МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 • 2004

УДК 532.546

© 2004 г. П. Е. СПЕСИВЦЕВ, Э. В. ТЕОДОРОВИЧ

ТЕНЗОР ДИСПЕРСИИ СКОРОСТИ В ПЛОСКОМ ФИЛЬТРАЦИОННОМ ПОТОКЕ

Во втором приближении теории возмущений проведено вычисление продольной и поперечной составляющих тензора дисперсии скорости для случая плоского течения жидкости через случайно-неоднородную пористую среду при логнормальном распределении коэффициента проводимости.

Ключевые слова: фильтрационный поток, случайно-неоднородная пористая среда, тензор корреляции скоростей.

Цель работы – исследование пульсаций скорости, возникающих в плоском фильтрационном течении несжимаемой жидкости через случайно-неоднородную пористую среду. Знание статистических характеристик случайного поля скоростей необходимо при анализе различных явлений переноса (диффузии, теплопроводности и др.) в терминах эффективных коэффициентов переноса, которые в крупномасштабном пределе феноменологически учитывают перенос за счет не только молекулярных движений, но и за счет движений более крупных масштабов.

Рассмотрение явлений переноса в случайно-неоднородном поле скоростей составляло предмет ряда исследований (см., например, [1, 2]), однако при этом корреляционная функция скоростей задавалась извне, в результате чего оставалось неясным, какое отношение имели вычисленные коэффициенты переноса к реальным проблемам переноса в фильтрационном потоке. В частности, принималось, что случайное поле скоростей потенциально. Однако, как следует из проводимых ниже результатов, пульсационая часть скорости оказывается соленоидальной. Расчет корреляционной функции скорости в фильтрационном потоке в низшем приближении теории возмущений был проведен в [3]. В настоящей работе эта корреляционная функция рассматривается с использованием второго приближения теории возмущений, и в этом приближении вычисляется дисперсия скорости.

1. Постановка задачи. В основе описания процессов фильтрации в случайно-неоднородной среде лежит закон Дарси [4], связывающий скорость фильтрационного потока $\mathbf{v}$ с градиентом давления ∇p

$$v_i(\mathbf{r}) = -K(\mathbf{r})\partial_i p(\mathbf{r}) \tag{1.1}$$

при этом принимается, что коэффициент проводимости $K(\mathbf{r})$ представляет собой случайное поле с заданными статистическими характеристиками. В большинстве случаев предполагается, что статистика поля $K(\mathbf{r})$ является логнормальной, и, следовательно, все его статистические характеристики выражаются через единственную функцию – парную корреляционную функцию логарифмов проводимости.

Уравнение закона Дарси (1.1) дополняется законом сохранения массы, который в случае несжимаемой жидкости принимает вид

$$\partial_i v_i(\mathbf{r}) = 0 \tag{1.2}$$

Из (1.1), (1.2) можно получить стохастическое дифференциальное уравнение для давления

$$\partial_i[K(\mathbf{r})\partial_i p(\mathbf{r})] = 0 \qquad (1.3)$$

Уравнения (1.1)–(1.3) обычно решаются в рамках метода теории возмущений, когда проводимость представляется в виде суммы усредненной и пульсационной частей $K(\mathbf{r}) = \langle K(\mathbf{r})\rangle + \delta K(\mathbf{r})$ (в статистически однородной системе $\langle K(\mathbf{r})\rangle = \text{const}$) и решение ищется в виде ряда по степеням параметра $\varepsilon = \delta K(\mathbf{r})/\langle K\rangle$, рассматриваемого как малый [4].

При больших значениях флуктуаций проводимости использование низшего приближения теории возмущений представляется недостаточным и возникает задача учета высших приближений, проблема сходимости ряда, выделения главных членов и т.п. При анализе вклада высших приближений весьма полезными оказываются методы, заимствованные из квантовой теории поля [5], в частности, метод Фейнмановских диаграммм [6–8], уравнений Дайсона [2, 6–9], улучшение теории возмущений с помощью метода ренормализационной группы [2, 1–12], а также представление решения в форме интеграла по траекториям [13].

