

УДК 532.516.5

© 2004 г. В. И. ГРАБОВСКИЙ

## ОПТИМАЛЬНЫЙ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИЙ РАДИАЛЬНЫЙ ПОДШИПНИК С ОТКРЫТЫМИ ТОРЦАМИ И ПИТАЮЩЕЙ ЩЕЛЬЮ

Методами вариационного исчисления проведено оптимальное профилирование формы цилиндрических внешних обводов газодинамического радиального подшипника с учетом перетекания смазки через его торцы и питающую щель при сохранении массы смазки в рабочем зазоре. Сформулирована и решена вариационная задача определения формы зазора, реализующей максимум несущей способности подшипника. Использовано модифицированное условие Элрода – Бургдорфера для давления.

*Ключевые слова:* газодинамический радиальный подшипник, торцы и питающая щель, несущая способность, профилирование формы зазора.

Оптимальное профилирование газодинамических радиальных подшипников имеет большое значение для создания конкретных технических устройств. Помимо оптимизации параметров подшипников с помощью решения прямых задач большое место занимают исследования с привлечением вариационных методов. Наибольшее внимание уделялось профилированию зазоров подшипников по несущей способности (задача Рэлея) [1–4], параметрам устойчивости [5, 6] и сопротивлению на валу [7, 8]. В соответствии с [9–11] режим работы замкнутых подшипников определяется одним из трех дополнительных условий: заданием давления на продольной образующей (условие питающей щели), фиксированием массы смазки в зазоре подшипника и учетом сообщения смазочного слоя с внешней средой на торцах (условие Элрода – Бургдорфера). Во всех трех случаях отсутствует утечка смазки из зазора, причем в первых двух случаях это обеспечивается закрытыми торцами подшипника, а в третьем, при открытых торцах – указанным условием. Последнее справедливо в подшипниках как конечной, так и бесконечной длины, когда осуществляется равновесие между смазкой, вытекающей из зазора в некоторой зоне торцов и поступающей в него в остальной их части. При этом в центральной части достаточно длинного подшипника продольного (вдоль оси) течения смазки нет, и перетекание смазки осуществляется лишь вблизи его торцов [12]. Третье условие представляется более реальным, так как обеспечить на практике полное изолирование торцов от внешней среды затруднительно. В [13] предложено модифицированное (комбинированное условие) условие, включающее условия питающей щели и Элрода – Бургдорфера. Комбинированное условие отражает баланс втекающей и вытекающей смазки через питающую щель и торцы подшипника. Его обобщение на случай сжимаемой изотермической смазки имеет вид

$$\int_0^{2\pi} h^3 (p^2 - p_a^2) d\theta + \sigma (p_c^2 - p_a^2) = 0$$

где  $h$  и  $p$  – зависящие только от угловой координаты  $\theta$  функции – высота зазора и давление в нем. Для изотермической газовой смазки плотность  $\rho$  – линейная функция давления. Внешнее давление на торце подшипника –  $p_a$ . Принимается, что внешнее

давление над щелью также равно  $p_a$ . Давление в зазоре в сечении щели –  $p_c$ . В выписанном условии первое слагаемое отвечает суммарному осевому потоку смазки через торец, а второе – радиальному потоку через боковую щель, который отличается от нуля при  $p_c \neq p_a$ . Для бесконечного и конечного, но достаточно длинного подшипника течение смазки можно считать одномерным с давлением в смазочном слое, осредненным по его длине. Применимость одномерного приближения обуславливается незначительным продольным изменением давления в средней части подшипника и быстрым экспоненциальным его изменением вблизи торцов [13].

Размерный параметр  $\sigma = \Delta_c^3 L^2 \tau^{-1}$ , где  $\Delta_c$  и  $l$  – ширина и высота щели, а  $L$  – длина подшипника, определяет вклад суммарных потоков смазки через торец и питающую щель. При  $\sigma \rightarrow 0$  роль щели незначительна, и комбинированное условие переходит в условие Элрода – Бургдорфера. При  $\sigma \rightarrow \infty$ , наоборот, несущественно перетекание смазки в торцах, и комбинированное условие сводится к условию питающей щели:  $p_c = p_a$ .

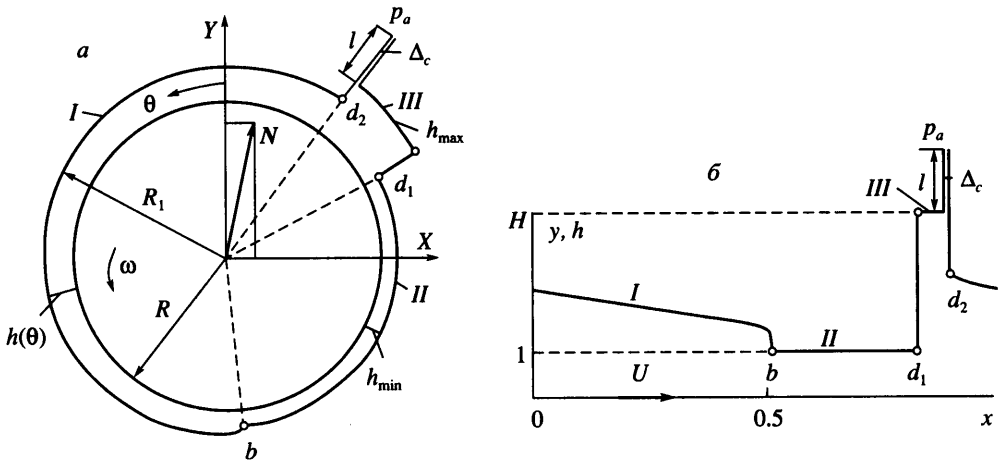
Вариационные задачи оптимизации радиальных подшипников до сих пор решались с условиями питающей щели и фиксированной массы смазки. Для плоского периодического ползуна задача определения зазора с максимальной несущей способностью при выполнении условия Элрода – Бургдорфера была решена Ю.Я. Болдыревым.

