

УДК 532.546

© 2004 г. А. Г. КУЛИКОВСКИЙ

О ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДАХ ПРИ ФИЛЬТРАЦИИ В ТЕПЛОПРОВОДНОМ СКЕЛЕТЕ

Рассматриваются особенности одномерных течений фильтрующейся среды, представляющей собой жидкость, пар или их смесь, когда ее температура и температура пористого скелета, через который она фильтруется, определяются процессами теплопроводности в скелете и фильтрующейся среде, а также фазовыми превращениями среды (испарением или конденсацией). Исследованы фронты фазовых превращений и их структура, когда хотя бы с одной стороны фронта среда находится в “чистом” виде, т.е. в виде жидкости или пара, а не их смеси. Кроме того, показано, что может существовать ранее не рассматривавшийся вид течений, когда в некоторой области пространства происходит течение среды, термодинамическое состояние частиц которой принадлежит границе фазового перехода между чистым состоянием и смесью. Рассмотрение проводится в общем виде без конкретизации свойств среды.

Ключевые слова: фильтрация, испарение, конденсация, термодинамическое равновесие, поток энергии, разрывы, характеристики, структура разрывов, стационарные течения.

При фильтрации в теплопроводном пористом скелете возможны равновесные течения смеси пара и воды, которые могут содержать разрывы плотности [1–4]. В [5] изучено вырождение параболической системы уравнений, описывающей фильтрацию и перенос тепла, когда среда представляется смесью. Это вырождение носит гиперболический характер, причем появляется семейство характеристик, распространение возмущений по которым объясняет возможность образования разрывов. Вырождение связано с обращением в нуль производной $(\partial T / \partial p)_p$, т.е. с зависимостью $T = T(p)$, принимаемой для давления насыщенного пара. Ранее подобное вырождение было изучено при фазовых переходах в неподвижной среде [6]. Хотя при этом в области смеси фаз скорость характеристик (на которых сохраняется фазовый состав при отсутствии внешних притоков тепла) оказывается равной нулю, разрывы фазового состава могут естественным образом возникать на границах области смеси. В [5] для рассмотрения “процесса” вырождения было предположено, что $-(\partial T / \partial p)_p = \epsilon$ в области смеси – малая положительная величина, которая затем устремлялась к нулю. Это позволило также рассматривать структуру разрывов. В [5] была рассмотрена структура внутренних разрывов в области смеси, когда по обе стороны разрыва фильтрующаяся среда является смесью, и было показано, что существование структуры разрывов, порожденной упомянутым выше предположением выделяет эволюционные разрывы. В [6] подобный прием, заключающийся в “размазывании” температуры плавления с последующим устремлением ширины размазки к нулю, также рассматривался как теоретический и численный метод.

1. Эволюционное уравнение для быстрых изменений плотности. Уравнения, описывающие равновесное (в смысле внутренних процессов) течение фильтрующейся среды в пористом скелете и соответствующее уравнение энергии можно записать в виде [5]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\chi \frac{\partial p}{\partial x} - \lambda \epsilon \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \quad (1.2)$$

Здесь k – коэффициент фильтрации, λ – коэффициент теплопроводности, e – суммарная объемная плотность энергии фильтрующей среды и скелета, χ – суммарный коэффициент, характеризующий зависимость потока энергии от $\partial p/\partial x$, который учитывает как поток энергии, связанный с потоком вещества, пропорциональным $\partial p/\partial x$, так и поток тепла, определяемый градиентом температуры

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T \partial p}{\partial p \partial x} - \varepsilon \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \varepsilon = -\frac{\partial T}{\partial p} > 0$$

Коэффициенты λ , χ и k – функции p и ρ , считающиеся в дальнейшем не зависящими явно от x . В области, где жидкость и пар находятся в термодинамическом равновесии, имеют место равенства

$$\varepsilon = 0, \quad e'_\rho = e'_\rho(p) \quad (1.3)$$

где штрихом обозначена производная.

