, \quad C = - \left[\int_{-\alpha}^{\alpha} \left(\frac{\partial U}{\partial R} + \frac{U}{R} \right) d\varphi \right]^{-1} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\partial U}{\partial \alpha} d\varphi \quad (2.9)$$

Линейное варьирование может быть произведено только в случае, когда пара R, α не является точкой бифуркации решения (1.3), описывающего невозмущенное течение (именно такие параметры основного течения используются в примерах расчета). Постоянная C в (2.9) определена условием равенства 0 возмущения расхода.

Результаты расчета возмущения скорости, производимого на оси канала симметричным изломом стенок, приведены на фиг. 5, б (линия 2). Численный анализ показывает, что относительная скорость возмущенного движения вдоль оси монотонно уменьшается вниз по потоку. При этом имеем: $u'_0 \sim -4.37r^{0.42}, r \rightarrow 0$; $u'_0 \sim -6.29 + 2r^{-1}, r \rightarrow \infty$.

Все построенные выше решения неоднородной задачи (1.4), (1.5) являются равномерно пригодными. В отличие от стационарных мод течения Гамеля при фиксированном $\sigma \ll 1$ параметры изученных вынужденных возмущений всюду малы по сравнению с соответствующими параметрами невозмущенного потока.

3. Метод разложения по собственным функциям. Возбуждение нестационарных колебаний. Рассмотренные задачи о генерации и эволюции стационарных возмущений в течении Гамеля относятся к редкому типу, когда явления устойчивости и восприимчивости продольно-неоднородного течения могут исследоваться теми же методами, что и аналогичные задачи для продольно-однородных течений. С помощью специального выбора продольной независимой переменной, продиктованного подобием основного течения, удастся преобразовать краевую задачу для возмущения к такой форме, когда коэффициенты при искомым функциях не зависят от этой переменной.

В случае нестационарных возмущений продольная неоднородность краевой задачи не может быть устранена. В связи с этим в [6] для анализа процесса распространения

нестационарных свободных возмущений в течении Гамеля использовался метод вариации постоянных. В данной работе этот метод применяется для расчета вынужденных возмущений, порождаемых двумерными гармоническими колебаниями участков стенок диффузора.

Будем искать решение неоднородной задачи (1.4), (1.5) в виде разложения

$$\mathbf{q}' = \mathbf{q}_0(\varphi; \xi) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(\xi) \mathbf{q}_n(\varphi; \xi) \quad (3.1)$$

В качестве первого слагаемого в (3.1) может быть выбрана любая гладкая функция, удовлетворяющая условиям (1.5); для упрощения записи ниже в этой роли используется вынужденное возмущение, рассчитанное в квазиоднородном приближении

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{q}_0}{d\varphi} + \mathbf{B}(\omega e^{2\xi}) \mathbf{q}_0 &= \mathbf{0} \\ q_{01}(\pm\alpha; \xi) &= -i\omega e^{2\xi} \phi^{(+,-)}(\xi), \quad q_{02}(\pm\alpha; \xi) = -\tau^{(+,-)} \phi^{(+,-)}(\xi) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Бесконечная сумма в правой части (3.1) представляет собой суперпозицию мод локально-однородной задачи, соответствующих частотному параметру $\Omega = \omega e^{2\xi}$; комплексные коэффициенты разложения – неизвестные функции, подлежащие определению.

Для вывода системы уравнений, которым удовлетворяют коэффициенты c_n , запишем систему (1.4) в векторной форме

$$\frac{\partial \mathbf{q}'}{\partial \varphi} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{q}'}{\partial \xi} + \mathbf{B}(\omega e^{2\xi}) \mathbf{q}' = \mathbf{0}$$

