

© 2004 г. О. Е. ИВАШНЕВ, Н. Н. СМИРНОВ

ТЕПЛОВОЙ РОСТ ПАРОВОГО ПУЗЫРЬКА, ДВИЖУЩЕГОСЯ В ПЕРЕГРЕТОЙ ЖИДКОСТИ

Задача о тепловом росте парового пузырька, движущегося в перегретой жидкости, решена для двух моделей межфазной поверхности: "твёрдой" (условие прилипания) и "мягкой" сфер (проскальзывание). Получено второе автомодельное решение задачи о движении парового пузырька с мягкой поверхностью. На основе полученного решения построена аппроксимационная зависимость безразмерного теплового потока в пузырек от чисел Яакова и Пекле, которая для двух предельных случаев: растущего без движения и движущегося пузырька постоянного радиуса, совпадает с известными решениями. Результаты расчетов сопоставлены с данными экспериментов о всплытии паровых пузырьков в перегретой жидкости.

Ключевые слова: пузырек, обтекание, испарение, пограничный слой, автомодельное решение.

При внезапной разгерметизации сосудов со сжиженным газом, авариях атомных энергоустановок жидкость переходит в метастабильное состояние: ее температура оказывается выше температуры насыщенных паров. В жидкости появляются пузырьки пара. При движении жидкость и пузырьки приобретают разные скорости. Их разность может достигать несколько м/с. Теплообмен между пузырьками и жидкостью оказывает существенное влияние на динамику течений, а проскальзывание фаз существенным образом влияет на теплообмен. Поэтому при моделировании неравновесных парожидкостных потоков необходимо учитывать влияние проскальзывания фаз на межфазный теплообмен.

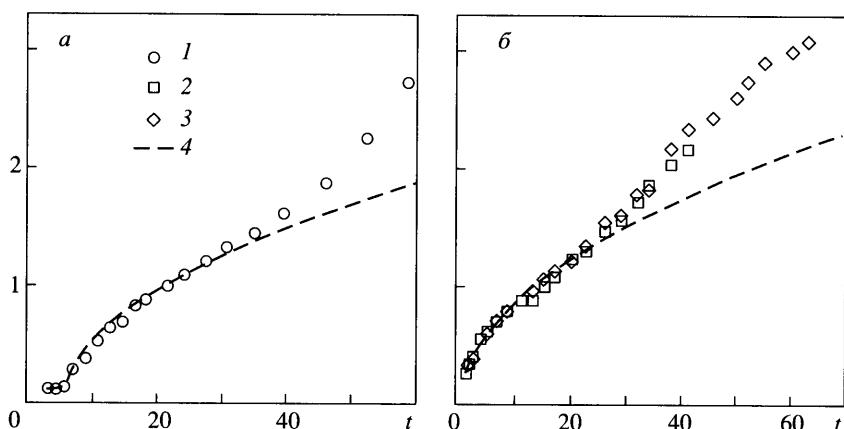
1. Сопоставление экспериментальных данных с расчетами для неподвижного пузырька. Роль проскальзывания заметна даже в экспериментах по всплытию паровых пузырьков в перегретой жидкости под действием силы тяжести, хотя их скорость при свободном всплытии составляет см/с. Экспериментальная установка [1] представляла собой герметичный сосуд, в котором под повышенным давлением находилась вода, нагретая до температуры, превышающей 373 К. В начальный момент сосуд открывался, давление в нем падало и жидкость оказывалась в перегретом состоянии. Через тонкую стеклянную трубочку в сосуд поступал пар. Рост оторвавшихся от трубы пузырьков фиксировался кинокамерой. Установка позволяла проводить эксперименты в падающем сосуде, т.е. в условиях невесомости. В этом случае было достигнуто хорошее совпадение с решением Скривена для неподвижного пузырька [2]. Экспериментальные зависимости радиуса пузырька от времени в экспериментах при нормальной гравитации представлены на фиг. 1.

На фиг. 1 приведены результаты расчетов роста неподвижного пузырька с использованием автомодельного решения [2]. Решение дает зависимость радиуса пузырька от времени в виде

$$a = \sqrt{a_0^2 + D_l Ja Nu(t - t_0)}$$

где a – радиус пузырька; a_0 – его значение в начальный момент времени t_0 ; $D_l = \lambda_l / (c_l \rho_l)$ – коэффициент температуропроводности жидкости; λ_l – коэффициент ее теплопроводности; c_l – удельная теплоемкость жидкости; ρ_l – ее плотность. Число Яакова определено как

$$Ja = \frac{c_l \rho_l (T_l - T_s)}{h \rho_g} \quad (1.1)$$



Фиг. 1. Сравнение экспериментальных зависимостей (1–3) радиуса парового пузырька a (мм) от t (мс) с автомодельным решением (4) для неподвижного пузырька [2]: $a - T_l - T_s = 3.61$ К ($Ja = 10.8$); $b - 3.9$ К ($Ja = 11.69$); 1 – эксперимент 7 [1], 2 – эксперимент 8 А, 3–8 В

Здесь T_s , T_l – значения температуры на межфазной поверхности и вдали от нее; h – удельная теплота фазового перехода; ρ_g – плотность пара; Nu – число Нуссельта. Скривен определил зависимость Nu(Ja) в неявной форме [2]. Удобная аппроксимация этого решения дана в [3]

$$Nu = 2 + \left(\frac{6Ja}{\pi} \right)^{1/3} + \frac{12}{\pi} Ja \quad (1.2)$$

Сравнение экспериментальных зависимостей роста пузырька от времени с результатами расчетов по теории для неподвижного пузырька показывает, что со временем их расхождение увеличивается. Более того, меняется сам закон зависимости радиуса пузырька от времени. Чтобы добиться лучшего соответствия между теоретическими и экспериментальными данными, учтем влияние обтекания пузырька на теплообмен.

2. Модель парового пузырька с твердой межфазной поверхностью. При постановке задачи об обтекании пузырька возникает трудность, связанная с моделированием механических свойств межфазной поверхности. Классическим считается предположение о равенстве касательных напряжений по обе стороны межфазной поверхности. Тогда сила вязкого сопротивления движению газового пузыря постоянного радиуса при малых числах Рейнольдса может быть рассчитана по формуле Адамара – Рыбчинского. Однако оказалось [4], что эксперименты по всплытию газовых пузырьков лучше описывает формула Стокса для твердой сферы, полученная из предположения о равенстве скорости жидкости на межфазной поверхности скорости центра масс частицы, т.е. о том, что поверхность выдерживает любые касательные напряжения. Левич [5] объяснил этот феномен оседанием имеющихся в жидкости примесей на межфазной поверхности, приводящим к ее “затвердеванию”. Опишем движение парового пузырька исходя из предположения о твердой межфазной поверхности.