В настоящей работе выписанное выше комбинированное условие и его предельные случаи используются при решении вариационной задачи по определению формы зазора радиального подшипника, которая для сжимаемой смазки реализует максимум несущей способности.

Отметим роль верхнего ( $h \leq h_{\max}$ ) и нижнего ( $h \geq h_{\min}$ ) ограничений на максимальную и минимальную высоту зазора подшипника в вариационных задачах. В задачах Рэлея (на максимум несущей способности) обязательно нижнее ограничение. Как показано далее, в изучаемой проблеме существенны оба ограничения. Величина  $H = h_{\max} h_{\min}^{-1}$  является параметром задачи. Ранее такая же особенность решений отмечалась в [14], где в вариационной задаче на максимум несущей способности использовалось условие заданной массы несжимаемой смазки, и в [15], где определялась форма подпятника с наибольшей несущей способностью.

1. Рассматривается длинный радиальный подшипник с сжимаемой изотермической смазкой. Его длина  $L \gg R$ , где  $R$  – радиус вала (шипа). Выбираются цилиндрические координаты  $r, \theta, z$  с осью  $z$ , направленной по оси. Вал вращается против часовой стрелки с угловой скоростью  $\omega$ , а цилиндрический подшипник, уравнение поверхности которого  $r = R_1(\theta)$ , неподвижен (фиг. 1, а). Таким образом, поверхность вала движется с постоянной окружной скоростью  $U = R\omega$ . Вводится высота зазора  $h(\theta) = R_1(\theta) - R$ , удовлетворяющая неравенствам  $0 < h \ll R$ . При переходе к переменным  $x = \theta(2\pi)^{-1}$  и  $y = r - R$  ( $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq h$ ) (фиг. 1, б), причем  $x$ , как и  $\theta$ , – циклическая переменная, для усредненных по длине параметров смазочного слоя получается известное одномерное уравнение газовой смазки. Форму зазора определяет его граница  $h(x)$ . Толщина зазора  $h(x)$  имеет минимально возможную величину  $h_{\min}$  в качестве физического ограничения. Координата  $y = h_{\max}$  связана с верхним ограничением на высоту зазора. Условие применимости приближения смазки является неравенство  $h_{\max} \ll R$ .

В общем случае оптимальная  $h$ , как известно, может иметь ступеньки при  $x = x_{dk}$ . Сечения  $b, d_1$  и  $d_2$  – сечения сопряжения участков оптимальности разных типов, в которых  $h$  может рваться. При этом давление и удельный расход смазки (расход смазки на единицу длины) непрерывны. Параметрам, в частности  $h$ , в разрывах приписываются соответствующие индексы и дополнительно знак минус (плюс) для значений до (после) разрыва по направлению движения вала. На фиг. 1 зазоры изображены в уве-



Фиг. 1. К постановке задачи: конфигурация зазора подшипника в цилиндрических координатах (а) и развернутая форма зазора  $h(x)$  (б), I, II, III – участки оптимальности

личном масштабе. Вязкость газа  $\mu$  и его температура полагаются постоянными, а плотность  $\rho$  пропорциональна давлению –  $\rho \sim p$ .

Геометрические размеры радиальной питающей щели удовлетворяют неравенствам  $\Delta_c \ll R$ ,  $\Delta_c \ll l$  и  $l \ll L$ . Поэтому радиальное течение смазки в ней также описывается уравнениями смазки. На внешнем конце щели так же, как в торцах подшипника, давление равно давлению окружающей среды (или ресивера со смазкой).

Вводятся безразмерные переменные, принимая за масштабы  $r$  и  $y$ ,  $h$  соответственно  $R$  и  $h_{min}$ , за масштабы давления и скорости  $V(u, v) - \gamma p_a U^2$  и  $U$ . Безразмерный комплекс  $\gamma$  связан с параметром сжимаемости (числом подшипника)  $\chi$  [9–11] равенством (различие вызвано разным выбором характерных величин для длины и давления)

$$\gamma = \frac{12\pi R\mu}{\rho_a h_{min}^2 U}, \quad \chi = \gamma M^2 (2\pi)^{-1}, \quad M^2 = U^2 \rho_a \rho_a^{-1}$$

где  $\rho_a$  соответствует внешнему давлению.

В принятых безразмерных переменных уравнение Рейнольдса для определения давления в смазочном слое имеет вид

$$p' = (h - qp^{-1})h^{-3}, \quad q = 2Q = 2 \int_0^h \rho u dy = \text{const}, \quad Q = Q_{\text{разм}} (\rho_a U L h_{min})^{-1} (\gamma M^2)^{-1} \quad (1.1)$$

где штрих – дифференцирование по  $x$ , а  $Q$  – постоянный удельный расход смазки в окружном направлении. Его постоянство обусловлено малостью расхода смазки через щель и торцы.

