

УДК 532.516

© 2004 г. Л. И. ТУРЧАК, В. П. ШИДЛОВСКИЙ

ЗАДАЧА ОБ ИМПУЛЬСИВНОМ ЗАПУСКЕ ГАЗОВОГО ПОДШИПНИКА В ОБОБЩЕННОЙ ФОРМУЛИРОВКЕ

Проведен анализ нестационарного движения в смазочном слое газового подшипника, основанный на уравнениях сжимаемого пограничного слоя с учетом инерционных эффектов и поперечного перепада температуры. После введения определенных допущений о порядке величины основных параметров подобия построены приближенные выражения для скорости и температуры, в результате чего задача сведена к определению давления как функции пространственной координаты и времени.

Ключевые слова: пограничный слой, газовая смазка, уравнение Рейнольдса, циклическая прогонка.

Обзор исследований по решению стационарных задач о газовой смазке можно найти, например, в [1–3]. В [4] предложен вывод уравнения Рейнольдса, справедливый для случая нестационарного движения в изотермическом слое газовой смазки, в пренебрежении влиянием сил инерции и диссипативных процессов. Наконец, в [5] аналогичная нестационарная задача о газовой смазке рассмотрена в более общей постановке с учетом неизотермичности происходящих процессов.

Сравнительно недавно была предложена методика [6] исследования стационарных процессов газовой смазки с учетом влияния таких факторов, как силы инерции, воздействием которых традиционная теория пренебрегала. В соответствии с этой методикой, ниже предлагаем вывод нестационарного уравнения Рейнольдса, пригодного для исследования изменений давления в газовом слое с учетом поперечного перепада температуры и влияния сил инерции.

Промежуточные выкладки проведены на примере задачи об импульсивном запуске подшипника с фиксированной геометрией. Дан также пример численного расчета, выявляющий характер влияния основных критериев подобия на распределение давления и величину поддерживающей силы.

1. Как было показано в [6], при исследовании проблем газовой смазки в качестве исходных определяющих уравнений следует принимать уравнения пространственного пограничного слоя сжимаемой жидкости. Эти уравнения будут представлены в декартовых координатах в безразмерной форме. Обозначим через L характерную длину в направлении оси x , через h_* – характерную длину по оси y (т.е. характерную толщину). Кроме того, будем считать заданными характерную скорость U и характерные значения температуры T_* , плотности ρ_* , давления p_* , вязкости μ_* и теплопроводности λ_* . В дальнейшем вязкость и теплопроводность будут предполагаться пропорциональными температуре в некоторой степени n .

Для упрощения формулировки граничных условий вместо аргумента y целесообразно ввести

$$\eta = yh^{-1}(x, z)$$

Кроме того, взамен нормальной составляющей скорости будем рассматривать

$$v^* = v - \eta \left(u \frac{\partial h}{\partial x} + w \frac{\partial h}{\partial z} \right)$$

В результате исходные уравнения, представленные в безразмерной форме, принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(T^n \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) &= \Lambda^{-1} h^2 \frac{\partial p}{\partial x} + \text{Re}_* h \rho \left(hu \frac{\partial u}{\partial x} + v^* \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \text{ShRe}_* h^2 \rho \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial(h\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^*)}{\partial \eta} + h \text{Sh} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \eta} = 0, \quad p = \rho T \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \left(T^n \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) &= \text{PrRe}_* \rho h \left(hu \frac{\partial T}{\partial x} + v^* \frac{\partial T}{\partial \eta} + h \text{Sh} \frac{\partial T}{\partial t} \right) - \\ &- \frac{\kappa - 1}{\kappa} \text{PrRe}_* h^2 \left(u \frac{\partial p}{\partial x} + \text{Sh} \frac{\partial p}{\partial t} \right) - \alpha T^n \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 \end{aligned} \quad (1.1)$$

В уравнениях (1.1) фигурируют безразмерные параметры подобия: $\Lambda = \mu_* UL / (h_*^2 p_*)$ – характеристическое число газового подшипника (число Гаррисона), $\text{Re}_* = U \rho_* h_*^2 / (\mu_* L)$ – модифицированное число Рейнольдса, $\text{Sh} = L / (U t_*)$ – число Струхалия, $\alpha = (\kappa - 1) \text{Pr} U^2 / (\kappa T_*)$ – фактор диссипации, $\text{Pr} = \mu_* c_p / \lambda_*$ – число Прандтля, $\kappa = c_p / c_v$ – отношение теплоемкостей.