При $\varepsilon = 0$ возможны разрывы, на которых при непрерывном p рвутся плотность среды ρ и $\partial p/\partial x$, что вызывается испарением части жидкости [1–5]. Если считать, как в [5], ε малой, но не равной нулю величиной, то изменение плотности может происходить в узком слое, обращаемом в эволюционный разрыв при $\varepsilon \rightarrow 0$. Хотя в действительности описание структуры разрывов может быть иным, в дальнейшем для простоты будем описывать структуру разрывов считая $\varepsilon \neq 0$ в области смеси и затем устремляя ε к нулю. Ширина структуры и изменение давления в этой структуре оказываются порядка ε [5].

Из системы уравнений (1.1), (1.2) следует

$$e'_\rho \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial x} + k \frac{\partial p \partial e'_\rho \partial p}{\partial x \partial p \partial x} \quad (1.4)$$

$$e'_\rho = \partial e / \partial p, \quad A = \varphi \frac{\partial p}{\partial x} - \lambda \varepsilon \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \varphi = \chi - e'_\rho k \quad (1.5)$$

Исключая $\partial^2 p / \partial x^2$ из уравнений (1.4), (1.1), получим уравнение, содержащее только первые производные функции p :

$$\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{k}{\varphi} e'_\rho \frac{\partial p}{\partial t} = A \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k}{\varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k}{\varphi} \lambda \varepsilon \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{k \partial e'_\rho}{\varphi \partial p} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 \quad (1.6)$$

Наличие члена со второй производной функции p в правой части уравнения (1.4) при условии, что φ больше некоторой положительной постоянной, приводит к тому, что p не может испытывать резких изменений на малых интервалах x и t . Такие изменения возможны только для ρ и только в области параметров ρ и p , которая соответствует смеси. Рассматривая в этой области быстрые изменения плотности ρ и пренебрегая при этом зависимостью k , χ , $\varepsilon \lambda$, e и e'_ρ от p , а также членами, не содержащими производных от ρ , в уравнениях (1.6) и (1.4), получим

$$\frac{\partial p}{\partial t} - A \left(\frac{k}{\varphi} \right)' \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k}{\varphi} \lambda \varepsilon \frac{\partial p}{\partial x} \right), \quad A = A(t) \quad (1.7)$$

Здесь штрихом обозначена производная по ρ . Уравнение (1.7) приближенное и описывает быстрые изменения ρ в областях, занятых смесью. Оно пригодно для описания структуры разрывов и заключительной стадии процесса их образования. Уравнение (1.7) согласуется с предположением, что в изучаемых волнах производные от ρ по x и t неограниченно растут при $\varepsilon \rightarrow 0$, а производные от p остаются ограниченными

ми. Поскольку $A(t)$ – постоянная интегрирования упрощенного уравнения (1.4) и определяется “фоном”, по которому распространяется волна быстрого изменения плотности, в случае достаточно регулярного фона и, в частности, при описании структуры разрывов можно считать, что $A = \text{const}$. Если состояние перед или за короткой волной с резким изменением плотности принадлежит области смеси (ϵ мало), где производная $\partial\rho/\partial x$ конечна, то величина A может определяться по этому состоянию только первым членом выражения для A в (1.5). Если в рассматриваемой волне происходит полное превращение жидкости в пар или наоборот, то при определении постоянной A нужно использовать выражение (1.5) полностью с одной из сторон разрыва.

При $\epsilon = 0$ выражение для скорости характеристик получается из (1.7) и (1.5)

$$c = A \frac{d}{d\rho} \left(\frac{k}{\varphi} \right), \quad A = \varphi \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1.8)$$

При $\epsilon = 0$ уравнения (1.7), (1.8) были получены в [5]. Устойчивость решений, описываемых уравнением (1.7), имеет место при $\varphi > 0$, поскольку $k\lambda\epsilon > 0$. В случае, когда решение зависит от $\xi = -x + Wt$, уравнение (1.7) после интегрирования дает уравнение, описывающее структуру разрыва и полученное в [5].