Обычный способ рассмотрения сводится к поиску решения стохастического дифференциального уравнения для градиента давления (1.3) при заданных (детерминированных) граничных условиях на бесконечности, соответствующих постоянному среднему градиенту давления. Решение строится в виде ряда теории возмущений

$$p(\mathbf{r}) = p_0(\mathbf{r}) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n p_n(\mathbf{r}) \qquad (1.4)$$

Подстановка (1.4) в уравнение (1.3) и приравнивание нулю коэффициентов при одинаковых степенях параметра разложения позволяет последовательно вычислять функции $p_n(\mathbf{r})$. Ряд теории возмущений для скорости фильтрационного потока с помощью закона Дарси выражается через ряд теории возмущений для градиента давления. Последующее почленное усреднение рядов дает возможность найти средние значения скорости и градиента давления и тем самым вычислить эффективную проводимость. Подобный подход получил название "простой теории возмущений" (см., например, [8]). Более аккуратное рассмотрение сводится к нахождению уравнения для некоторой бесконечной подпоследовательности ряда теории возмущений (уравнений Дайсона) и последующему его решению ("метод селективного суммирования" [6–8]).

2. Определяющие уравнения. Предметом исследования будет корреляционная функция скорости в фильтрационном течении

$$D_{ij}(\mathbf{r}) = \langle \delta v_i(\mathbf{r})\delta v_j(0)\rangle$$

где $\delta v_i(\mathbf{r}) = v_i(\mathbf{r}) - \langle v_i(\mathbf{r})\rangle$, индексы i, j принимают значения от 1 до d (d – размерность пространства).

В дальнейшем вместо задания граничных условий более удобным представляется рассматривать задачу в безграничной области и ввести эквивалентный граничным условиям источник жидкости, записав уравнение неразрывности в виде

$$\partial_i v_i(\mathbf{r}) = m(\mathbf{r}) \qquad (2.1)$$

и определив плотность источника жидкости $m(\mathbf{r})$ таким образом, чтобы создаваемый им средний поток был равен заданной постоянной величине.

В случае, когда фильтрационный поток направлен вдоль оси x_1, имеет скорость V и отличен от нуля в области $-L \le x_1 \le L$ ($L \to \infty$), плотность источника следует выбрать в виде

$$m(\mathbf{r}) = V[\delta(x_1 + L) - \delta(x_1 - L)] \qquad (2.2)$$

При вычислении тензора D_{ij} вместо предварительного определения давления путем решения уравнения (1.3) и последующего нахождения скорости с помощью закона Дарси более простым является получение уравнения для скорости фильтрационного потока и его решение методом итераций при построении ряда теории возмущений. Соответствующий подход был предложен ранее одним из авторов [7, 8].

Поле вектора скорости $\upsilon_i(\mathbf{r})$ может быть представлено в виде суммы потенциальной (безвихревой) и соленоидальной (бездивергентной) составляющих

$$\upsilon_i(\mathbf{r}) = \upsilon_i^{(p)}(\mathbf{r}) + \upsilon_i^{(s)}(\mathbf{r})$$

где $\partial_i \upsilon_j^{(p)} - \partial_j \upsilon_i^{(p)} = 0$ и $\partial_i \upsilon_i^{(s)} = 0$.

Потенциальная часть скорости определяется как решение уравнения (2.1) и имеет вид

$$\upsilon_i^{(p)}(\mathbf{r}) = \partial_i \Delta^{-1} m(\mathbf{r}) \tag{2.3}$$

где $\Delta^{-1} = G(\mathbf{r})$ – функция Грина для оператора Лапласа, являющаяся решением уравнения $\Delta G(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r})$.

С целью получения уравнения для вихревой части рассмотрим величину

$$\partial_j(\partial_j \upsilon_i - \partial_i \upsilon_j) \equiv \Delta \upsilon_i^{(s)} \tag{2.4}$$

С другой стороны, выражая υ_i в левой части (2.4) через градиент давления с помощью закона Дарси (1.1), выполняя соответствующие дифференцирования и затем вторично воспользовавшись законом Дарси для исключения давления, найдем

$$\Delta \upsilon_i^{(s)}(\mathbf{r}) = [\delta_{ij}\partial_k u_k(\mathbf{r}) - \partial_j u_i(\mathbf{r})]\upsilon_j(\mathbf{r})$$

$$u_i = \partial_i u, \quad u = \ln(K(\mathbf{r})/K_0),$$

где K_0 –произвольный параметр с размерностью коэффициента проводимости.