Следует иметь в виду, что не все параметры подобия независимы, так как имеет место соотношение

$$\alpha = (\kappa - 1)^2 \kappa^{-1} \Lambda \text{PrRe}_*$$

Как правило, закон зависимости толщины смазочного слоя h от координат содержит малый параметр ϵ . При проведении последующих выкладок будет предполагаться, что $h = 1 + O(\epsilon)$.

Исходя из имеющихся в литературе технических данных о применяемых в промышленности газовых подшипниках, можно сделать следующие предположения о порядке величины параметров подобия: $\text{Re}_* = O(\epsilon)$, $(\kappa - 1)\kappa^{-1} = O(\epsilon)$, $\alpha = O(\epsilon^{3/2})$, $\Lambda = O(\epsilon^{-3/2})$, $\text{Sh} = O(1)$, $\text{Pr} = O(1)$.

Прежде чем перейти непосредственно к исследованию процесса запуска подшипника, следует иметь в виду, что в начальный момент времени при $\epsilon = 0$ имеем $h = \rho = p = T = 1$.

2. Начально-краевая задача для уравнений (1.1) связана с выполнением условий

$$\begin{aligned} u(0, 0) &= 1, \quad T(0, 0) = \chi, \quad u(\eta, 0) \equiv 0, \quad T(\eta, 0) \equiv 1, \quad 0 < \eta \leq 1 \\ u(0, t) &= 1, \quad u(1, t) = 0, \quad T(0, t) = \chi, \quad T(1, t) = 1, \quad t > 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Располагая приведенной выше информацией о порядке величины параметров, входящих в уравнения (1.1), построим начальное приближение, соответствующее пределу $\epsilon \rightarrow 0$. Так, из второго уравнения указанной системы получаем

$$T^{(0)(n+1)} = \chi^{n+1} + (1 - \chi^{n+1}) U_+(\eta)$$

где $U_+(\eta)$ – ступенчатая функция, равная нулю при $\eta = 0$ и единице при $\eta > 0$ (см., например, [7]).

С учетом свойств ступенчатой функции можно утверждать, что при любом действительном показателе степени σ имеем

$$T^{(0)\sigma} = \chi^\sigma + (1 - \chi^\sigma)U_+(\eta)$$

Следует учесть, что в дальнейшем, при построении уравнения для давления $p(x, t)$, понадобится не сама температура, а обратная ей величина: $\theta = T^{-1}$. Начальное приближение для этой функции выражается как

$$\theta^{(0)} = \chi^{-1} + (1 - \chi^{-1})U_+(\eta)$$

Из второго уравнения системы (1.1) после замены T на θ получим уравнение для функции первого приближения $\theta^{(1)}(\eta)$, принимающее вид

$$(\text{PrRe}_* \text{Sh})^{-1} [\chi^n + (1 - \chi^n)U_+(\eta)] \frac{\partial^2 \theta^{(1)}}{\partial \eta^{(2)}} = h^2 \frac{\partial \theta^{(1)}}{\partial t} \quad (2.2)$$

Без ущерба для общности коэффициент при производной в левой части уравнения (2.2) можно усреднить по толщине смазочного слоя, получая, таким образом, классическое уравнение теплопроводности

$$B \frac{\partial^2 \theta^{(1)}}{\partial \eta^{(2)}} = h^2 \frac{\partial \theta^{(1)}}{\partial t}, \quad B = (\chi^n + 1)(2\text{PrRe}_* \text{Sh})^{-1}$$

С учетом краевых условий решение этого уравнения может быть представлено в форме

$$\theta^{(1)} = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \exp(-\beta_i t) \sin(2i-1)\pi\eta, \quad \beta_i = B\pi^2(2i-1)^2 h^{-2} \quad (2.3)$$

Постоянные C_i должны определяться так, чтобы выполнялось начальное условие для температуры из числа условий (2.1). Естественно, при $t = 0$ все экспоненциальные члены в (2.3) равны единице. При этом ряд (2.3) превращается в чисто тригонометрический, и при надлежащем выборе C_i этот ряд сходится к постоянному пределу (см., например, [8]). Если выбрать

$$C_i = 2(\chi - 1)[\pi\chi(2i-1)]^{-1}(-1)^{i+1}$$

то будет обеспечено и выполнение начального условия для температуры.