Расчеты показывают, что для одномиллиметровых пузырьков числа Рейнольдса при их всплытии быстро выходят на уровень $Re \sim 10^4$. Числа Прандтля $Pr \sim 1$. Поэтому уместно предположение о существовании тонких вязкого и теплового пограничных слоев. Задача об обтекании пузырька разбивается на две: макрозадачу о движении

ния идеальной жидкости вокруг растущей сферы и микрозадачу о движении вязкой жидкости в пограничном слое. Параметры в пузырьке считаются однородными по его радиусу и равными параметрам на линии насыщения. Давление в пузырьке постоянно и равно давлению в жидкости: $P_g = P_l = P$. Плотность пара – много меньше плотности жидкости: $\rho_g \ll \rho_l$.

Для макрозадачи потенциал скорости ϕ , нормальная v_r и тангенциальная v_θ составляющие вектора скорости идеальной жидкости, обтекающей сферическую частицу переменного радиуса, имеют вид

$$\phi = \phi_0(t) - U_b r \cos \theta - \frac{U_b a^3}{2 r^2} \cos \theta - \left(\dot{a} - \frac{j}{\rho_l} \right) \frac{a^2}{r} \quad (2.1)$$

$$v_r = -U_b \cos \theta + \frac{a^3}{r^3} U_b \cos \theta + \left(\dot{a} - \frac{j}{\rho_l} \right) \frac{a^2}{r^2} \quad (2.2)$$

$$v_\theta = U_b \sin \theta + \frac{U_b a^3}{2 r^3} \sin \theta \quad (2.3)$$

где r – радиус-вектор, θ – угол между радиус-вектором и осью потока x , направленной против движения пузырька; U_b – скорость пузырька; $\dot{a} = da/dt$ – скорость расширения пузырька; $j = J/(4\pi a^2)$ – средняя интенсивность испарения на единицу площади межфазной поверхности; интенсивность испарения в пузырек найдены как

$$J = 2\pi a \frac{\lambda_l}{h} \int_0^\pi \left[\frac{\partial T}{\partial r} \right]_{r=a} \sin \theta d\theta$$

При постоянстве давления в пузырьке и соответственно температуры межфазной поверхности, $T_s = T_s(P)$, уравнение баланса массы пара в пузырьке запишется в виде

$$\dot{a} = j \rho_g^{-1} \quad (2.4)$$

После подстановки выражения для \dot{a} из (2.4) в (2.1) и (2.2) и сравнения между собой членов в скобках при условии $\rho_g \ll \rho_l$ приходим к выводу, что членами j/ρ_l правой части уравнений (2.1) и (2.2) можно пренебречь.

Для идеальной жидкости сила F , действующая на пузырек, рассчитывается по известным потенциальному течения (2.1) и полю скоростей (2.2), (2.3). При помощи интеграла Коши–Лагранжа

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho_l} + \left(-g + \frac{dU_b}{dt} \right) r \cos \theta = P_0(t)$$

определяется распределение давления по поверхности сферы. Здесь $g > 0$ – плотность массовых сил (массовые силы коллинеарны вектору скорости и направлены в противоположную сторону оси x). Интегрируя по межфазной поверхности, получаем выражение для силы, действующей на пузырек со стороны макропотока

$$F = \rho_l \frac{4}{3} \pi a^3 G, \quad G = -g - \frac{1}{2} \frac{dU_b}{dt} - \frac{3U_b \dot{a}}{2a}$$

Со стороны пограничного слоя на пузырек будет действовать сила трения F_μ . Уравнение движения пузырька запишется как

$$\frac{d}{dt} \left[\rho_g \frac{4}{3} \pi a^3 U_b \right] = \rho_l \frac{4}{3} \pi a^3 G - F_\mu \quad (2.5)$$

В уравнении (2.5) можно пренебречь массой пузырька (член в левой части уравнения) в сравнении с массой приводимой им в движение жидкости. Заменив скорость пузырька на скорость жидкости на бесконечном удалении от него в подвижной системе координат $U = -U_b$, преобразуем уравнение движения пузырька

$$\frac{dU}{dt} = 2g - \frac{3U\dot{a}}{a} - f_\mu \quad (2.6)$$

Выражение для удельной силы вязкого сопротивления движению пузырька f_μ будет дано ниже после анализа течения в вязком пограничном слое.

Уравнение баланса массы пара в пузырьке (2.4) через безразмерные параметры – числа Яакоба и Нуссельта, может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} a\dot{a} &= \frac{1}{2}D_lJaNu \\ Nu &= \frac{a}{T_l - T_s} \int_0^\pi \left[\frac{\partial T}{\partial r} \right]_{r=a} \sin \theta d\theta \end{aligned} \quad (2.7)$$

В микрозадаче для описания силового и теплового взаимодействия между пузырьком и жидкостью используется система уравнений нестационарного температурного пограничного слоя [6, 7]

$$\frac{a^2 \partial T}{D_l \partial t} + \left[\frac{a v_r}{D_l} - \frac{a \dot{a}}{D_l} (1 + y') \right] \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{v_\theta a \partial T}{D_l \partial \theta} = \frac{\partial^2 T}{\partial y'^2} \quad (2.8)$$

$$\frac{a^2 \partial v_\theta}{v_l \partial t} + \left[\frac{a v_r}{v_l} - \frac{a \dot{a}}{v_l} (1 + y') \right] \frac{\partial v_\theta}{\partial y'} + \frac{v_\theta a \partial v_\theta}{v_l \partial \theta} = \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial (y')^2} - \frac{3a^2}{2v_l} \dot{U} \sin(\theta) + \frac{9aU^2}{4v_l} \sin(\theta) \cos(\theta) \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial y'} + \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial [v_\theta \sin(\theta)]}{\partial \theta} = -2\dot{a} \quad (2.10)$$

где $\nu = \mu/\rho$ – коэффициент кинематической вязкости жидкости; $y' = y/a(t)$ – относительная высота точки над межфазной поверхностью; $\dot{U} = dU/dt$.

Границные условия на поверхности пузырька и на удалении есть

$$y' = 0, \quad v_\theta = 0, \quad v_r = \dot{a}, \quad T = T_s \quad (2.11)$$

$$y' \rightarrow \infty, \quad v_\theta = -\frac{3}{2}U \sin(\theta), \quad T = T_l \quad (2.12)$$

Начальные условия для системы – отсутствие поступательного движения

$$v_\theta = 0, \quad v_r = \dot{a}_0(1 - 2y')$$

и распределение температур, полученное при $a = a_0$ из автомодельного решения [2]

$$T = (T_l - T_s) \operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{3}{4} JaNu y'} \right) + T_s$$

При интегрировании уравнений (2.8)–(2.10) вместо v_θ удобно ввести относительную скорость тангенциального движения $v'_\theta = v_\theta/(-1.5U \sin \theta)$, а вместо v_r – перемен-