Граничные условия прямой задачи (при заданных  $h$  и положении щели  $x_c$ ) включают в себя условие периодичности для давления. Однако его недостаточно. Как уже указывалось, дополнительное условие для давления принимается в виде комбинированного интегрального соотношения. Ввиду окружной неоднородности распределения давления  $p(\theta)$  смазка, оставаясь в постоянном количестве в зазоре, вытекает на одних участках торца и втекает на других, а также втекает или вытекает через щель в зависимости от ее расположения. Соотношение этих потоков определяется параметром  $\sigma$ .

Решение задачи зависит от безразмерных параметров  $\sigma$ ,  $p_a$  и  $H$

$$\sigma = \frac{L^2}{2\pi Rl} \left( \frac{\Delta_c}{h_{\min}} \right)^3, \quad p_a = (\gamma M^2)^{-1}, \quad H = h_{\max} h_{\min}^{-1} \quad (1.2)$$

Обозначая через  $N_Y$  и  $N_X$  – размерные вертикальную и боковую составляющие силы  $N$ , действующей на вал из-за окружной неравномерности распределения давления по его поверхности, вводится коэффициент несущей способности  $C_N$  равенством

$$C_N = \frac{\sqrt{N_X^2 + N_Y^2}}{2\pi R L \gamma p_a U^2}, \quad C_Y = -\int_0^1 p \cos \theta dx, \quad C_X = \int_0^1 p \sin \theta dx, \quad \theta = 2\pi x, \quad \cos \theta_N = \frac{C_Y}{C_N} \quad (1.3)$$

где  $\theta_N$  – угол направления вектора несущей способности  $N$ .

Формулируется следующая вариационная задача. Найти такое распределение высоты зазора  $h(x)$ , которое обеспечивало бы максимум  $C_N$  при давлении, определяемом из (1.1) с условиями периодичности и комбинированном условии. Предполагается, что  $h$  ограничено снизу и сверху, что соответствует неравенствам

$$1 \leq h(x) \leq H \quad (1.4)$$

2. Для решения поставленной задачи определения оптимальной формы зазора составляется вспомогательный функционал Лагранжа  $J$

$$J = C_N + \int_0^1 \lambda \phi dx + 0.5\beta \left\{ \int_0^1 h^3 (p^2 - p_a^2) dx + \sigma (p_c^2 - p_a^2) \right\}, \quad \phi = hp - ph^3 p' - q$$

где  $\beta$  – постоянный, а  $\lambda(x)$  – переменный множители Лагранжа, а  $\phi = 0$  эквивалентно уравнению (1.1). При  $\beta \rightarrow 0$  данная изопериметрическая задача переходит в задачу Рэлея для радиального подшипника с питающей щелью [1–4]. Коэффициент  $C_N$  соответствует результирующей силе, в общем случае, под углом  $\theta_N$ . Если  $\theta_N = 0$ , то  $C_N = C_Y$ , а  $C_X = 0$ .

Для определения необходимых условий оптимальности функционал  $J$  варьируется согласно известным правилам. При любом допустимом варьировании его и оптимизируемого функционала  $C_N$  из (1.3) их вариации совпадают при любых ограниченных множителях Лагранжа, поэтому для оптимальной высоты зазора справедливо условие

$$\Delta J = \Delta C_N \leq 0 \quad (2.1)$$

при любых вариациях  $\delta h$ , удовлетворяющих неравенствам (1.4). Прделав необходимые выкладки с учетом непрерывности  $p$  и  $q$  в сечениях  $d$  возможных скачков  $h$ , получаем выражение для  $\Delta C_N$ , справедливое для любой (необязательно оптимальной)  $h(x)$  и пока произвольных  $\beta$  и  $\lambda$

$$\Delta C_N = \sum_{k=1}^m \{ [(\lambda h^3)_+ - (\lambda h^3)_- + \beta \sigma] p \Delta p + X \Delta x \}_{dk} - \Delta q \int_0^1 \lambda dx + \int_0^1 (A_h \delta h + A_p \delta p) dx \quad (2.2)$$

$$X_{dk} = [\lambda_- (ph_- - q) - \lambda_+ (ph_+ - q)]_{dk} + 0.5\beta (h_-^3 - h_+^3)_{dk} (p_{dk}^2 - p_a^2) \quad (2.3)$$

$$A_p = (\lambda h^3)' + \lambda h p^{-1} + \beta h^3 - \cos(\theta - \theta_N) p^{-1} \quad (2.4)$$

$$A_h = 2h^{-1} [0.75\beta h^3 (p^2 - p_a^2) + \lambda (1.5q - ph)] \quad (2.5)$$

Суммирование в (2.2) проводится по всем  $m$  возможным скачкам  $h$ . В выражениях (2.3) и (2.4) использовано выражение для  $p'$  из (1.1). Величины  $\Delta p_{dk}$  и  $\Delta x_{dk}$  – разности  $p$  и  $x$  в сечениях  $x_{dk}$  для проварьированного и непроварьированного зазоров, а  $\delta p$ ,  $\delta h$  и  $\Delta q$  – соответствующие вариации функций и расхода при фиксированном  $x$ . Параметр  $\sigma$  присутствует только в выражениях, относящихся к разрыву  $h$ . Поэтому положение питающей щели должно совпадать с разрывом –  $x_c = x_d$  и  $p_c = p_d$ . При этом в общем случае может быть несколько щелей соответственно имеющимся разрывам.