В результате получаем интегральное уравнение для скорости

$$\upsilon_i(\mathbf{r}) = \upsilon_i^{(p)}(\mathbf{r}) + \int d\mathbf{r}' G(\mathbf{r}-\mathbf{r}')[\delta_{ij}\partial'_\alpha u_\alpha(\mathbf{r}') - \partial'_j u_i(\mathbf{r}')]\upsilon_j(\mathbf{r}') \tag{2.5}$$

итерационное решение которого воспроизводит ряд теории возмущений в виде разложения по степеням логарифма проводимости $u(\mathbf{r})$, при этом роль нулевого приближения играет потенциальная часть скорости, определяемая формулой (2.3).

Для дальнейшего анализа удобно записать уравнение (2.5) в форме, соответствующей формализму Мартина-Сиджиа-Роуза [7, 8]

$$\upsilon_i(\mathbf{r}) = \upsilon_i^{(p)}(\mathbf{r}) - \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 G(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)\Gamma_{ij}(\mathbf{r}_1|\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_3)u(\mathbf{r}_2)\upsilon_j(\mathbf{r}_3) \tag{2.6}$$

где тензорная величина Γ_{ij} (называемая вершиной) определена соотношением

$$\Gamma_{ij}(\mathbf{r}_1|\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_3) = [(\partial^{(2)}\cdot\partial^{(1)})\delta_{ij} - \partial_i^{(2)}\partial_j^{(1)}]\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_3)$$

(индекс в скобках у операторов дифференцирования указывает, по какой величине оно выполняется).

В пространстве Фурье-образов это уравнение принимает вид

$$\upsilon_i(\mathbf{q}) = \upsilon_i^{(p)}(\mathbf{q}) - G(\mathbf{q})\int\frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^d}\Gamma_{ij}(\mathbf{q}|\mathbf{p},\mathbf{q}-\mathbf{p})u(\mathbf{p})\upsilon_j(\mathbf{q}-\mathbf{p})$$

$$G(\mathbf{q}) = -1/q^2, \quad \Gamma_{ij}(\mathbf{q}|\mathbf{p},\mathbf{q}-\mathbf{p}) = (\mathbf{pq})\delta_{ij} - p_i q_j \tag{2.7}$$

(в дальнейшем функция и ее Фурье-образ обозначаются одной и той же буквой и различаются только значениями своих аргументов). Вершина Γ_{ij} ($\mathbf{q}|\mathbf{p}$, $\mathbf{q}-\mathbf{p}$) обладает следующими легко проверяемыми свойствами

$$q_i\Gamma_{ij}(\mathbf{q}|\mathbf{p},\mathbf{q}-\mathbf{p}) = 0,\quad P_{ik}(\mathbf{q})\Gamma_{kj}(\mathbf{q}|\mathbf{p},\mathbf{q}-\mathbf{p}) = \Gamma_{ij}(\mathbf{q}|\mathbf{p},\mathbf{q}-\mathbf{p})$$

$$\Gamma_{ij}(\mathbf{q}|\mathbf{p},\mathbf{q}-\mathbf{p})p_j = 0$$

где $P_{ij}(\mathbf{q}) = \delta_{ij} - q_iq_j/q^2$ – оператор поперечного проектирования, подчиняющийся соотношениям: $P_{ik}P_{kj} = P_{ij}$, $P_{ij}v_j^{(p)} = 0$, $P_{ij}v_j^{(s)} = v_i^{(s)}$.

Многократное итерирование уравнения (2.7) приводит к представлению решения в виде

$$v_i(\mathbf{q}) = v_i^{(p)}(\mathbf{q}) + P_{ij}(\mathbf{q})\int\frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^d}R(\mathbf{q},\mathbf{p}|u(\mathbf{p}_n))v_j^{(p)}(\mathbf{q}-\mathbf{p}) \tag{2.8}$$

где резольвентное ядро R является функционалом от случайного поля $u(\mathbf{p}_n)$. Для вычисления средней скорости $\langle v_i(\mathbf{q})\rangle$ следует выполнить усреднение (2.8) по ансамблю реализаций логарифма проводимости. В случае логнормальной статистики моменты вида $\langle u(\mathbf{p}_1)\ldots u(\mathbf{p}_n)\rangle$ будут равны нулю для моментов нечетного порядка и сумме произведений всевозможных попарных средних, если n четно (теорема Вика). Для статистически однородной среды парное среднее имеет вид

$$\langle u(\mathbf{p})u(\mathbf{p}_1)\rangle = (2\pi)^d\delta(\mathbf{p}+\mathbf{p}_1)B(p) + \langle u(\mathbf{p})\rangle\langle u(\mathbf{p}_s)\rangle \tag{2.9}$$

Если принять $\langle u\rangle = 0$, то этому будет соответствовать выбор $K_0 = K_G$, где K_G – среднее геометрическое значение коэффициента проводимости.