ную $v'_r = v_r - (1 - 2y')\dot{a}$. Тогда система уравнений (2.8)–(2.10) перепишется как

$$\frac{a^2}{D_l} \frac{\partial T}{\partial t} + \left[\frac{av'_r}{D_l} + 3 \frac{a\dot{a}}{D_l} y' \right] \frac{\partial T}{\partial y'} - \frac{3a}{2D_l} U v'_\theta \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 T}{\partial (y')^2} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{v_l} \frac{\partial v'_\theta}{\partial t} + \left[\frac{av'_r}{v_l} - 3 \frac{a\dot{a}}{v_l} y' \right] \frac{\partial v'_\theta}{\partial y'} - \frac{3a}{2v_l} U v'_\theta \sin \theta \frac{\partial v'_\theta}{\partial \theta} = \\ = \frac{\partial^2 v'_\theta}{\partial (y')^2} + \frac{a^2 U}{v_l} (1 - v'_\theta) - \frac{3a U}{2v_l} \cos \theta [1 - (v'_\theta)^2] \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial v'_r}{\partial y'} - \frac{3}{2} U \sin \theta \frac{\partial v'_\theta}{\partial \theta} = -2 \cos \theta v'_\theta \quad (2.15)$$

Границные (2.11), (2.12) и начальные условия имеют вид

$$y' = 0, \quad v'_\theta = 0, \quad v'_r = 0, \quad T = T_s \quad (2.16)$$

$$y' \rightarrow \infty, \quad v'_\theta = 1, \quad T = T_l \quad (2.17)$$

$$t = 0, \quad v'_\theta = 0, \quad v'_r = 0 \quad (2.18)$$

Выражение для силы вязкого сопротивления движению пузырька со стороны жидкости будет

$$f_\mu = \frac{9v_l U^\pi}{2a^2} \int_0^\pi \left[\frac{\partial v'_\theta}{\partial y'} \right]_{y'=0} \sin^3 \theta d\theta \quad (2.19)$$

Таким образом, получена замкнутая система уравнений, описывающая движение пузырька с твердой поверхностью (2.6), (2.7), (2.13)–(2.19).

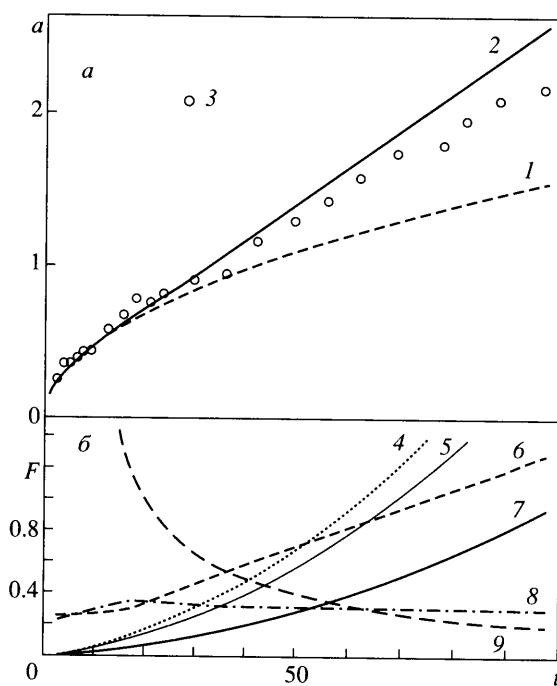
3. Результаты сопоставления с экспериментом расчетов всплытия парового пузырька с твердой межфазной поверхностью. Результаты расчетов сопоставимы с данными 1-го эксперимента [1] (фиг. 2), в котором жидкость была перегрета на $T_l - T_s = 2.2$ К. На фиг. 2, а показано изменение радиуса пузырька $a(t)$, рассчитанное по решению для неподвижного пузырька (кривая 1) и для пузырька с твердой межфазной поверхностью (2). Экспериментальные данные – кружки.

На фиг. 2, б приведено изменение во времени безразмерных параметров, рассчитанных для пузырька с твердой поверхностью, – чисел Нуссельта, Пекле и Рейнольдса, определенных соотношениями: $\text{Pe} = 2a|U|/D_l$, $\text{Re} = 2a|U|/v_l = \text{Pe}/\text{Pr}$.

Для условий экспериментов [1] число Прандтля $\text{Pr} \approx 2$. Число Вебера характеризует устойчивость межфазной поверхности $\text{We} = 2\rho_g a U^2 / \sigma$, где σ – коэффициент поверхностного натяжения. Из графика фиг. 2, б видно, что $\text{We} \ll 1$. На фиг. 2, б представлено также изменение во времени числа Струхала: $\text{St} = 2a/(Ut)$.

Безразмерный параметр $c_{\mu i}$ представляет собой отношение сил вязкого сопротивления движению пузырька к силам сопротивления за счет инерции радиального движения жидкости

$$c_{\mu i} = \frac{f_\mu}{3U\dot{a}/a} = \frac{3\text{Pr}^\pi}{\text{Ja}\text{Nu}} \int_0^\pi \left[\frac{\partial v'_\theta}{\partial y'} \right]_{y'=0} \sin^3 \theta d\theta$$



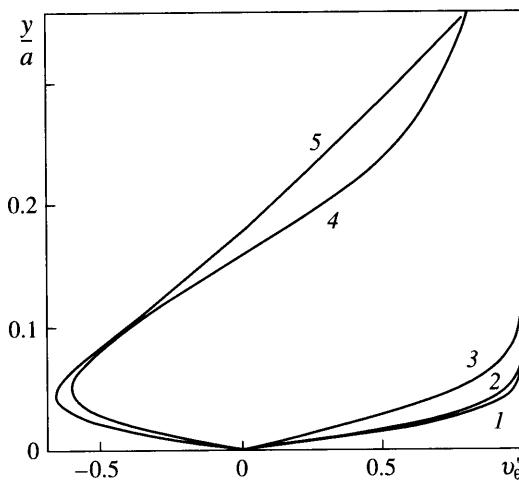
Фиг. 2. Изменение от t (мс) параметров течения при всплытии парового пузырька в перегретой жидкости $T_l - T_s = 2.2$ К ($\text{Ja} = 6.6$): a – радиус парового пузырька a (мм), 1 – автомодельное решение [2], 2 – модель с твердой поверхностью, 3 – данные 1-го эксперимента [1]; b – параметры течения для пузырька с твердой поверхностью: 4 – We , 5 – Pe , 6 – Nu , 7 – Re , 8 – $c_{\mu i}$, 9 – St ; $F = \text{Pe} \cdot 10^{-4}$, $\text{We} \cdot 10^2$, $\text{Re} \cdot 10^{-4}$, $c_{\mu i} \cdot 10$, $\text{Nu} \cdot 10^{-2}$, St

Интересно, что сопротивление движению пузырька за счет сил трения составляет всего лишь 20% от сопротивления за счет силы присоединенных масс, возникающей при радиальном росте.