Из первого из условий (1.1) следует, что начальное приближение для скорости можно представить в виде

$$u^{(0)} = 1 - U_+(\eta)$$

Для определения первого приближения по скорости получим уравнение

$$D \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial \eta^2} = h^2 \frac{\partial u^{(1)}}{\partial t}, \quad D = (\chi^n + 1)(2\text{Re}_* \text{Sh})^{-1}$$

По аналогии с тем, что было сделано при определении функции $\theta^{(1)}$, получим

$$u^{(1)} = \sum_{i=1}^{\infty} E_i \exp(-\gamma_i t) \sin(2i-1)\pi\eta \quad (2.4)$$

$$\gamma_i = D\pi^2(2i-1)^2 h^{-2}, \quad E_i = 2(-1)^i [\pi(2i-1)]^{-1}$$

Для дальнейшего анализа понадобится также и второе приближение по скорости. Уравнение для функции $u^{(2)}(\eta, t)$ записывается в виде

$$\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial \eta^2} = \Lambda^{-1} h^2 \frac{\partial p}{\partial x}$$

Отсюда с учетом граничных условий получим

$$u^{(2)} = \frac{h^2}{2\Lambda} \eta(\eta - 1) \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.5)$$

3. Основным уравнением в теории как жидкостной, так и газовой смазки является уравнение для распределения давления в смазочном слое. Вывод этого уравнения базируется на уравнении неразрывности, т.е. на третьем уравнении системы (1.1). В это уравнение следует подставить полученные в п. 2 выражения для скорости u и величины θ , обратной температуре. Заметим при этом, что в рассматриваемом приближении нормальная составляющая скорости $v^* \equiv 0$ и что члены типа $u^{(1)}\theta^{(1)}$ и более высокого порядка малости не будут включены в уравнение. Плотность ρ выражается из уравнения состояния (последнее уравнение системы (1.1)), так что

$$\rho = p\theta$$

Сходимость рядов в выражениях (2.3) и (2.4) не вызывает сомнений, а член с функцией $u^{(2)}$, соответствующей (2.5), следует осреднить по аргументу η , т.е. по толщине слоя. В результате уравнение для определения давления приобретает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 p \frac{\partial p}{\partial x} \right) &= 6\Lambda \frac{\partial(p h)}{\partial x} \left[1 + \frac{4}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\chi - 1}{\chi + 1} \exp(-\beta_i t) - \exp(-\gamma_i t) \right) A(i; \eta) \right] + \\ &+ 24h \text{Sh} \Lambda \frac{\chi}{\chi + 1} \left[\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{2(\chi - 1)}{\pi \chi} \sum_{i=1}^{\infty} A(i; \eta) \frac{\partial(p \exp(-\beta_i t))}{\partial t} \right] \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$A(i; \eta) = (-1)^{i+1} (2i + 1)^{-1} \sin(2i - 1)\pi\eta$$

Уравнение (3.1) имеет ту же структуру, что и соответствующее уравнение, полученное в [5]. Принципиальное различие между этими двумя уравнениями состоит в том, что в дополнение к параметрам Λ , χ и Sh уравнение (3.1) содержит также и связанный с инерционными воздействиями параметр Re_* .