подставим в нее разложение (3.1), скалярно умножим полученное векторное равенство слева на \mathbf{q}_n^+ и проинтегрируем результат по φ от $-\alpha$ до α . С учетом соотношений ортогональности (2.8) получим бесконечномерную неоднородную систему обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами для комплексных амплитуд $c_n(\xi)$ нормальных мод

$$\begin{aligned} \frac{dc_n}{d\xi} &= \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm}(\xi) c_m + b_n(\xi), \quad n = 1, 2, \dots \\ a_{nm} &= ik_n \delta_{nm} - \frac{(\mathbf{q}_n^+, \mathbf{A} \mathbf{q}_m^{\cdot})}{(\mathbf{q}_n^+, \mathbf{A} \mathbf{q}_n)}, \quad b_n = -\frac{(\mathbf{q}_n^+, \mathbf{A} \mathbf{q}_0^{\cdot})}{(\mathbf{q}_n^+, \mathbf{A} \mathbf{q}_n)}, \quad (\cdot)^{\cdot} = \frac{\partial}{\partial \xi} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Система (3.3) представляет явление генерации возмущений на колеблющихся неровностях стенок в форме эволюции нормальных мод локально-однородной задачи. Эта эволюция характеризуется тремя параллельно идущими процессами: распределенной генерацией мод (вектор b_n в правой части (3.3)), независимой эволюцией мод в локально-однородном течении (первое слагаемое в выражении для матрицы a_{nm}) и рассеянием мод друг в друга на местной неоднородности осредненного течения (второе слагаемое в a_{nm}). Как и решение задачи (1.4), (1.5), решение эквивалентной ей неоднородной задачи (3.1)–(3.3) определено с точностью до произвольной суперпозиции нестационарных свободных возмущений течения Гамеля, изученных в [6]; они определены множеством линейно независимых решений системы (3.3) для случая $b_n \equiv 0$. Ниже приводятся примеры расчета частного решения неоднородной системы (3.3).

Для выделения единственного решения задачи наложим на возмущение дополнительные краевые условия вверх и вниз по потоку от колеблющихся участков. Будем по-прежнему считать, что колебания стенок происходят на ограниченном участке $|r-1| < l$. По аналогии с условиями затухания стационарных возмущений будем выставлять на границах колеблющейся секции канала следующие условия:

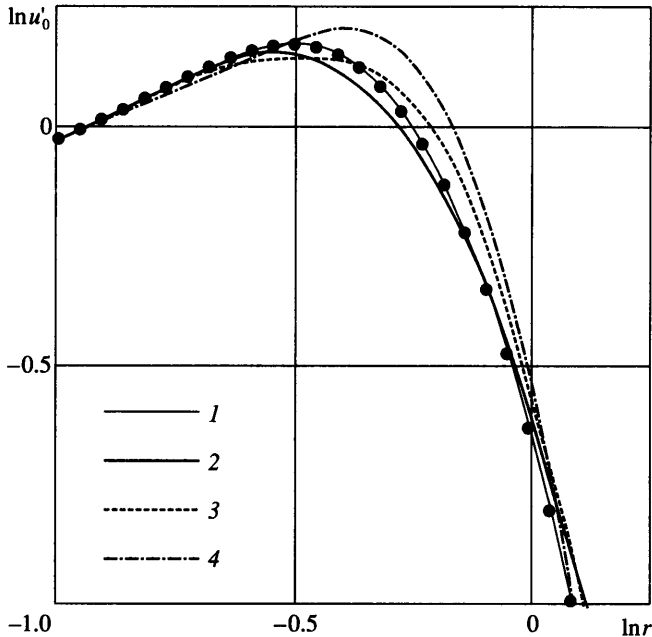
$$\begin{aligned} \operatorname{Im} k_n(-\infty) > 0: c_n(\xi) \rightarrow 0, \quad \xi \rightarrow -\infty \\ \operatorname{Im} k_n(-\infty) < 0: c_n(\xi) \rightarrow 0, \quad \xi \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (3.4)$$

Подобно методу Фурье для решения стационарной задачи, применяемый здесь метод вариации постоянных фактически приводит к разделению переменных. Для вычисления входящих в систему (3.3) матрицы a_{nm} и вектора b_n сначала производится интегрирование по азимутальной переменной φ при фиксированных ξ (расчет решений прямой (2.5) и сопряженной (2.7) задач на собственные значения, а также неоднородной задачи (3.2); величины \mathbf{q}_0 и \mathbf{q}_n находятся из решения продифференцированных по ξ задач для \mathbf{q}_0 и \mathbf{q}_n соответственно). Затем краевая задача (3.3), (3.4) интегрируется по продольной переменной ξ . В данной работе решения всех этих задач вычислялись методом Рунге – Кутты с использованием процедуры ортогонализации [11]. При расчетах бесконечная сумма (3.1) заменялась конечной; соответственно бесконечномерная задача (3.3), (3.4) аппроксимировалась обрезанной конечномерной. В число M учитываемых мод включались моды в порядке возрастания $|k_n|$.