Видно, что расчет по модели с твердой межфазной поверхностью (кривая 2) предсказывает более быстрый рост пузырька, чем дает эксперимент. Расхождение между расчетами и экспериментом связано с влиянием отрывных вихрей на макропоток, не учитываемым в уравнениях. Действительно, распределения скоростей по высоте пограничного слоя (фиг. 3) показывают, что уже к моменту времени 30 мс вокруг пузырька формируется развитое возвратно-отрывное течение и идет интенсивный срыв вихрей с его поверхности. Поэтому сила сопротивления движению пузырька выше, чем предсказывают расчеты по уравнениям пограничного слоя, а скорость движения и интенсивность испарения ниже. В целом эти расчеты показывают правильность гипотезы о затвердевании межфазной поверхности при перегревах $T_l - T_s = 2.2$ К.

Сравним расчеты с данными 7-го эксперимента [1] (фиг. 4), в котором перегревы жидкости – 3.61 К. Из фиг. 4 видно, что расчеты по модели пузырька с твердой межфазной поверхностью хорошо коррелируют с экспериментом до момента времени $t = 40$ мс. После 40 мс пузырек растет быстрее, чем предсказывает модель.

Анализ распределения скоростей по высоте пограничного слоя, аналогичный представленному на фиг. 3, показывает, что до момента $t = 20$ мс возвратного течения еще практически нет. Тангенциальная составляющая скорости меняет свой знак по высоте только возле кормовой точки пузырька. Постепенно точка отрыва погра-



Фиг. 3. Профили тангенциальной составляющей скорости по высоте пограничного слоя в различных сечениях при $t = 30$ мс для пузырька, всплывающего в жидкости, перегретой на 2.2 К (условия 1-го эксперимента [1] (фиг. 2)): 1–5 – для сечений, отклоненных на углы $\phi = 0, 45, 90, 135$ и 180°

ничного слоя, в которой $[\partial v_\theta / \partial y]_{y=0} = 0$, смещается ближе к максимальному сечению сферы, достигая к моменту $t = 40$ мс угла $\phi = 120^\circ$ по отношению к направлению движения пузырька. (Стационарное положение точки отрыва соответствует $\phi \approx 110^\circ$.)

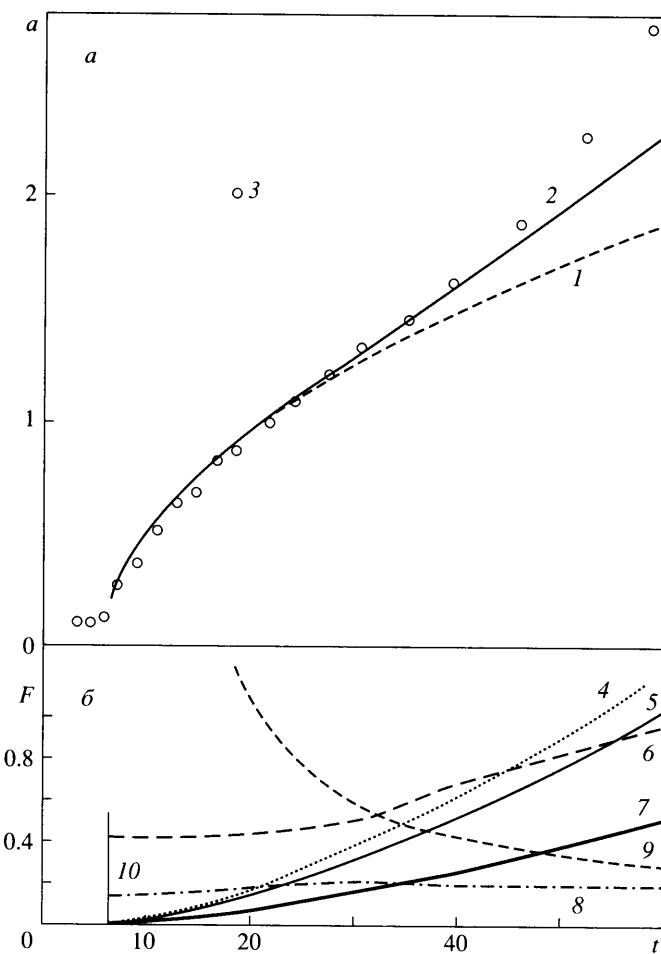
Таким образом, в момент времени 40 мс отрывное течение еще находится в стадии формирования. Следовательно, результаты, полученные с использованием уравнений тонкого пограничного слоя, соответствуют общим представлениям о динамике течения вязкой жидкости.

Максимальные перегревы воды $T_l - T_s = 3.9$ К были достигнуты в 8-м эксперименте (фиг. 5). Модель роста пузырька с твердой поверхностью доказывает свое преимущество перед моделью роста неподвижного пузырька и в данном случае. Однако начиная с $t = 30$ мс пузырек растет значительно быстрее, чем предсказывает модель. На интервале от 40 до 80 мс экспериментальная скорость роста пузырька \dot{a} , а следовательно, и коэффициент теплоотдачи Nu значительно превышают их предсказания, полученные расчетным путем.

4. Анализ возможных причин расхождения с экспериментом расчетов всплытия парового пузырька с твердой межфазной поверхностью. Рассмотрим возможные причины интенсификации теплообмена на поздней стадии процесса, наблюдаемые в экспериментах 7 и 8 (фиг. 4 и 5), выходящие за рамки модели пузырька с твердой поверхностью.

Расчеты всплытия парового пузырька при условиях эксперимента 7 (фиг. 4) показали, что к моменту 40 мс, когда возникает расхождение между теорией и экспериментом, модель выходит за рамки применимости, так как в пограничном слое формируется возвратно-отрывное течение. Однако установление отрывного течения приводит к противоположному результату: из-за выброса вихрей в макропоток сила сопротивления возрастает, скорость падает, что приводит к уменьшению испарения.

Интенсификации теплообмена за счет турбулентного перемешивания слоев мало вероятна. Во-первых, при обтекании твердой сферы [6] турбулентность возникает при числах Рейнольдса, на два порядка превышающих достигнутое к $t = 40$ мс (фиг. 4, б)