В согласии с выражением (2.2) формулируется сопряженная задача, определяющая множитель  $\lambda$  для любых зазоров (в том числе неоптимальных), которые в силу условия (1.4) могут быть образованы участками с кусочно-непрерывной функцией  $h(x)$ . Получается уравнение с дополнительными условиями

$$(\lambda h^3)' + \lambda h p^{-1} + \beta h^3 - \cos(\theta - \theta_N) p^{-1} = 0 \quad (2.6)$$

$$[(\lambda h^3)_+ - (\lambda h^3)_-]_{dk} + \beta \sigma = 0, \quad \int_0^1 \lambda dx = 0 \quad (2.7)$$

Явного граничного условия для дифференциального уравнения (2.6) нет, оно подбирается в ходе решения для удовлетворения интегрального условия (2.7). Из первого выражения (2.7) следует, что функция  $\lambda(x)$  – разрывная на разрывах  $h$ .

Таким образом, сопряженная задача для  $\lambda$  может быть решена при известной разрывной функции  $h(x)$ . При этом прямая задача определения давления  $p$  также может быть решена интегрированием уравнения (1.1) с условиями периодичности и параметрами  $q$  и  $p_0 = p(x_0)$ , определяемыми в процессе решения. Координата  $x_0$  может быть любой.

Условия оптимальности для  $h$  вытекают при анализе (2.2), (2.5), откуда следует, что  $h(x)$  состоит из участка двустороннего экстремума  $I$  и двух участков краевых экстремумов  $II$  и  $III$ , где соответственно  $h = 1$  и  $h = H$  (фиг. 1). На участке  $I$  функция  $h(x)$  определяется условием обращения в нуль  $A_h$ , т.е. равенством (алгебраическим уравнением третьего порядка)

$$0.75\beta h^3(p^2 - p_a^2) + \lambda(1.5q - ph) = 0 \quad (2.8)$$

В силу (1.4) на участке  $II$  допустимые  $\delta h \geq 0$ , а на  $III$  –  $\delta h \leq 0$ . Поэтому с учетом (1.4) и (2.1) на этих участках условия оптимальности соответственно принимают вид неравенств

$$0.75\beta(p^2 - p_a^2) + \lambda(1.5q - p) \leq 0 \quad (2.9)$$

$$0.75\beta(p^2 - p_a^2)H^3 + \lambda(1.5q - Hp) \geq 0 \quad (2.10)$$

Разные участки могут стыковаться с разрывом  $h$  или без него. Для оптимальной разрывной стыковки необходимо обращение в нуль коэффициента при  $\Delta x_d$  из (2.2)

$$[\lambda_-(ph_- - q) - \lambda_+(ph_+ - q)]_d + 0.5\beta(h_-^3 - h_+^3)_d(p_d^2 - p_a^2) = 0 \quad (2.11)$$

Это соотношение вместе с первым из (2.7) служит определению положений разрывов  $h - x_{dk}$ . Участки краевых экстремумов  $II$  и  $III$  естественно стыкуются с разрывом  $h$  ( $x = x_{d1}$ ), и на нем, согласно (2.7) и (2.11), для  $\lambda$  получаются соотношения

$$\begin{aligned} \lambda_{d1+} &= (\lambda_{d1-} - \beta\sigma)H^{-3} \\ \lambda_{d1-} &= \beta\{0.5(p_{d1}^2 - p_a^2)H^3(H^3 - 1) + \sigma(q - Hp_{d1})\}[H^3(p_{d1} - q) + q - Hp_{d1}]^{-1} \end{aligned} \quad (2.12)$$

где  $\lambda_{d1-}$  соответствует участку II, а  $\lambda_{d1+}$  – III. Заметим, что если положить в (2.12)  $\sigma = 0$ , то эти равенства будут отвечать разрыву без питающей щели.

Рассмотрим стыковку участка I с участками II и III. При  $\beta \rightarrow 0$  трансформируется в участок двустороннего экстремума задачи Рэля с  $h_R = 1.5qp^{-1}$  и разрывами  $h$  на концах участка. Причем в этих сечениях  $\lambda$  должно стремиться к нулю [1–4]. При  $\beta \neq 0$  согласно соотношению (2.8) участок I существенно видоизменяется, имея большие отрицательные производные на его концах (см. фиг. 1, б). Он стыкуется с участком II непрерывным образом в сечении  $b$  с растущей по модулю  $h'$  при  $\beta \rightarrow 0$ . Вблизи сечения  $d_2$  стыковки с участком III эта производная растет из-за близости  $p$  к  $p_a$ . При  $p \rightarrow p_a$  высота  $h \rightarrow \infty$ . По этой причине необходимо решать задачу с ограничением  $h \leq H$ . Ввиду значительного роста  $h$  в сечении  $d_2$  здесь можно ввести разрыв  $h$  при выполнении условий оптимальности (2.7), (2.10) и (2.11) с учетом того, что  $h_{d2-} = H$  и  $h_{d2+}$  удовлетворяет (2.8). Тогда при известных  $p_a, p_{d2}$  и  $q$  определяются  $h_{d2+} \neq H, \lambda_{d2-}$  и  $\lambda_{d2+}$  по системе уравнений (индекс  $d2$  опускается)

$$h_+^3 + \lambda_+(h_R - h_+)B = 0, \quad 1 < h_+ < H, \quad h_R = 1.5qp^{-1}, \quad B = p[0.75\beta(p^2 - p_a^2)]^{-1}$$

$$\lambda_+ = (\lambda_- H^3 - \beta\sigma)h_+^{-3}$$

$$\lambda_- = \beta\{0.5h_+^3(H^3 - h_+^3)(p^2 - p_a^2) - \sigma(q - h_+p)\}[h_+^3(q - Hp) - H^3(q - h_+p)]^{-1}$$