4. Пример численного расчета распределения давления дается для случая радиального подшипника, соответствующего схеме на фиг. 1. В этом случае толщина зазора, заполненного смазкой, определяется формулой

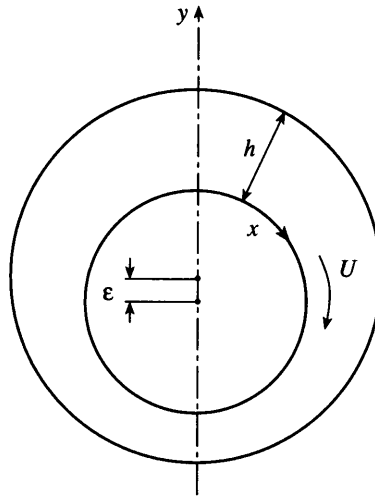
$$h = 1 + \varepsilon \cos x \quad (4.1)$$

где ε – относительный эксцентриситет подшипника. Подчеркнем, что в рассматриваемом варианте (4.1) величина h не зависит от времени, хотя постановка задачи позволяет изучить и более общий случай, когда $h = h(x, t)$.

Начальное условие для решения задачи об импульсивном запуске подшипника выражается в том, что при $t = 0$ безразмерное давление должно быть равно единице, тогда как роль граничных условий играет условие периодичности. Таким образом, имеем условия

$$p(x, 0) = 1, \quad p(x, t) = p(x + 2\pi, t) \quad (4.2)$$

Переходя непосредственно к численному решению описанной выше задачи, прежде всего вводится итерационный цикл по нелинейности, следуя схеме, описанной в [9].



Фиг. 1. Принципиальная схема устройства радиального подшипника

Оставаясь в рамках одной итерации, на каждом временном слое после дискретизации производных получим систему разностных уравнений

$$a_j p_{j-1} - c_j p_j + b_j p_{j+1} = -f_j, \quad j = 1, 2, 3, \dots, i$$

Решение разностной краевой задачи с условиями, получаемыми из (4.2), находится на основе чисто неявной разностной схемы с использованием метода циклической прогонки [10]. Для обеспечения устойчивого счета шаг по пространственной координате δ и шаг по времени τ должны удовлетворять определенным требованиям. В рассматриваемом здесь случае ограничения на величины этих шагов следует установить для временной области наиболее резкого изменения физических параметров, т.е. для окрестности $t = 0$. В результате приходим к необходимости удовлетворения неравенствам

$$\delta < (\chi + 1)[3\Lambda(\chi - 1)]^{-1}, \quad \tau < 4\chi Sh \delta (\chi - 1)^{-1}$$

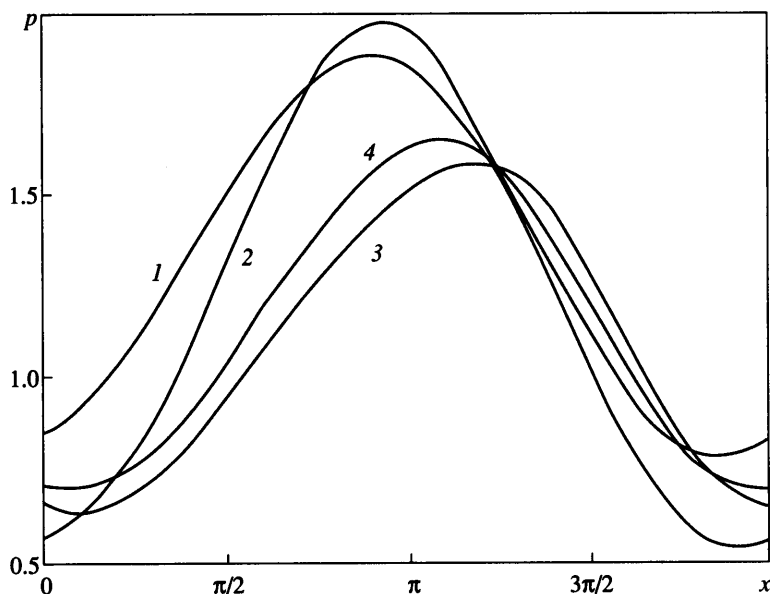
В качестве расчетного варианта примем следующую совокупность основных безразмерных параметров: $Re_* = 0.25$, $\Lambda = 8$, $\varepsilon = 0.3$, $\kappa = 1.4$, $Pr = 1$, $n = 1$, $Sh = 1$, $\chi = 2$.

Результаты проведенных расчетов представлены на графиках фиг. 2, фиг. 3.