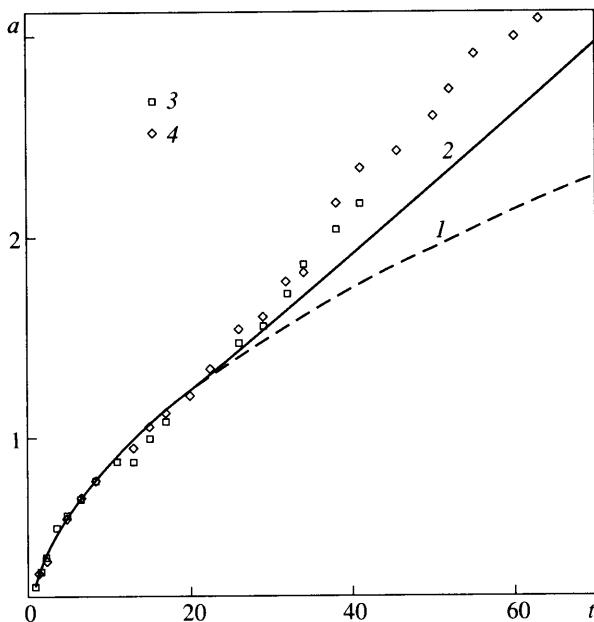
Фиг. 4. Изменение от t (мс) параметров течения при всплытии парового пузырька в перегретой жидкости $T_l - T_s = 3.61$ К ($\text{Ja} = 10.8$): a – радиус парового пузырька a (мм), 1 – автомодельное решение [2], 2 – модель с твердой поверхностью, 3 – данные 7-го эксперимента [1]; б – параметры течения для пузырька с твердой поверхностью: 4 – We , 5 – Pe , 6 – Nu , 7 – Re , 8 – $c_{\mu i}$, 9 – St , 10 – $t_0 = 6.5$, F – то же, что на фиг. 2

значение $\text{Re} = 2 \cdot 10^3$. Во-вторых, естественный отсос пограничного слоя за счет испарения должен затянуть начало перехода к турбулентности. В данном процессе коэффициент отсоса значителен

$$c_\theta = \frac{\dot{a} - \omega_a}{U} = \frac{\text{Ja} \text{Nu} \rho_g}{2 \text{Pe} \rho_l} \sim 10^{-4}$$

и составляет величину $1/\text{Re}$, что говорит о ламинарном характере течения [6]. Здесь ω_a – скорость жидкости по нормали возле межфазной поверхности. Разность $\dot{a} - \omega_a$ дает скорость отсоса.

Поэтому предполагается, что интенсификация теплообмена связана с изменением свойств межфазной поверхности. Действительно, эффект затвердевания зависит от



Фиг. 5. Изменение от t (мс) радиуса парового пузырька a (мм), всплывающего в перегретой жидкости $T_l - T_s = 3.9$ К ($Ja = 11.69$): 1 – автомодельное решение [2], 2 – расчет по модели с твердой поверхностью, 3, 4 – данные экспериментов 8 А и 8 В [1]

концентрации примесей, осевших на межфазной поверхности. В случае парового пузырька межфазная поверхность непрерывно увеличивается. Следовательно, в определенный момент концентрация примесей на ней уменьшится, что вызовет изменение ее механических свойств. Таким образом, при перегревах, превышающих 3.61 К, возможен эффект размягчения межфазной поверхности: по мере роста парового пузырька она перестает выдерживать касательные напряжения. Жидкость будет обтекать такую поверхность быстрее, что усиливает теплообмен. Для проверки гипотезы о изменении механических свойств межфазной поверхности при росте парового пузырька была составлена модель пузырька с мягкой межфазной поверхностью, и результаты расчетов сопоставлены с экспериментальными данными.

5. Модель парового пузырька с мягкой межфазной поверхностью. При равенстве тангенциальных составляющих скоростей жидкости и пара на межфазной поверхности на ней формируется двойной вязкий пограничный слой. Чтобы сравнить толщины вязкого и теплового пограничных слоев в жидкости и оценить силы вязкого сопротивления ее движению со стороны пара, воспользуемся плоской моделью обтекания межфазной поверхности. Пусть до сечения $x = 0$ полубесконечный поток жидкости был отделен от неподвижного пара абсолютно гладкой плоской непроницаемой поверхностью, совпадающей с полуплоскостью $y = 0$, $x < 0$. В точке $x = y = 0$ они пришли в соприкосновение. Касательные составляющие скоростей жидкости и пара на межфазной поверхности определены как

$$x > 0: v_{l, \theta} = v_{g, \theta} = U_s$$

Здесь U и T_l – скорость жидкости и ее температура на бесконечном удалении от межфазной поверхности, скорость пара на бесконечности – ноль.

Задачу решим, следуя приведенному в [8] методу расчета плоских двойных пограничных слоев. Газ и жидкость считаем несжимаемыми. Уравнения для плоского пограничного слоя вместе с граничными условиями на межфазной поверхности и на удалении от нее имеют вид:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$y = 0, \quad u_l = u_g = U_s, \quad v_l = v_g = 0, \quad \mu_l \frac{\partial u_l}{\partial y} = \mu_g \frac{\partial u_g}{\partial y}$$

$$y \rightarrow \infty, \quad u_l \rightarrow U; \quad y \rightarrow -\infty, \quad u_g \rightarrow 0$$

Здесь u, v – составляющие скорости по x и y ; U_s – скорость на межфазной поверхности.

Введем функцию тока ψ

$$u = U_s + \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

и перейдем к автомодельным переменным для жидкости и газа

$$\eta = y \sqrt{\frac{U - U_s}{v_l x}}, \quad \psi = \sqrt{v_l x (U - U_s)} g(\eta); \quad \eta = y \sqrt{\frac{U_s}{v_g x}}, \quad \psi = -\sqrt{v_g x U_s} g(\eta)$$

Тогда системы уравнений движения жидкости и газа в пограничном слое сводятся к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$2 \frac{d^3 g}{d\eta^3} + \left(g + \frac{U_s}{U - U_s} \eta \right) \frac{d^2 g}{d\eta^2} = 0, \quad 2 \frac{d^3 g}{d\eta^3} - (g - \eta) \frac{d^2 g}{d\eta^2} = 0$$

Границные условия для этих уравнений есть

$$\eta = 0, \quad g = 0, \quad \frac{dg}{d\eta} = 0, \quad \left(\frac{d^2 g}{d\eta^2} \right)_l = \sqrt{\frac{\mu_g \rho_g}{\mu_l \rho_l}} \left(\frac{U_s}{U - U_s} \right)^{3/2} \left(\frac{d^2 g}{d\eta^2} \right)_g$$

$$\eta \rightarrow \pm\infty, \quad \frac{dg}{d\eta} \rightarrow 1$$

Для условий, характерных для экспериментов [1], безразмерный параметр введен как

$$\Pi_1 = \sqrt{\frac{\mu_g \rho_g}{\mu_l \rho_l}} = 0.005$$

Второй безразмерный параметр задачи $I_n = (U - U_s)/U$ определяется из решения задачи $I_n = 0.004$. Он характеризует степень “не идеальности” течения жидкости. При $I_n = 1$ профиль скоростей такой же, как при обтекании твердой пластины; при $I_n = 0$ профиль скорости соответствует обтеканию пластины идеальной жидкостью. Коэффициент сопротивления движению жидкости

$$c_\mu = \mu_l \left[\frac{\partial u}{\partial y} \right]_{y=0} (0.5 \rho_l U^2)^{-1} = I_n^{3/2} \left(\frac{x U}{v_l} \right)^{-1/2}$$

Для условий экспериментов [1] параметр $I_n = 0.004$, коэффициент сопротивления движению воды со стороны пара оказывается на четыре порядка меньше, чем был бы со стороны твердой пластины. Следовательно, паровой слой является практически идеальной смазкой для жидкости. Вид профиля скоростей показан на фиг. 6. Из фиг. 6 видно, что жидкость скользит по пару как твердое тело, практически без контактных напряжений.