Используя (2.9), можно проверить, что

$$\langle R((\mathbf{q},\mathbf{p}|u(\mathbf{p}_n))\rangle = (2\pi)^d\delta(\mathbf{p})R(q)$$

Учитывая свойство поляризационного оператора $P_{ij}(\mathbf{q})v_j^{(p)}(\mathbf{q}) = 0$, найдем

$$\langle v_i(\mathbf{q})\rangle = v_i^{(p)}(\mathbf{q}),\quad \delta v_i(\mathbf{q}) = v_i^{(s)}(\mathbf{q}) \tag{2.10}$$

Для сокращения формы записи сложных выражений и упрощения анализа высших приближений воспользуемся Фейнмановским диаграммным методом, заключающемся в сопоставлении аналитическим выражениям некоторых графических символов (диаграмм Фейнмана).

Введем правила соответствия между диаграммами и аналитическими выражениями (см. таблицу).

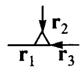
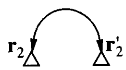
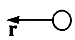
1. Функции Грина $G(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)$, называемой пропагатором, сопоставляется тонкая горизонтальная линия, выходящая из точки $\mathbf{r}_1$ и входящая в точку $\mathbf{r}$.

2. Функции $u(\mathbf{r}_2)$ – направленная в точку $\mathbf{r}_2$ вертикальная линия.

3. Функции $\Gamma_{ij}(\mathbf{r}_1|\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_3)$ – треугольник, в правую вершину которого $\mathbf{r}_3$ входит, а из левой $\mathbf{r}_1$ выходит горизонтальная линия, соответствующая функциям Грина G. В среднюю вершину $\mathbf{r}_2$ входит вертикальная линия, отвечающая $u(\mathbf{r}_2)$.

4. Парной корреляционной функции $B(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_2')$, называемой коррелятором – линия, концы которой входят вертикально в средние вершины треугольников $\mathbf{r}_2$ и $\mathbf{r}_2'$.

5. Потенциальной составляющей скорости $v_i^{(p)}(\mathbf{r})$ – тонкая горизонтальная линия, выходящая их светлого кружка и входящая в точку $\mathbf{r}$.

№	Диаграмма	Функция
1.		$G(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)$
2.		$u(\mathbf{r}_2)$
3.		$\Gamma_{ij}(\mathbf{r}_1\vert\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_3)$
4.		$B(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}'_2)$
5.		$v_i^{(p)}(\mathbf{r})$
6.		$v_i(\mathbf{r})$

6. Полной скорости $v_i(\mathbf{r})$ – жирная горизонтальная линия, исходящая из светлого кружка и входящая в точку $\mathbf{r}$.

При этом подразумевается, что по координатам точек, соответствующим вершинам треугольника, выполняется интегрирование по всему пространству.

При переходе в пространство Фурье-образов (пространство волновых чисел) вид диаграмм не меняется, но при этом линиям пропагаторов и корреляторов приписываются волновые числа и этим величинам ставятся в соответствие их Фурье-образы $G(\mathbf{q})$ и $B(\mathbf{p})$, а треугольнику сопоставляется $\Gamma_{ij}(\mathbf{q}|\mathbf{p},\mathbf{q}-\mathbf{p})$.

Подразумевается, что по волновым числам всех линий, соединяющим вершины треугольников, осуществляется интегрирование, при этом выполняется закон сохранения волновых чисел: алгебраическая сумма волновых чисел входящих в вершину и выходящих из нее линий равна нулю.