2. Структура разрывов. Стационарные течения. Уравнение (1.7) позволяет исследовать структуру разрывов, т.е. найти решение этого уравнения в виде бегущей волны, которое при $\epsilon \rightarrow 0$ переходит в движущуюся ступеньку. Структура разрывов, которые расположены внутри смеси, была рассмотрена в [5]. Ниже будут проанализированы стационарные течения и структура разрывов, у которых хотя бы одно из состояний не является смесью. Пусть $\rho = \rho(\xi)$, $\xi = -x + Wt$. Тогда после однократного интегрирования (1.7) получим

$$\lambda m \epsilon \frac{d\rho}{d\xi} = A \left(\frac{k}{\varphi} \right) + W\rho + \text{const}, \quad A = \text{const} \quad (2.1)$$

Правая часть может обращаться в нуль при некоторых значениях ρ . Если при этом производная по ρ от правой части уравнения (2.1) отрицательна, то с ростом ξ решение $\rho(\xi)$ уравнения (2.1) приближается к этому значению. Это значение ρ может служить состоянием за разрывом, и для этого необходимо (см. равенства (2.1) и (1.8)), чтобы в этом состоянии выполнялось равенство $W < c$. Противоположное неравенство обеспечивает уход решения $\rho(\xi)$ от значения ρ , обращающего в нуль правую часть (2.1). Кроме того, возможны ситуации, когда правая часть в (2.1) не обращается в нуль ни при каких ρ из области смеси.

Как уже говорилось, в уравнении (1.7) и, следовательно, в (2.1) p считается постоянным. Для того чтобы представить задачу в целом, вернемся к уравнениям (1.1) и (1.2) считая, что решение зависит от $\xi = -x + Wt$. После однократного интегрирования эти уравнения принимают вид

$$k \frac{dp}{d\xi} + W \frac{1}{V} = a, \quad \chi \frac{dp}{d\xi} + We + \frac{\epsilon \lambda dV}{V^2 d\xi} = b \quad (2.2)$$

Здесь a и b – постоянные интегрирования, $V = 1/\rho$.

На плоскости V, p области, занятые жидкостью, паром и смесью имеют вид [7], качественно изображенный на фигуре. При этом область 3, ограниченная кривой, проходящей через точки C', C, G, H, D, D' , соответствует смеси. Слева эта область граничит с областью 1, соответствующей жидкости, а справа – с областью 2, соответствующей пару. Выше точки H граница между жидкостью и паром условна.

Одна из возможных краевых задач для системы (2.2) заключается в задании пар значений V_1, p_1 и V_2, p_2 на концах отрезка $[\xi_1, \xi_2]$, на котором строится решение, и

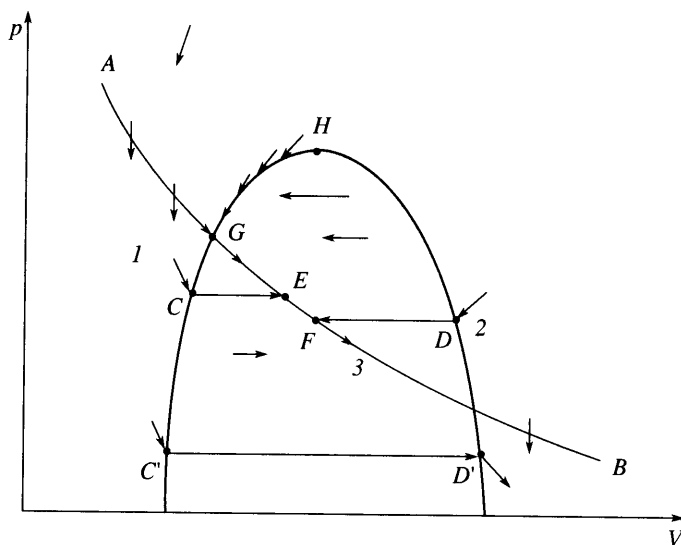


Схема процесса на плоскости p, V : 1 – область, соответствующая жидкости, 2 – область пара, 3 – область смеси

подборе значений a и b таких, что точки V_1, p_1 и V_2, p_2 соединяются интегральной кривой системы (2.2) на плоскости V, p . Такая задача естественна при определении стационарного течения при $W = 0$. При $W \neq 0$ можно рассматривать структуру разрыва. Заметим, что умножение разности координат концов рассматриваемого отрезка $\xi_2 - \xi_1$ на произвольный множитель q и одновременное умножение W и постоянных a и b на множитель $1/q$ переводит решение краевой задачи в решение с теми же граничными условиями на концах отрезка. Если $q = -1$, то указанное преобразование сводится к обмену граничными условиями на концах отрезка. Из равенств (2.2) можно найти $dp/d\xi$ и $\epsilon \lambda V^{-2} dV/d\xi$. Вне области смеси это – конечные величины. При переходе от однородной среды к смеси ϵ скачком становится малой величиной, а $dV/d\xi$ приобретает порядок величины $1/\epsilon$. При этом $dp/d\xi$ не изменяется и изоклина $dV/d\xi = 0$ также не претерпевает изменений.