Тестирование предлагаемого метода производилось на примере задачи расчета стационарных возмущений течения Гамеля в режиме I, вносимых симметричным локальным расширением канала $h^{(+)} = -h^{(-)} = h(r)$ формы (2.3) ($l = 0.5$; фиг. 2, а). В этом случае неоднородная компонента разложения (3.1) имеет явный вид $\mathbf{q}_0 = \mathbf{Q}_\alpha(\varphi)\phi(\xi)$, матрица усиления (первое слагаемое в выражении (3.3) для a_{nm}) постоянна, а матрица рассеяния (второе слагаемое) тождественно равна 0. На фиг. 6 произведено сопоставление результатов расчетов, выполненных различными методами для относительно го изменения скорости на оси канала: точками показаны результаты вычисления методом Фурье, линиями – методом вариации постоянных для различного числа учитываемых мод. Жирной линией 2 выделен расчет с учетом мод, приведенных на фиг. 4, а ($M = 11$). Результаты показывают, что даже одномодовое приближение (линия 4) дает точность порядка 10%, а при $M = 24$ (линия 1, $|k_n| < 40$) результаты практически не отличаются от точных, полученных по методике разд. 2.

Проведенное апробирование метода обосновывает перспективность его применения для точного расчета задач устойчивости и восприимчивости неоднородных течений. В данной работе с его помощью изучались нестационарные возмущения течения Гамеля в режиме I, генерируемые гармоническими колебаниями участков стенок канала. На фиг. 7 приведены результаты расчета комплексной функции $v'_0 = v'(\xi, 0)$, характеризующей амплитуду и фазу пульсаций азимутальной скорости на оси канала при локальных антисимметричных синфазных колебаниях стенок ($h^{(+)} = h^{(-)} = h(r)$). Форма вибрирующих неровностей снова задана равенством (2.3) с $l = 0.5$ (локализация вибрирующей секции отмечена на фигуре штрихпунктирными линиями). Для контроля точности были произведены расчеты решения соответствующей стационарной задачи ($\omega = 0$). На фиг. 7 линией 1 отмечены результаты вычисления методом разложения (3.1) с использованием мод, показанных на фиг. 4, б, а точками изображены результаты расчета методом Фурье. Поскольку результаты хорошо совпадают, при расчете нестационарной задачи использовалось то же количество мод ($M = 12$).

На фиг. 7 продемонстрированы результаты расчета нестационарного вынужденного возмущения ($\omega = 1$). Линия 2 соответствует распределению азимутальной скоро-



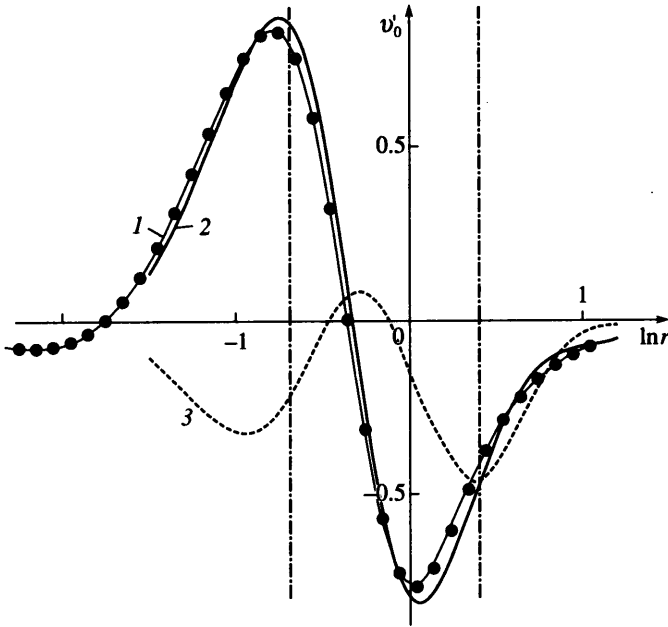
Фиг. 6. Стационарные симметричные возмущения течения Гамеля в режиме I при локальном расширении канала, рассчитанные с учетом динамики $M = 24, 11, 6, 1$ мод (кривые 1–4)

сти в момент, когда стенки испытывают максимальное отклонение, а скорости их точек равны 0. Расчет показывает, что в указанный момент параметры возмущения внутри вибрирующей секции мало отличаются от параметров стационарного возмущения, вызванного соответствующей “замороженной” неровностью. Линией 3 показана структура возмущения через четверть периода колебаний, т.е. в момент, когда стенки канала плоские, а скорость их движения максимальна. Хотя скорость стенок в этот момент всюду отрицательна, на оси канала имеется участок, где азимутальная скорость положительна, что указывает на существенно нестационарный характер возмущенного движения.