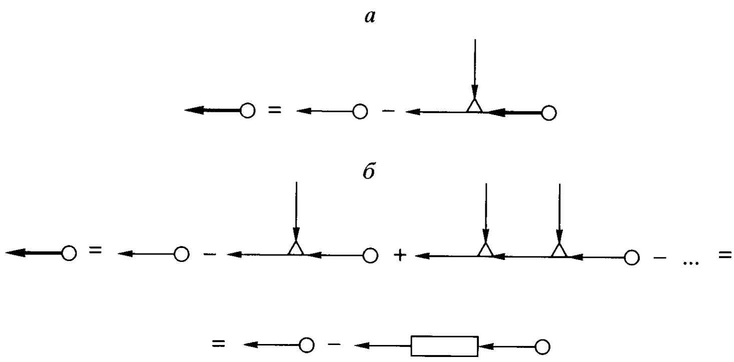
На языке диаграммной техники уравнения (2.6), (2.7) изображены на фиг. 1, *а*, а итерационное решение этих уравнений представлено на фиг. 1, *б*, где последнему диаграммному равенству соответствует уравнение (2.8). Для вычисления интересующей корреляционной функции скорости следует перемножить диаграммные ряды для скорости, а затем выполнить усреднение по логарифму проницаемости, которое сводится к соединению входящих в средние вершины треугольников линиями корреляторов. С точностью до членов четвертого порядка теории возмущений (диаграммы содержат 4 треугольника) для корреляционной функции получим диаграммное представление на фиг. 2. При этом соответствующие диаграммам (4), (7) выражения оказываются равными нулю на основании аргументов, приводящих к (2.10).

3. Тензор корреляции скоростей. Проведение вычислений с использованием диаграммной техники удобно проводить в пространстве Фурье-образов. Знание Фурье-образа тензора корреляции скоростей $D_{ij}(\mathbf{q})$ позволяет найти этот тензор в конфигурационном пространстве

$$D_{ij}(\mathbf{r}) = \int\frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^d}D_{ij}(\mathbf{q})e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}$$

а также вычислить тензор дисперсии скоростей

$$T_{ij} = \langle\delta v_i(\mathbf{r})\delta v_j(\mathbf{r})\rangle = D_{ij}(0) = \int\frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^d}D_{ij}(\mathbf{q})$$



Фиг. 1. Диаграммное уравнение (*а*) соответствует уравнениям (2.6), (2.7); диаграммное представление (*б*) – итерационному решению уравнения (2.7) и формуле (2.8)

Из условия изотропии системы следует $T_{ij} = T_{(i)}\delta_{ij}$, где $T_{(i)} = T_l$, если $i = 1$ и $T_{(i)} = T_t$, если $i \neq 1$, T_l и T_t соответствуют дисперсии продольной и поперечной компонент скорости по отношению к направлению фильтрационного потока.

В низшем приближении теории возмущений (фиг. 2, диаграмма 1) соответствующий расчет тензора корреляции скоростей дает

$$D_{ij}^{(1)}(\mathbf{q}) = V^2 B(q) P_{i1}(\mathbf{q}) P_{j1}(\mathbf{q}) \tag{3.1}$$

при этом было использовано следующее из (2.2), (2.3) и формулы

$$\lim_{L \to \infty} \frac{\sin q_1 L}{q_1} = \pi\delta(q_1)$$

соотношение

$$\upsilon_i^{(p)}(\mathbf{q}) = V(2\pi)^d \delta(\mathbf{q}) \delta_{i1}$$

Результат (3.1) получен с учетом того, что волновые числа входящих в правые вершины горизонтальных линий на диаграммах равны нулю, а также при использовании легко проверяемого тождества