Таким образом, расчеты плоского двойного пограничного слоя вокруг мягкой межфазной поверхности дают возможность считать движение жидкости идеальным, а силами вязкого сопротивления ее движению со стороны пара пренебречь.

Уравнение теплопроводности для тонкого пограничного слоя имеет вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta \partial T}{r \partial \theta} = D_l \frac{\partial^2 T}{\partial r^2}$$

Перейдем от переменной r к переменной $y = r - a(t)$, где y – высота точки над поверхностью пузырька. Поле скоростей вокруг пузырька, движущегося в идеальной жидкости, описывается уравнениями (2.2) и (2.3). Чтобы описать течение в тонком тепловом пограничном слое, выражения для скоростей v_r и v_θ разложим в ряды по малому параметру y/a . Оставляя члены 1-го и 2-го порядков малости, получим

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \left(\frac{2y}{a} \dot{a} - \frac{3y}{a} U \cos \theta \right) \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{3}{2a} U \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} = D_l \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (5.1)$$

Границные условия на поверхности пузырька и на бесконечности будут

$$r = a, \quad T = T_s = \text{const} \quad (5.2)$$

$$r \rightarrow \infty, \quad T \rightarrow T_l = \text{const} \quad (5.3)$$

Кроме уравнений (5.1)–(5.3) модель пузырька с мягкой поверхностью содержит уравнения сохранения массы пара и движения парового пузырька

$$a\dot{a} = \frac{1}{2} D_l J_a N_u, \quad N_u = \frac{a}{T_l - T_s} \int_0^\pi \left[\frac{\partial T}{\partial r} \right]_{r=a} \sin \theta d\theta \quad (5.4)$$

$$\frac{dU}{dt} = -2g - \frac{3U\dot{a}}{a} \quad (5.5)$$

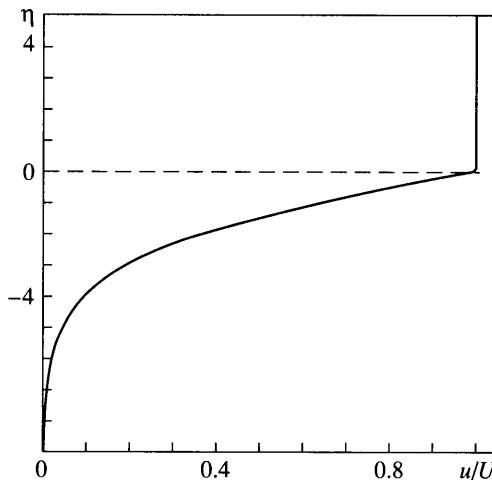
6. Первая автомодельность задачи о росте парового пузырька с мягкой межфазной поверхностью. При постоянстве температур на удалении от пузырька и на его поверхности задача о тепловом росте пузырька с мягкой межфазной поверхностью выходит на автомодельное решение. Первая автомодельность уравнения теплопроводности (5.1) была найдена Рукенштейном [9] в форме

$$T = T(\eta), \quad \eta = \frac{y}{\delta(\theta, t)} \quad (6.1)$$

где физический смысл переменной δ – толщина температурного пограничного слоя.

Подставив решение в виде (6.1) в уравнение (5.1), получим

$$\frac{d^2 T}{d\eta^2} + \frac{\eta}{D_l} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial \delta^2}{\partial t} - 3 \frac{U}{a} \delta^2 \cos \theta + \frac{2\dot{a}}{a} \delta^2 - \frac{3U}{4a} \sin \theta \frac{\partial \delta^2}{\partial \theta} \right] \frac{dT}{d\eta} = 0 \quad (6.2)$$



Фиг. 6. Профиль скорости в плоском двойном пограничном слое возле мягкой межфазной поверхности; сверху при $\eta > 0$ – жидкость, снизу – пар

В соответствии с (6.1) температура T – функция только η . Поэтому автомодельное решение существует только в случае, если выражение в квадратных скобках – константа. При этом уравнение (6.2) сводится к системе двух уравнений

$$\frac{d^2 T}{d\eta^2} + C\eta \frac{dT}{d\eta} = 0 \quad (6.3)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \delta^2}{\partial t} - 3 \frac{U}{a} \delta^2 \cos \theta + \frac{2\dot{a}}{a} \delta^2 - \frac{3U}{4a} \sin \theta \frac{\partial \delta^2}{\partial \theta} = CD_l \quad (6.4)$$

где C – постоянная. После замены $\delta' = \sqrt{2/C}$, $\eta' = \sqrt{C/2} \eta$ выражения для автомодельной переменной η (6.1) и (6.3), (6.4) запишутся в виде $\eta' = y/\delta'(\theta, t)$

$$\frac{d^2 T}{d\eta'^2} + 2\eta' \frac{dT}{d\eta'} = 0 \quad (6.5)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial (\delta')^2}{\partial t} + 3 \frac{U}{a} (\delta')^2 \cos \theta + \frac{2\dot{a}}{a} (\delta')^2 + \frac{3U}{4a} \sin \theta \frac{\partial (\delta')^2}{\partial \theta} = 2D_l \quad (6.6)$$

Таким образом, константа C – произвольная. Принимаем $C = 2$. Решением уравнения (6.5) является

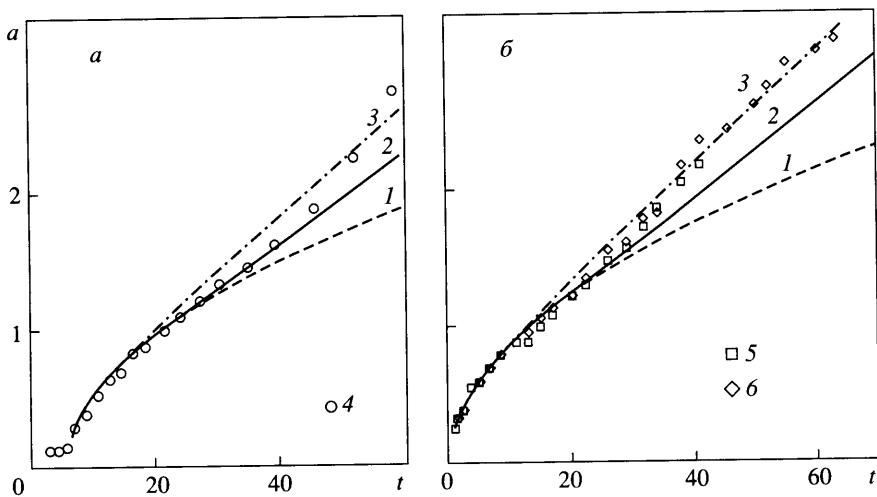
$$T = C_1 \int_0^\eta \exp(-\eta^2) d\eta + C_2$$