Отсюда получается алгебраическое уравнение шестого порядка относительно переменной  $z = h_+/H < 1$

$$(1 - z)^2(a_4z^4 + 2a_4z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0) - c\sigma = 0$$

$$c = 2(q - Hp)(3q - 2Hpz)H^{-6}(p^2 - p_a^2)^{-1}$$

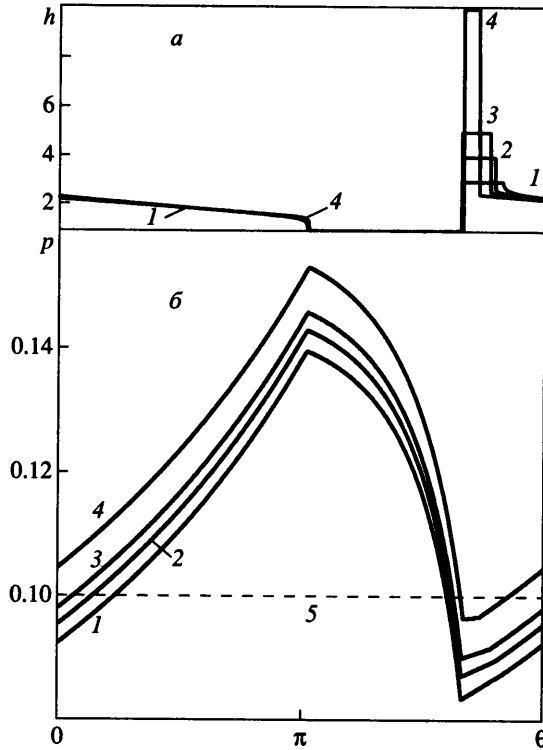
$$a_4 = 3(q - Hp), \quad a_2 = 9q - 4Hp, \quad a_1 = 2(3q - Hp), \quad a_0 = 3q$$

Таким образом, задача состоит в определении  $p, \lambda$  и  $h$  на каждом из указанных участков решением соответствующих дифференциальных и алгебраических уравнений. Константы  $q, \beta$  и  $p_0, x_0$  находятся из граничных и интегральных условий задачи. Параметр  $p_0$  вводится в процессе решения задачи для определения уровня давления и соответствует его значению в условно выбранной в качестве начальной точке  $x_0$ . Контролируются условия (2.9), (2.10) на участках краевых экстремумов.

Питающая щель может быть расположена в каждом из рассмотренных типов разрывов, либо в одном из них, либо вообще отсутствовать. Это регулируется параметрами  $\sigma_{d1}$  и  $\sigma_{d2}$  в соответствии с формулой (1.2). Все эти возможности рассматриваются.

3. Представляемые здесь результаты расчетов отвечают параметрам:  $\theta_N = 0, \sigma_{d1} = 0, p_a = 10^{-1}, 10^{-2}$  и разным  $H$  и  $\sigma_{d2}$ . Угол  $\theta_N = 0$  соответствует вертикально направленной результирующей несущей способности, а  $\sigma_{d1} = 0$  – отсутствию питающей щели в сечении  $x_{d1}$ . Заметим, что оптимальная форма зазора зависит от  $\chi$  (или  $p_a$ ) в отличие от случая несжимаемой смазки. Значение  $\gamma$  определяет применимость приближения теории смазки, и оно должно быть большим. То же самое должно быть и для этого же параметра, подсчитанного по максимальной высоте зазора. Это накладывает ограничительные сверху на величину параметра  $H$ , поэтому результаты при больших  $H$ , например при  $H \sim 50$ , представляют лишь теоретический интерес как приближение к предельному случаю  $H = \infty$ .

1. Рассмотрим сначала случай отсутствия питающих щелей вообще, то есть и  $\sigma_{d2} = 0$ . На фиг. 2 для разных  $H$  и  $p_a = 0.1$  представлены оптимальные высоты зазора  $h(\theta)$  (а) и соответствующего им давления  $p(\theta)$  (б) (кривые 1 – 4 соответствуют значениям  $H = 3, 4, 5$  и 10, а 5 отвечает внешнему давлению  $p_a$ ). Характерно наличие выступов в функ-



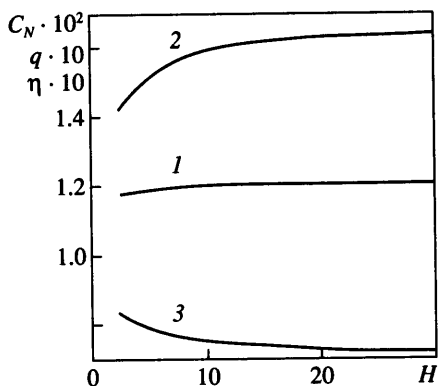
Фиг. 2. Оптимальные зазоры подшипника (а) и распределения давления в них (б) при разных значениях параметра  $H$  для  $\sigma_{d2} = 0$  и  $p_a = 0.1$ : 1 – 4 –  $H = 3, 4, 5$  и 10; 5 –  $p = p_a$

ции  $h(\theta)$  (впадин в подшипнике) с высотой  $H$  и шириной  $\Delta = x_{d2} - x_{d1}$  и давления в них, меньшего внешнему  $p_a$  (участок III). Последнее обстоятельство приводит к тому, что в выступе смазка на торцах втекает в зазор, а на большей части вне него вытекает, оставаясь в неизменном количестве во всем зазоре. Эта зона является ключевой для данной задачи. Из фиг. 2, а видно, что различие в функциях  $h(\theta)$  при всех  $H$  значительно лишь в зоне небольшой протяженности вблизи выступа.