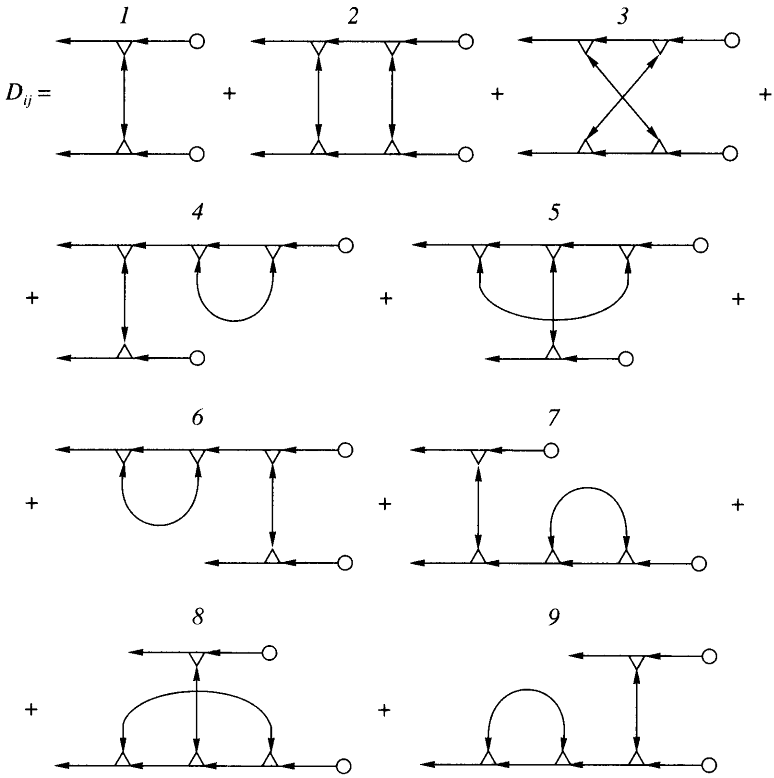
$$\Gamma_{ij}(\mathbf{q}|\mathbf{q}, 0) = q^2 P_{ij}(\mathbf{q})$$

Формула (3.1) с точностью до множителя совпадает с результатом, полученным в [3, формула (28а)] в рамках "простой теории возмущений". Наличие дополнительного множителя связано с использованием разложения коэффициента проницаемости среды в ряд по степеням логарифма коэффициента проницаемости. В предлагаемом подходе нет необходимости использования подобного разложения.

Из (3.1) вытекают значения для дисперсии скорости

$$T_l^{(1)} = \frac{d^2 - 1}{d(d+2)} V^2 \sigma^2, \quad T_t^{(1)} = \frac{1}{d(d+2)} V^2 \sigma^2$$

где σ^2 – дисперсия логарифма проводимости ($\sigma^2 = B(0)$).



Фиг. 2. Диаграммное представление для парной корреляционной функции скоростей с точностью до второго порядка теории возмущений: *1* – первое приближение теории возмущений, *2–9* – второе приближение

В следующем приближении теории возмущений необходимо учитывать вклад диаграмм *2–9* на фиг. 2. Как уже упоминалось, вклад диаграмм *4*, *7* оказывается равным нулю, а вклады диаграмм *5*, *6* и *8*, *9* попарно равны.

В дальнейшем ограничимся вычислением только продольной и поперечной компонент тензора дисперсии скорости для частного случая $B(q) = B_0\exp\{-mq^2\}$ (B_0 и m связаны с дисперсией логарифма проводимости среды соотношением $\sigma^2 = B_0/(4\pi m)^{d/2}$).

В связи с тем, что вклады различных диаграмм частично сокращаются, приведем результаты вычислений для некоторых совокупностей диаграмм.

Используя правила диаграммной техники для вклада диаграмм *2*, *3* фиг. 2, найдем

$$\begin{aligned} D_{ij}^{(2)}(\mathbf{q}) + D_{ij}^{(3)}(\mathbf{q}) &= \frac{V^2}{q^4}\int\frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^{d/2}}\Gamma_{ik}(\mathbf{q}|\mathbf{q}-\mathbf{p},\mathbf{p})P_{k1}(\mathbf{p})B(\mathbf{p})B(\mathbf{q}-\mathbf{p})\times \\ &\times[\Gamma_{jm}(\mathbf{q}|\mathbf{q}-\mathbf{p},\mathbf{p})P_{m1}(\mathbf{p}) + \Gamma_{jm}(\mathbf{q}|\mathbf{p},\mathbf{q}-\mathbf{p})P_{m1}(\mathbf{q}-\mathbf{p})] \end{aligned} \qquad (3.2)$$

При вычислении (3.2) удобно упростить это выражение с помощью соотношений

$$\Gamma_{ik}(\mathbf{q}|\mathbf{p},\mathbf{q}-\mathbf{p}) = q^2P_{ik}(\mathbf{q}) - \Gamma_{ik}(\mathbf{q}|\mathbf{p},\mathbf{q}-\mathbf{p}), \quad \Gamma_{ik}(\mathbf{q}|\mathbf{p},0) = q^2P_{ik}(\mathbf{q})$$