Заключение. Предложены методы исследования восприимчивости вязких течений с сильной продольной неоднородностью. Процесс возбуждения собственных колебаний изучен на примере симметричных и асимметричных течений Гамеля. В качестве физических факторов, порождающих возмущения, рассмотрены случаи стационарной неровности и локализованной вибрации стенок канала.

С помощью замены независимых переменных и искомого параметров возмущенного движения задача о генерации стационарных возмущений над неровностью сводится к продольно-однородной краевой задаче, решение которой построено с использованием преобразования Фурье по продольной переменной. Показано, что вверх и вниз по потоку от неровности возмущение представляет собой суперпозицию стационарных мод. Получены формулы, определяющие амплитуды генерируемых мод по конфигурации основного течения и форме неровностей. Амплитуда и форма распределения результирующего возмущения определяются высотой неровности, а также величиной сдвига и направлением пристеночного течения.

В общем случае нестационарных возмущений эта же проблема исследована другим методом, основанным на представлении искомого решения в виде суперпозиции



Фиг. 7. Нестационарные распределения азимутальной скорости на оси канала $v'_0 = rv_\varphi(r, 0)$ для возмущения течения Гамеля в режиме I, порожденного локальной антисимметричной вибрацией стенок: 1 – $\omega = 0$; 2, 3 – $\omega = 1$ (2 – $\text{Re } v'_0$, 3 – $\text{Im } v'_0$)

решений задачи для случая гладких стенок и вынужденного решения, вычисляемого в локально-однородном приближении. Физическая интерпретация метода заключается в представлении эволюции возмущений в форме трех процессов: распределенной генерации мод, их независимого усиления или ослабления в локально-однородном течении и их рассеяния друг в друга на местной неоднородности осредненного течения. Показано, что высокая точность расчета может быть обеспечена уже при сравнительно небольшом числе учитываемых мод. В случае стационарных возмущений второй метод протестирован на базе точного решения, построенного с помощью преобразования Фурье.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 02-01-00149, 04-01-00632) и Государственной программы поддержки ведущих научных школ (НШ-1984.2003.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Качанов Ю.С., Козлов В.В., Левченко В.Я. Возникновение турбулентности в пограничном слое. Новосибирск: Наука, 1982. 151 с.
2. Fasel H. Investigation of the stability of boundary layers by a finite-difference model of the Navier-Stokes equations // J. Fluid Mech. 1976. V. 78. Pt 2. P. 355–383.
3. Bertolotti F.P., Herbert T., Spalart P.R. Linear and nonlinear stability of the Blasius boundary layer // J. Fluid Mech. 1992. V. 242. P. 441–474.
4. Мануйлович С.В. Распространение возмущений в плоском течении Пуазейля между стенками неоднородной податливости // Изв. РАН. МЖГ. 2003. № 4. С. 29–46.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.

6. Мануйлович С.В. Пространственная эволюция нестационарных возмущений в течении Гамеля // Изв. РАН. МЖГ. 2004. № 2. С. 42–56.
7. Мануйлович С.В. О восприимчивости плоского течения Пуазейля к вибрации стенок канала // Изв. РАН. МЖГ. 1992. № 4. С. 12–19.
8. Tumin A. Receptivity of pipe Poiseuille flow // J. Fluid Mech. 1996. V. 315. P. 119–137.
9. Мануйлович С.В. О прохождении волны неустойчивости через участок канала переменной ширины // Изв. АН СССР. МЖГ. 1992. № 2. С. 34–41.
10. Banks W.H.H., Drazin P.G., Zatorska M.B. On perturbations of Jeffery-Hamel flow // J. Fluid Mech. 1988. V. 186. P. 559–581.
11. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. 1961. Т. 16. Вып. 3. С. 171–174.

Москва
e-mail: manu@resp.aerocentr.msk.su

Поступила в редакцию
31.X.2003