С увеличением  $H$  ширина  $\Delta$  уменьшается, а давление в ней подтягивается к внешнему. При  $H \rightarrow \infty$  получается асимптотические соотношения между  $\Delta$  и  $H$  в виде  $F_1(H) = \Delta H^{1.5}$  и между  $\delta p_\Delta$  (отклонение среднего давления в зоне  $\Delta$  от внешнего давления –  $\delta p_\Delta = p_\Delta - p_a$ ) и  $H - F_2(H) = \delta p_\Delta H^{1.5}$ . Имеется как расчетная, так и теоретическая асимптотика –  $F_1, F_2 \rightarrow \text{const} \neq 0$ , что отвечает ненулевой утечке в зоне  $\Delta$  при нулевой интегральной утечке при бесконечно тонкой щели, в которую трансформируется выступ.

На фиг. 3 иллюстрируется изменение коэффициентов несущей способности  $C_N$ , (кривая 1), расхода  $q$  (2) и отношения  $\eta = C_N q^{-1}$  (3) с увеличением  $H$ . Оказывается, что и  $C_N$ , и  $q$  – возрастающие, а  $\eta$  – убывающая. При  $H \rightarrow \infty$  значения  $C_N$  и  $q$  стремятся к своим максимальным значениям, соответствующим решению задачи Рэлея. Но при этом  $\eta$  – минимально, что менее выгодно на практике. Таким образом, для обеспечения большей несущей способности необходимо увеличить  $H$  с соответствующим снижением  $\Delta$ , а для меньшего расхода смазки, наоборот. При  $H = 1$ , так как  $h \equiv 1$  и  $p \equiv p_a$ ,  $C_N = \eta = 0$ , а  $q = p_a$ .

Некоторые характеристики полученных оптимальных зазоров представлены в табл. 1. В первой колонке таблицы дано известное решение задачи Рэлея для радиального подшипника с питающей щелью (с заданным внешним давлением в ней). Реше-



Фиг. 3. Зависимости коэффициентов несущей способности  $10^2 \times C_N$  (кривая 1), расхода  $10 \times q$  (2) и их отношения  $10 \times \eta$  (3) от  $H$  для оптимальных зазоров при  $\sigma_{d2} = 0$  и  $p_a = 0.1$

ние этой задачи и предельное решение при  $H \rightarrow \infty$  совпадают (вторая колонка соответствует  $H \gg 1$ ). При этом величина  $\Delta$  бесконечно мала, а давление всюду превышает внешнее, реализуется наибольшая несущая способность. Высота зазора, за исключением выпадающей точки  $x_{d1} = x_{d2}$ , содержит участок двустороннего экстремума с разрывами  $h$  на обоих его концах.

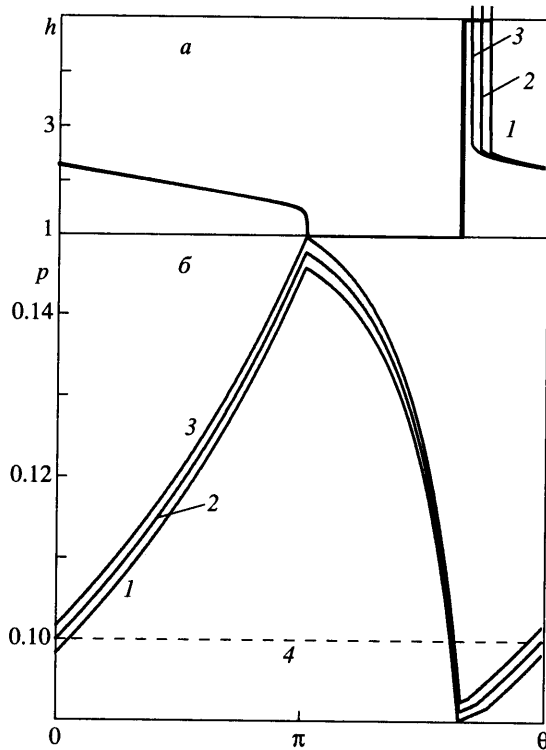
При  $H < \infty$  разрыва при  $x = x_b$  нет, и представленные в таблице максимумы давления находятся в сечениях  $x_b$ , а минимумы – в  $x_{d1}$ , при этом всегда  $p_{d1} < p_a$  (см. фиг. 2, б). При малых  $H$  ( $H < 3$ ) исчезает и второй разрыв в точке  $x = x_{d2}$ , и функция  $h(x)$  имеет лишь один разрыв при  $x = x_{d1}$ . В таблице показаны координаты концов всех участков оптимальности.

2. Исследуем теперь случаи с питающей щелью в сечении  $x_{d2}$ , т.е.  $\sigma_{d2} > 0$ . На фиг. 4 для  $H = 5$  и  $p_a = 0.1$  представлены оптимальные высоты  $h(\theta)$  (а) и соответствующего им давления  $p(\theta)$  (б) при разных  $\sigma_{d2}$  (кривые 1 – 3 соответствуют значениям  $\sigma_{d2} = 0, 5$  и 10, а 4 отвечает внешнему давлению  $p_a$ ). Видно, что щель расположена в зоне давления, меньшего  $p_a$ , поэтому через щель смазка втекает в зазор извне. Вклад выступа в баланс потоков обмена смазки должен падать, что ведет к уменьшению его ширины. При  $\sigma_{d2} \rightarrow \infty$  выступ исчезает, так как роль щели в обмене смазкой с внешней средой становится доминирующей по сравнению с выступом. При этом получается так же,