и при выполнении интегрирований воспользоваться формулой, называемой представлением Швингера

$$\frac{1}{(q^2)^n} = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty \alpha^{n-1}e^{-\alpha q^2}d\alpha$$

Результат вычислений продольной и поперечной компонент тензора дисперсии дает

$$T_l^{(2)} + T_l^{(3)} = \frac{d-1}{d(d+2)}\left[2\frac{d^2-1}{d} - A\right]V^2\sigma^4$$

$$T_t^{(2)} + T_t^{(3)} = \frac{1}{2d(d+2)}\left[-\frac{d}{4} + A\right]V^2\sigma^4$$

$$A = (d^2+d-2)\beta\left(\frac{d}{2}\right), \quad \beta(n) = \int_0^1 t^{n-1}(1+t)^{-1}dt$$

Вклад остальных диаграмм определяется соотношением

$$D_{ij}^{(5)}(\mathbf{q}) + D_{ij}^{(6)}(\mathbf{q}) = D_{ij}^{(8)}(\mathbf{q}) + D_{ij}^{(9)}(\mathbf{q}) =$$

$$= \frac{V^2}{q^4}P_{j1}(\mathbf{q})B(\mathbf{q})\int\frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^d}\Gamma_{ik}(\mathbf{q}|\mathbf{p},\mathbf{q}-\mathbf{p})\frac{B(\mathbf{p})}{(\mathbf{p}-\mathbf{q})^2}\times$$

$$\times[\Gamma_{kn}(\mathbf{q}-\mathbf{p}|\mathbf{q},-\mathbf{p})P_{n1}(\mathbf{p}) + \Gamma_{kn}(\mathbf{q}-\mathbf{p}|-\mathbf{p},\mathbf{q})P_{n1}(\mathbf{q})]$$

Расчет компонент тензора дисперсии дает

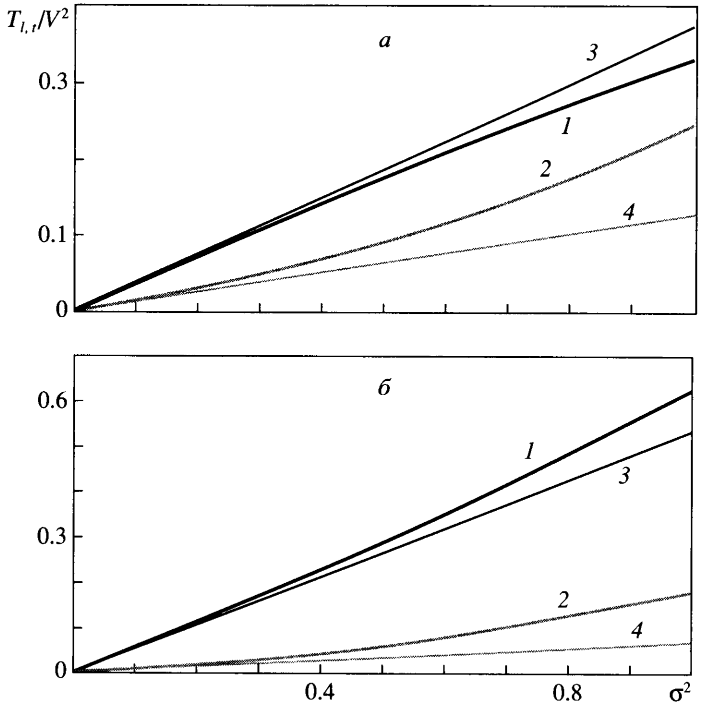
$$T_l^{(5)} + T_l^{(6)} = \frac{d^2-1}{2d(d+2)}\left[\frac{1}{d} - \beta\left(\frac{d}{2}\right)\right]V^2\sigma^2$$

$$T_t^{(5)} + T_t^{(6)} = \frac{1}{d^2-1}[T_l^{(5)} + T_l^{(6)}]$$

В результате во втором приближении теории возмущений получим

$$\begin{aligned} T_l &= \frac{d^2-1}{d(d+2)}V^2\left\{\sigma^2 + \left[\frac{2d-1}{d} - \frac{d^2+2d-1}{d+1}\beta\left(\frac{d}{2}\right)\right]\sigma^4\right\} \\ T_t &= \frac{1}{d(d+2)}V^2\left\{\sigma^2 + \left[\frac{8-d^2}{8d} + \frac{d^2+d-4}{2}\beta\left(\frac{d}{2}\right)\right]\sigma^4\right\} \end{aligned} \qquad (3.3)$$