где C_1 и C_2 – неопределенные постоянные, которые ищутся из граничных условий

$$T = T_s, \quad T\eta \rightarrow \infty, \quad T \rightarrow T_l$$

Окончательно формулу для распределения температуры получим в виде

$$T = (T_l - T_s) \operatorname{erf}(\eta) + T_s \quad (6.7)$$



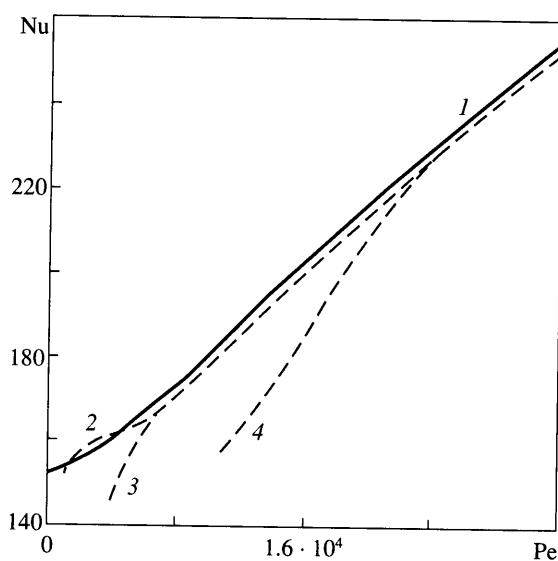
Фиг. 7. Сравнение экспериментальных зависимостей радиуса пузырька a (мм) от t (мс) с результатами расчетов по различным моделям: 1 – автомодельное решение Скрайбена [2], 2 – модель с твердой поверхностью, 3 – модель с мягкой поверхностью; $a - T_l - T_s = 3.61$ К ($Ja = 10.8$); 6 – 3.9 К ($Ja = 11.69$); 4–6 – данные экспериментов [1] 7, 8 А и 8 В

Чтобы рассчитать всплытие парового пузырька, необходимо проинтегрировать одномерное нестационарное уравнение для δ (6.6), найти профиль температур (6.7) и, решив систему (5.4), (5.5), определить радиус пузырька и его скорость.

Результаты решения задачи о тепловом росте парового пузырька с мягкой поверхностью приведены на фиг. 7, кривые 2. Из фиг. 7, б видно, что со временем экспериментальный темп роста пузырька соответствует расчетам по модели с мягкой поверхностью. Это подтверждает предположение о возможном изменении механических свойств поверхности при росте парового пузырька. Процесс размягчения в жидкости, перегретой на 3.61 К, начинается при достижении пузырьком размера $a_1 \approx 1.7$ мм (фиг. 7, а). При перегревах 3.9 К межфазная поверхность теряет твердость при меньших значениях $a_1 \approx 1.4$ мм (фиг. 7, б). При этом критические значения безразмерного параметра $S = JaNu$, характеризующего интенсивность испарения, в обоих случаях практически совпадают ($S_{cr} \approx 650$), из чего можно сделать вывод, что при $S < S_{cr}$ модель твердой сферы лучше соответствует эксперименту, а для $S > S_{cr}$ – модель мягкой сферы.

Таким образом, модель пузырька с мягкой поверхностью верна при значительных перегревах $\Delta T \geq 4$ К и $t > 40$ мс. Такие условия справедливы для многих практически важных неравновесных потоков кипящей жидкости.

7. Вторая автомодельность задачи о росте парового пузырька с мягкой межфазной поверхностью. Общая задача о тепловом росте парового пузырька с мягкой межфазной поверхностью (5.1)–(5.5) трехмерная. Независимые переменные – t , u и θ . Автомодельная переменная Рукенштейна η (6.1) устанавливает жесткую (алгебраическую) связь между u и δ . В результате порядок задачи понижается. Она становится двухмерной с независимыми переменными t и θ . Платой за использование автомодельного решения является невозможность удовлетворить всем граничным условиям. Строго говоря, первое автомодельное решение устанавливается только при постоянстве температур на межфазной поверхности и на удалении от пузырька.



Фиг. 8. Зависимости Nu от Re при Ja = 40: 1 – по формуле (7.9); 2 – $U = 2$; 3 – 10; 4 – 25 см/с

Задача расчета толщины пограничного слоя $\delta(t, \theta)$ остается достаточно сложной. В моделях же пузырьковых потоков желательно использовать простые алгебраические зависимости для коэффициента межфазного теплообмена.

В [10] результаты решения задачи о росте парового пузырька, движущегося в перегретой жидкости с постоянной скоростью, были представлены в виде зависимости числа Нуссельта от числа Пекле. Оказалось, что кривые, построенные при различных значениях скорости обтекания, сливаются (фиг. 8). Это натолкнуло авторов [10] на мысль о существовании автомодельного режима.

Удалось найти автомодельную переменную, жестко связывающую t , y и θ

$$\eta = \frac{1}{\epsilon(\theta)a(t)} \frac{y}{\epsilon(\theta)a(t)} \quad (7.1)$$

после введения которой трехмерная задача сводится к одномерной. Физически существование автомодельной переменной η (7.1) означает, что при определенных граничных условиях относительная толщина температурного пограничного слоя $\epsilon = \delta(\theta, t)/a(t)$ со временем не меняется. Подставив выражение для $\delta = \epsilon(\theta)a(t)$ в (6.6), получим

$$\frac{3aU}{4D_l} \sin(\theta) \frac{d\epsilon^2}{d\theta} + 3\epsilon^2 \left(\frac{a\dot{a}}{D_l} + \frac{aU}{D_l} \cos\theta \right) = 2 \quad (7.2)$$

Поскольку толщина ϵ – функция только θ , автомодельное решение вида (7.1) существует при условии постоянства входящих в (7.2) функций времени

$$Pe = \frac{2aU}{D_l} = \text{const}, \quad S = \frac{2a\dot{a}}{D_l} = \text{const} \quad (7.3)$$

Вводя Pe и S в уравнение (7.2) как постоянные параметры, получим

$$\frac{d\epsilon^2}{d\theta} = \frac{16 - 12(Pe \cos\theta + S)\epsilon^2}{3Pe \sin\theta} \quad (7.4)$$

Решение уравнения (7.4) имеет вид

$$\varepsilon^2 = \frac{(1 + \cos \theta)^{2(S/\text{Pe} - 1)}}{(1 - \cos \theta)^{2(S/\text{Pe} + 1)}} \left[C_1 - \frac{16}{3\text{Pe}} \int_1^{\cos \theta} \frac{(1 - x)^{2(S/\text{Pe} + 1)}}{(1 + x)^{2(S/\text{Pe} - 1)}} dx \right] \quad (7.5)$$

Точка $\theta = 0$ (лобовая) – особая точка уравнения (7.4). Чтобы безразмерная толщина пограничного слоя ε при $\theta = 0$ была ограниченной, константу C_1 в решении (7.5) необходимо взять равной нулю.