Таблица 1

$H$	$\infty$ (R)	50	10	5	4	3	2.6
$-\beta \cdot 10^2$	0	0.03	0.467	1.44	1.937	2.58	2.94
$q \cdot 10$	1.651	1.646	1.591	1.511	1.479	1.442	1.424
$C_N \cdot 10^2$	1.213	1.212	1.204	1.190	1.185	1.180	1.178
$h_{d2+}$	2.475	2.475	2.481	2.583	2.682	2.937	2.6
$x_b \cdot 10^4$	5173	5172	5153	5129	5122	5115	5109
$x_{d1} \cdot 10^4$	8390	8368	8330	8298	8292	8289	8288
$x_{d2} \cdot 10^4$	8390	8416	8660	8890	8981	9145	9465
$\Delta \cdot 10^4$	0	46	343	592	689	856	1167
$p_{\max} \cdot 10$	1.585	1.580	1.532	1.459	1.430	1.396	1.380
$p_{\min} \cdot 10$	0.999	0.998	0.966	0.902	0.873	0.836	0.819





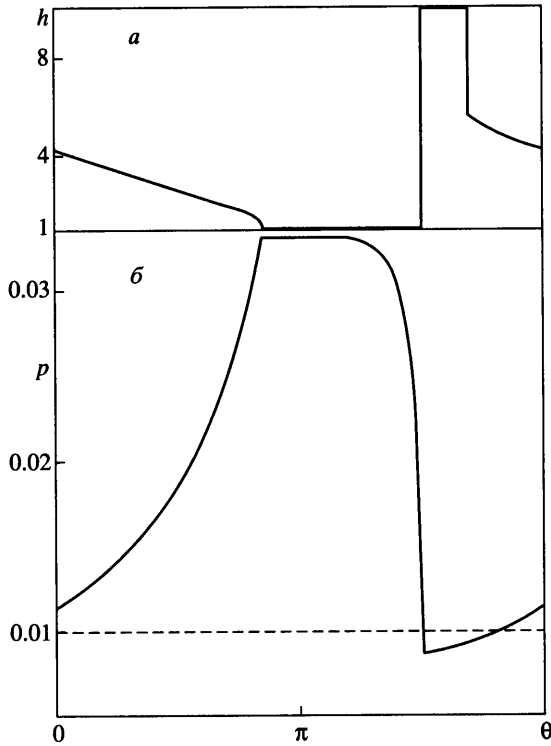
Фиг. 4. Оптимальные зазоры подшипника (а) и распределения давления в них (б) при разных значениях параметра  $\sigma_{d2}$  для  $H = 5$  и  $p_a = 0.1$ : 1 – 3 –  $\sigma_{d2} = 0, 5$  и 10; 4 –  $p = p_a$

как и в случае  $H \rightarrow \infty$ , что множитель Лагранжа  $\beta \rightarrow 0$ . Поэтому и формально, и из физических соображений оба предельных случая совпадают с решением задачи Рэлея с питающей щелью.

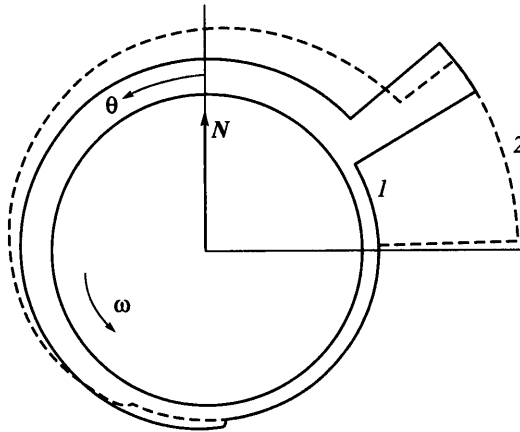
Некоторые результаты расчетов для  $H = 5$ ,  $p_a = 0.1$  и разных  $\sigma_{d2}$  представлены в табл. 2, составленной аналогично табл. 1, где находятся предельные случаи  $\sigma_{d2} = \infty$  и 0 (первая и четвертая колонки). Влияние параметра  $\sigma_{d2}$  на  $C_N$ ,  $q$  и  $\eta$  качественно такое же, как и влияние  $H$  (см. фиг. 3). В обоих случаях количественное изменение  $C_N$  не-

Таблица 2

$\sigma_{d2}$	12	10	5
$-\beta \cdot 10^2$	0.936	1.003	1.199
$q \cdot 10$	1.559	1.552	1.531
$C_N \cdot 10^2$	1.201	1.199	1.195
$h_{d2+}$	2.863	2.742	2.638
$x_b \cdot 10^4$	5139	5137	5133
$x_{d1} \cdot 10^4$	8345	8338	8320
$x_{d2} \cdot 10^4$	8425	8495	8683
$\Delta \cdot 10^4$	80	157	363
$p_{\max} \cdot 10$	1.504	1.497	1.478
$p_{\min} \cdot 10$	0.930	0.925	0.913



Фиг. 5. Оптимальный зазор подшипника (а) и распределение давления в нем (б) при  $H = 10$ ,  $\sigma_{a2} = 0$  и  $p_a = 0.01$



Фиг. 6. Оптимальные радиальные подшипники при  $H = 10$ ,  $\sigma_{a2} = 0$ ,  $p_a = 0.1$  (1) и 0.01 (2)

лико, хотя влияние этих параметров на  $q$ ,  $\eta$  и геометрические характеристики значительно.