Результаты численных расчетов по формулам (3.3) приведены на фиг. 3. Из этой фигуры следует, что в случае продольной компоненты тензора дисперсии поправки второго приближения оказываются малыми, тогда как для поперечных компонент эти поправки могут оказаться существенными уже в случае $\sigma^2 \sim 1$. Полезно также обратить внимание на то, что тензор дисперсии не зависит от параметра m, связанного с корреляционной длиной L соотношением $m \sim L^2$. Отсюда следует, что выбор формы корреляционной функции логарифма проводимости в форме экспоненты не уменьшает общности выполненного рассмотрения, поскольку в произвольном случае кор-



Фиг. 3. Продольная (кривые *1*) и поперечная (кривые *2*) составляющие тензора дисперсии скоростей как функции дисперсии логарифма проводимости среды при размерностях пространства $d = 2$ (*а*) и $d = 3$ (*б*); тонкие кривые *3*, *4* соответствуют низшему приближению теории возмущений

реляционная функция может быть записана в виде $B(q) = \int_0^\infty dm\, g(m)\{-mq^2\}$ и при вычислении тензора дисперсии скорости останутся выражения типа $\int\limits_0^\infty dmg(m)(4\pi m)^{-d/2} =$ $= B(r)/_{r=0} = \sigma^2$.

Заключение. В реальных пористых средах разброс проводимости отдельных макроучастков оказывается значительным, в связи с чем величина σ^2 будет большой. Полученные результаты показывают, что при рассмотрении статистических характеристик случайного поля скоростей в фильтрационном потоке учет высших приближений теории возмущений может существенно повлиять на результаты расчета явлений переноса в случайно-неоднородной среде при наличии течений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Phythian R., Curtis W.D.* The effective long-time diffusivity for a passive scalar in a Gaussian model fluid flow // J. Fluid Mech. 1978. V. 89. Pt. 2. P. 241.
2. *Dean D.S., Drummond I.T., Horgan R.R.* Perturbation schemes for flow in random media // J. Phys. A: Math. Gen. 1994. V. 27. № 15. P. 5135–5144.
3. *Gelhar L.W., Axness C.L.* Three-dimensional stochastic analysis of macrodispersion in aquifers// Water Resour. Res. 1983. V. 19. № 1. P. 161.

4. *Швидлер М.И.* Статистическая гидродинамика пористых сред. М.: Недра, 1985. 288 с.
5. *King P.R.* The use of field theoretic methods for the study of flow in a heterogeneus porous medium // J.Phys. A: Math. Gen. 1987. V. 2. № 12. P. 3935–3947.
6. *Hristopulos D.T., Christakos G.* Diagrammatic theory of effective hydraulic conductivity // Stochastic Hydrol. Hydraul. 1997. V. 11. № 5. P. 369–395.
7. *Теодорович Э.В.* Метод улучшенной теории возмущений при описании эффективной проницаемости случайно-неоднородной среды // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 3. С. 448–456.
8. *Stepanyants Y.A., Teodorovich E.V.* Effective hydraulic conductivity of a randomly heterogeneous porous medium // Water Resour. Res. V. 39. № 3. P. 1065–1075.
9. *Noetinger B.* The effective permeability of a heterogeneous porous medium // Transp. Porous Media. 1994. V. 15. P. 99–127.
10. *Jaekel U., Vereecken H.* Renormalization group analysis of macrodispersion in a directed random flow // Water Resour. Res. 1997. V. 33. № 10. P. 2287–2299.
11. *Hristopulos D.T., Christakos G.* Renormalization group analysis of permeability upscaling // Stochastic Enviromental Res. and Risk Assessment. 1999. V. 13. № 1/2. P. 131–160.
12. *Теодорович Э.В.* Метод ренормализационной группы в задаче об эффективной проводимости случайно-неоднородной пористой среды // ЖЭТФ. 2002. Т. 122. № 1. С. 79–89.
13. *Теодорович Э.В.* К вычислению эффективной проницаемости случайно-неоднородной пористой среды // ЖЭТФ. 1997. Т. 112. № 1(7). С. 313–324.

Москва
E-mail: teodor@ipmnet.ru

Поступила в редакцию
16.X.2003