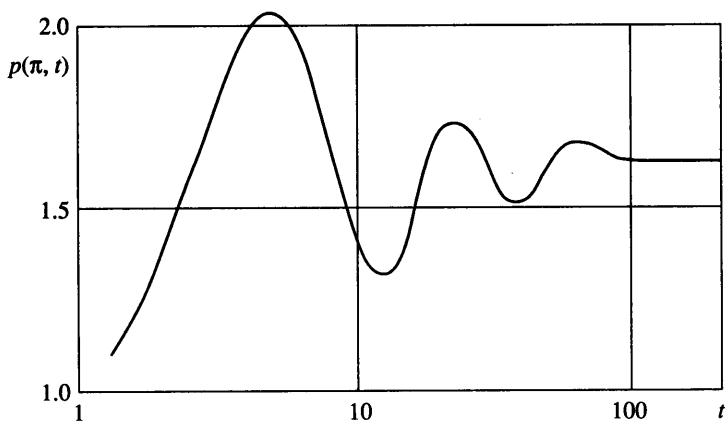
Так, на фиг. 2 показаны кривые распределения давления в зависимости от пространственной координаты для различных моментов времени. Как и следовало ожидать, по мере роста времени кривые приближаются к кривой стационарного распределения, соответствующей заданному набору параметров подобия.

На фиг. 3 приведены графики зависимости от времени давления в некотором фиксированном сечении смазочного слоя, а именно при $x = \pi$. Подобно тому, что было получено в [5] при несколько менее общих условиях, здесь видно, что выход на стационарный режим реализуется немонотонно: в форме, напоминающей затухающие колебания. При этом уменьшение шагов по координате и времени не оказывает заметного влияния на характер кривых изменения давления и можно утверждать, что приведенные графики соответствуют истинному поведению давления в условиях запуска газового подшипника.

Следует отметить, что были проведены оценочные расчеты, позволяющие сделать вывод о сохранении описанных выше качественных особенностей пространственно-



Фиг. 2. Кривые распределения давления в зависимости от пространственной координаты для различных моментов времени: 1–3 – $t = 3, 6, 9$, 4 – $t > 100$



Фиг. 3. Зависимость давления от времени при $x = \pi$

временного поведения давления в смазочном слое, имеющем другую геометрию, а именно – ограниченную двумя наклонными одна по отношению к другой плоскостями. Значит, есть основания утверждать, что результаты исследования имеют достаточно общий характер. Однако, имея в виду практические приложения, в дальнейшем следовало бы провести расчеты, позволяющие осуществить параметрический анализ, т.е. выявить влияние на распределение давления критериев подобия Re_* , Λ , χ .

Заключение. В рамках приближенного анализа осуществлен вывод дифференциального уравнения, описывающего пространственно-временные изменения давления в смазочном слое газового подшипника с учетом влияния сил инерции и перепадов

температуры. Для случая радиального подшипника дан пример численного расчета. Методика численного анализа основывается на сочетании итераций по нелинейности и применении чисто неявной разностной схемы с циклической прогонкой. Результаты расчетов позволяют получить представление о характере изменений давления в газовом слое подшипника при его импульсивном запуске.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Constantinescu V.N.* Lubrificatia Cu Gaze. Bucuresti: Ed. Acad. RPR, 1963, 633 p.
2. *Gross W.A.* Gas Film Lubrication. N.Y. – L.: Wiley, 1962, 413 p.
3. *Шейнберг С.А., Жедь В.П., Шишеев М.Д.* Опоры скольжения с газовой смазкой. М.: Машиностроение, 1969. 334 с.
4. *Langlois W.E.* Isothermal squeeze films // *Quart. Appl. Math.* 1962. V. 20. No. 2. P. 131–150.
5. *Шидловская И.И., Шидловский В.П.* Исследование неустановившегося процесса запуска газового подшипника // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1977. № 5. С. 156–160.
6. *Турчак Л.И., Шидловский В.П.* Теоретическое и численное исследование процессов газовой смазки на основе уравнений аэрогидродинамики // *Изв. РАН. МЖГ.* 2001. № 5. С. 24–34.
7. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1968. 720 с.
8. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.
9. *Самарский А.А.* Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971. 552 с.
10. *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. 591 с.

Москва

Поступила в редакцию
3.VII.2003