При заданных a, b, W и непрерывных дифференцируемых $k(V, p)$ и $\chi(V, p)$ (что в дальнейшем предполагается) изоклина $dV/d\xi = 0$ или $dV/dp = 0$ представляется на плоскости V, p гладкой кривой, не испытывающей излома на границах области смеси (кривая AB на фигуре). Ее уравнение, как следует из (2.2), имеет вид

$$f(p, V) = 0, \quad f \equiv b - \frac{\chi}{k} a - \left(e - \frac{\chi}{kV} \right) W \quad (2.3)$$

где постоянные a и b могут быть определены согласно (2.2) по состоянию перед или за разрывом.

В противоположность этому интегральные кривые уравнений (2.2), (2.3), имеющие в общем случае конечный наклон dV/dp в области чистой среды, становятся почти параллельными оси V за счет увеличения модуля $dV/d\xi$ в области смеси. Эти отрезки интегральных кривых соответствуют малому изменению ξ и при $\epsilon \rightarrow 0$ обращаются в разрывы плотности при непрерывном давлении p .

Не рассматривая здесь конкретных функций k, χ, e , входящих в систему (2.2), выясним некоторые особенности поведения интегральных кривых системы, главным образом на границе области, соответствующей смеси. Пусть из области однородной

среды интегральная кривая с ростом ξ подходит к точке границы с областью смеси, в которой знак $dV/d\xi$ обеспечивает возможность продолжения интегральной кривой в область смеси. При переходе через границу $dV/d\xi$ увеличивается в $1/\varepsilon$ раз, что означает быстрое изменение V , переходящее в разрыв при $\varepsilon \rightarrow 0$. Состояние перед разрывом (при меньших ξ) соответствует точке на границе области смеси (например точка C на фигуре), в то время как состояние за разрывом может либо соответствовать ближайшей точке, лежащей на изоклине $dV/d\xi = 0$ при том же p (точка E), либо, если почти горизонтальная интегральная кривая в области смеси не встречает изоклину $dV/d\xi = 0$, то она проходит область смеси насквозь ($C'D'$ на фигуре), что соответствует при $\varepsilon = 0$ разрыву, на котором происходит полное изменение агрегатного состояния.

Примеры разрывов представлены на фигуре переходами $C \rightarrow E$, $D \rightarrow F$ и $C' \rightarrow D'$. Изоклина AB на этом рисунке изображена произвольно, без привязки к свойствам каких-либо конкретных веществ. Если состояние за разрывом принадлежит области смеси, то при стационарном течении интегральная кривая может идти далее вдоль изоклины $dV/d\xi = 0$ в соответствии с изменением p , диктуемым первым уравнением (2.2). В нестационарных процессах, когда решение в целом не представляется бегущей волной, стационарными уравнениями (2.2) можно описывать структуры разрывов, рассмотренные выше, а непрерывные течения по обе стороны разрыва должны описываться исходными уравнениями (1.1), (1.2).

Наряду с разрывами, возникающими при входе в область смеси, очевидно, могут существовать разрывы V на выходе из области смеси и внутренние разрывы [5], если функция $p(V)$, представляющая уравнение изоклины, не монотонна. Существование тех или иных разрывов плотности определяется очевидным образом нулями функции $f(p, V)$, определенной равенством (2.3) и ее знаком, когда она отлична от нуля.

Если при стационарном течении интегральная кривая системы (2.2) подходит из области однородной среды к границе области смеси, имеется еще одна возможность. Может оказаться, что из области смеси к этой части границы также подходят интегральные кривые (как на отрезке границы GH , изображенном на фигуре). Для этого необходимо, чтобы интегральная кривая подошла к границе области там, где знак производной dp/dV для границы области смеси противоположен знаку функции $f(p, V)$, совпадающему с dp/dV . Интегральные кривые, приходящие к этому отрезку, при $\varepsilon = 0$ теряют единственность и собираются в одну кривую, совпадающую с границей области смеси. Эта интегральная кривая, совпадающая с границей области смеси, представляет решение вплоть до точки пересечения с изоклиной $dV/d\xi = 0$ (точка G на фигуре). В ε – окрестности этой точки кривая, представляющая решение, входит в область смеси и далее может идти вдоль изоклины $dV/d\xi = 0$. Несомненно, что и в нестационарных течениях также могут устойчиво существовать области в физическом пространстве, в которых состояние вещества принадлежит границе области смеси.