Зная функцию $\varepsilon(\theta)$, можно рассчитать число Нуссельта. Подставив в выражение для Nu (5.4) найденное распределение температур (формулы (6.7), (7.1)), получим выражение Nu через интеграл от безразмерной толщины пограничного слоя

$$\text{Nu} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{\varepsilon(\theta)} \quad (7.6)$$

Таким образом, уравнения (7.5), (7.6) неявным образом задают зависимость

$$\text{Nu} = \text{Nu}(S, \text{Pe}) \quad (7.7)$$

Поскольку уравнение сохранения массы парового пузырька (первое из уравнений (5.4)) может быть записано через безразмерные параметры как

$$S = \text{Ja}\text{Nu} \quad (7.8)$$

то зависимость (7.7) может быть представлена в виде $\text{Nu} = \text{Nu}(\text{Ja}, \text{Pe})$. Эта зависимость получена в виде таблицы и с относительной погрешностью, не превышающей 1% в диапазоне параметров $\text{Ja} \leq 40$, $\text{Pe} \leq 10^4$, аппроксимирована формулой

$$\text{Nu} = \frac{12}{\pi} \left[1 - 0.68 \frac{1 - \exp(-0.9\sqrt{\text{Pe}}\text{Ja}^{-1})}{1 + \exp(-0.9\sqrt{\text{Pe}}\text{Ja}^{-1})} \right] \text{Ja} + 2\sqrt{\frac{\text{Pe}}{\pi}} \quad (7.9)$$

В двух предельных случаях: $\text{Pe} \rightarrow 0$ и $\text{Ja} \rightarrow 0$, зависимость (7.9) переходит в точные зависимости для коэффициента теплообмена для неподвижного парового пузырька (1.2) и движущегося пузырька постоянного радиуса с мягкой поверхностью [11]

$$\text{Pe} \rightarrow 0, \quad \text{Nu} = 12 \frac{\text{Ja}}{\pi}; \quad \text{Ja} \rightarrow 0, \quad \text{Nu} = 2 \left(\frac{\text{Pe}}{\pi} \right)^{1/2}$$

График зависимости $\text{Nu}(\text{Pe})$ при $\text{Ja} = \text{const}$ построенный по формуле (7.9), показан на фиг. 8 кривая 1.

Условия (7.3) – дополнительные условия выхода общей задачи на второе автомодельное решение. Второе из требований (7.3) является излишним, так как оно выполняется автоматически при соблюдении условий первой автомодельности и первого из условий (7.3). Действительно, при постоянстве температур на межфазной поверхности и вдали от нее (условия первой автомодельности) $\text{Ja} = \text{const}$ (1.1). Тогда из (7.9) при Ja , $\text{Pe} = \text{const}$ получаем условие постоянства Нуссельта. Уравнение (7.8) показывает, что при постоянных числах Ja и Nu безразмерный параметр $S = \text{const}$. Таким образом, дополнительное условие существования второго автомодельного решения единственно: $\text{Pe} = \text{const}$ – это первое из условий (7.3). Следовательно, использование этого решения допустимо, когда характерные времена изменения числа Пекле τ_{Pe} много больше характерного времени прохождения частицы жидкости по образующей пузырька

$$\tau^* \ll \tau_{\text{Pe}}$$

$$\tau^* \sim \frac{a}{U} \sim \frac{a^2}{D_l \text{Pe}}, \quad \tau_{\text{Pe}} = \text{Pe} \left| \frac{d\text{Pe}}{dt} \right|^{-1} \quad (7.10)$$

Ограничения, аналогичные (7.10), ставятся, когда зависимости, полученные для частиц постоянного радиуса в стационарных условиях, используются в моделях нестационарных течений.

Результаты решения задачи о тепловом росте парового пузырька, движущегося в перегретой жидкости с постоянной скоростью $U = \text{const}$, показывают, что со временем, по мере того как система "забывает" начальные условия, коэффициент теплообмена приближается к рассчитанному по формуле (7.9) (фиг. 8).

Заключение. Предложены две математические модели теплового роста пузырька, движущегося в перегретой жидкости, которые не содержат свободных параметров: модели пузырька с мягкой и твердой поверхностями.

Построено второе автомодельное решение задачи об обтекании парового пузырька с мягкой поверхностью, на основании которого получена аппроксимационная зависимость для коэффициента межфазного теплообмена – числа Нуссельта от чисел Якоба и Пекле.

Сопоставление расчетов по предложенными моделям с данными экспериментов по всплытию паровых пузырьков в перегретой воде показало, что до тех пор пока радиус пузырька не превышает критической величины эксперименту соответствуют расчеты по модели пузырька с твердой поверхностью. После ее достижения темп роста парового пузырька соответствует расчетам по модели с мягкой поверхностью. Таким образом, обнаружен эффект размягчения межфазной поверхности парового пузырька. Сама же величина критического радиуса пузырька зависит от перегревов жидкости. Предложен безразмерный критерий, определяющий изменение механических свойств межфазной поверхности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Florschuetz L.W., Henry C.L., Khan A.R. Growth rates of free vapour bubbles in liquids at uniform superheats under normal and zero gravity conditions // Intern. J. Heat and Mass Transfer. 1969. V. 12. № 11. P. 1465–1489.
2. Scriven L.E. On the dynamics of phase growth // Chem. Eng. Sci. 1959. V. 10. № 1–2. P. 1–13.
3. Лабунцов Д.А., Кольчугин Б.А., Головин В.С., Захарова Э.А., Владимирова Л.Н. Исследование при помощи скоростной киносъемки роста пузырьков при кипении насыщенной воды в широком диапазоне изменения давлений // Теплофизика высоких температур. 1964. Т. 2. № 3. С. 446–453.
4. Бэтчэлор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 758 с.
5. Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 699 с.
6. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Мир, 1974. 711 с.
7. Moore D.W. The boundary layer on a spherical gas bubble // J. Fluid Mech. 1963. V. 16. Pt 2. P. 161–176.
8. Смирнов Н.Н. Диффузионное горение жидкого топлива в потоке с распределенными параметрами // Физика горения и взрыва. 1984. Т. 20. № 3. С. 26–35.
9. Ruckenstein E., Davis E. The effects of bubble translation on vapor bubble growth in a superheated liquid // Intern. J. Heat and Mass Transfer. 1971. V. 14. № 7. P. 939–952.
10. Крошилин А.Е., Крошилин В.Е., Нигматуллин Б.И. Влияние относительного движения и объемной концентрации пузырей на межфазный тепломассообмен в парожидкостных средах // Теплофизика высоких температур. 1984. Т. 22. № 2. С. 355–362.
11. Ruckenstein E. Mass transfer between a single drop and a continuous phase // Intern. J. Heat and Mass Transfer. 1967. V. 10. № 12. P. 1785–1792.