Чем больше сжимаемость смазки (меньше параметр  $p_a$ ), тем сильнее влияние  $\sigma_{dk}$  и  $H$  на характеристики подшипника. На фиг. 5 для  $H = 10$ ,  $\sigma_{a2} = 0$  и  $p_a = 0.01$  представлены распределения  $h(\theta)$  (а) и  $p(\theta)$  (б). Форма оптимального зазора и распределение давления значительно изменяются по сравнению со случаем  $p_a = 0.1$  (см. фиг. 2). Профиль

давления более наполненный, а выступ в зазоре более широкий и смещен к углу  $\pi$ . Эти два сравниваемых случая показаны на фиг. 6, где оптимальные подшипники (кривая  $I$  отвечает  $p_a = 0.1$ , а  $2 - p_a = 0.01$ ) имеют вертикально направленную несущую способность и открытые торцы, через которые суммарная утечка равна нулю.

Заметим, что для несжимаемой смазки решение задачи для радиального подшипника с открытыми торцами строится в постановке Рэлея, т.е. при  $\beta = 0$ . Действительно, так как в этом случае решение не зависит от места питающей щели или, что то же, от выбора уровня давления смазки [7], подбором его можно обеспечить выполнение интегрального условия отсутствия утечки в торцах при сохранении формы зазора и несущей способности. Фактически это осуществляется вычитанием константы из функции  $p(\theta)$ , что согласно (1.3) не изменяет  $C_N$ .

**Заключение.** Для цилиндрического радиального газодинамического подшипника большой длины поставлена и решена вариационная задача теории смазки, заключающаяся в определении оптимальной формы зазора, которая обеспечивает наибольшую несущую способность  $N$  при открытых торцах подшипника и при наличии питающей щели. При этом фиксируются угловая скорость вращения вала (линейная скорость его поверхности), его радиус, минимально и максимально допустимые высоты зазора, вязкость и температура смазки. Показано, что форма зазора со смазкой – разрывная с участками разного типа, включая участки с минимально и максимально допустимой высотой. Характерно наличие впадины значительной глубины в подшипнике. Построенные решения позволяют найти несущую способность и форму зазора со смазкой при разных параметрах задачи. Во всех случаях величина  $N$  меньше  $N_R$  при том же параметре сжимаемости ( $N_R$  соответствует задаче Рэлея).

Автор благодарит А.Н. Крайко за полезные обсуждения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 02-01-00422) и Государственной программы поддержки ведущих научных школ РФ (НШ-2124.2003.1).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Maday C.J.* The maximum principle approach to the optimum one-dimensional journal bearing // Trans. ASME. Ser.F. J. Lubr. Technol. 1970. V. 92. № 3. P. 482–489. = Тр. Амер. о-ва инж.-мех. Сер. Ф. Проблемы трения и смазки. 1970. Т. 92. № 3. С. 111–119.
2. *Rohde S.M.* A demonstrably optimum one-dimensional journal bearing // Trans. ASME. Ser.F. J. Lubr. Technol. 1972. V. 94. № 2. P. 188–192. = Тр. Амер. о-ва инж.-мех. Сер.Ф. Проблемы трения и смазки. 1972. Т. 94. № 2. С. 89–93.
3. *McAllister G.T., Rohde S.M.* Optimum design of one-dimensional journal bearings // J. Optimiz. Theory Appl. 1983. V. 41. № 4. P. 599–617.
4. *Болдырев Ю.Я., Слесарев М.Е.* Одномерный радиальный газовый подшипник с максимальной несущей способностью // Машиноведение. 1987. № 4. С. 97–103.
5. *Kanarachos A.* A contribution to the problem of designing optimum performance bearings // Trans. ASME. Ser.F. J. Lubr. Technol. 1977. V. 99. № 4. P. 462–468. = Тр. Амер. о-ва инж.-мех. Сер.Ф. Проблемы трения и смазки. 1977. Т. 99. № 4. С. 86–94.
6. *Алексеевко Н.С., Болдырев Ю.Я.* Оптимизация формы радиального секторного подшипника с газовой смазкой по критерию устойчивости // Машиноведение. 1984. № 2. С. 98–102.
7. *Грабовский В.И., Крайко А.Н.* Профилирование зазора радиального подшипника с минимальным моментом сопротивления // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 3. С. 470–480.
8. *Грабовский В.И.* Оптимальный радиальный газовый подшипник с минимумом момента сопротивления // Изв. РАН. МЖГ. 1999. № 6. С. 63–75.
9. *Константинеску В.Н.* Газовая смазка. М.: Машиностроение, 1968. 718 с.
10. *Шейнберг С.А., Жедь В.П., Шишеев М.Д.* Опоры скольжения с газовой смазкой. М.: Машиностроение, 1969. 334 с.
11. Опоры скольжения с газовой смазкой / Под ред. С.А. Шейнберга. М.: Машиностроение, 1979. 336 с.

12. *Elrod H.G., Burgdorfer A.* Refinement of the theory of gas lubricated journal bearing of infinite length // Proc. 1st Intern. Symp. on Gas Lubricated Bearing. Washington, 1959. P. 93–118.
13. *Крайко А.Н.* О постановке задач теории смазки для радиальных подшипников // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 5. С. 793–802.
14. *Грабовский В.И.* Оптимальное профилирование зазора радиального подшипника с максимальной несущей способностью при заданной в нем массе жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 1999. № 4. С. 12–21.
15. *Грабовский В.И.* Оптимальный зазор упорного газового подшипника с максимальной несущей способностью // Изв. РАН. МЖГ. 2000. № 4. С. 68–78.

Москва

Поступила в редакцию  
13.1.2004