Отметим простейший частный случай малой пористости, когда поток энергии осуществляется за счет теплопроводности неподвижной среды с постоянным коэффициентом теплопроводности, а переносом энергии жидкостью и паром можно пренебречь. Кроме того, примем, что коэффициент фильтрации k является функцией только плотности, т.е. состава смеси, а зависимостью k от давления (температуры) пренебрежем. Пусть также течение в неподвижной пористой среде стационарно, т.е. $W = 0$. Тогда уравнение (2.3) при $\varepsilon = 0$ имеет стационарное решение $dp/dx = \text{const}$. При сделанных выше предположениях это решение не зависит от функции, задающей плотность, поэтому можно рассмотреть уравнение (1.1), описывающее нестационарный процесс на фоне упомянутого решения

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - p_x k'_p(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad p_x = \frac{\partial p}{\partial x} = \text{const} \quad (2.4)$$

Это простое уравнение позволяет легко исследовать эволюцию решений при различных зависимостях $k(\rho)$ и различных начальных и граничных условиях для ρ . Если $k_\rho < 0$, то из (2.4) следует, что характеристики распространяются в сторону, противоположную течению жидкости. В частности, если $k(\rho)$ имеет минимум в области смеси, то эволюция распространения плотности, описываемая уравнением (2.4), приводит при неизменных граничных условиях к образованию разрывов на обоих концах фиксированного отрезка оси x , занятого смесью. В общем случае уравнения (1.1), (1.2) не расщепляются и их требуется решать совместно.

Заключение. Если фронт, на котором давление p и удельный объем V принадлежат границе области смеси, движется со скоростью W и с одной из сторон этого фронта имеется однородная среда, то по другую сторону осуществляется один из трех вариантов продолжения течения. Возможно непрерывное продолжение решения в область смеси, возможно продолжение с разрывом плотности и возможно продолжение решения, в котором область пространства, примыкающая к фронту, занята течением среды, параметры которой принадлежат границе области смеси на плоскости p, V . Условия, при которых осуществляется тот или иной вариант, зависят от значений постоянных, задающих потоки массы и энергии через фронт и описаны в п. 2.

Автор благодарит А.А. Бармина и Г.Г. Цыпкина за полезные обсуждения проблем, затронутых в статье, а также В.В. Пухначева, обратившего внимание на работу [6], близкую по изучаемым процессам и методам.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 02-01-00067) и гранта президента Российской Федерации поддержки ведущих научных школ (№ НШ-1697.2003.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Цыпкин Г.Г. О возникновении двух подвижных границ фазовых переходов при добыче пара из гидротермального водонасыщенного пласта // Докл. РАН. 1994. Т. 337. № 6. С. 748–751.
2. Бармин А.А., Цыпкин Г.Г. Математическая модель инжекции воды в геотермальный пласт, насыщенный паром // Изв. РАН. МЖГ. 1996. № 6. С. 92–98.
3. Кондрашов А.В., Цыпкин Г.Г. О режимах инжекции воды в геотермальный пласт, насыщенный паром // Изв. РАН. МЖГ. 1999. № 2. С. 86–91.
4. Бармин А.А., Кондрашов А.В. Двухфронтная математическая модель инжекции воды в геотермальный пласт, насыщенный паром // Изв. РАН. МЖГ. 2000. № 3. С. 105–112.
5. Куликовский А.Г. О фронтах испарения и конденсации в пористых средах // Изв. РАН. МЖГ. 2002. № 5. С. 85–92.
6. Мейрманов А.М. Задача Стефана. Новосибирск: Наука, 1986. 239 с.
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 5. Статистическая физика. М.: Наука, 1964. 567 с.

Москва

Поступила в редакцию
23.XII.2003