

УДК 532.5.011:534.01

© 2004 г. Л. Д. АКУЛЕНКО, С. В. НЕСТЕРОВ

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ АВТОКОЛЕБАНИЙ РЕЗОНАТОРА ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Построена квазилинейная модель автоколебаний резонатора Гельмгольца. С помощью методов Ляпунова – Пуанкаре, локальных интегральных многообразий и усреднения найдены условия существования, единственности и устойчивости периодических решений. В первом приближении вычислены основные характеристики, исследованы качественные особенности автоколебаний. Приведена термогазодинамическая интерпретация автоколебаний газа в резонаторе.

Ключевые слова: резонатор Гельмгольца, термогазодинамическая модель, квазилинейные автоколебания, метод усреднения.

1. Постановка задачи. Исследуются колебания газодинамической системы, схематически представленной на фигуре. Замкнутая емкость (в частности, шар) объема V , изготовленная из твердого материала (стекла), имеет отверстие, к которому присоединена трубка длины l и поперечного (кругового) сечения площадью S . Емкость и трубка заполнены воздухом или другим газом; верхний открытый конец трубки находится в контакте с окружающей средой, например, атмосферой. Это простейшее устройство имеет название резонатора Гельмгольца [1]; оно было использовано как прибор для эффективного определения частот звуковых колебаний. Издавна в архитектуре внутренних помещений большого объема применялись аналогичные акустические устройства. В настоящее время устройства и покрытия, обладающие свойствами резонатора, широко применяются в архитектурной и технической акустике с целью поглощения звука.

Исследуем динамические свойства рассматриваемой системы. Предполагая, что газ в трубке перемещается как целое, а газ в емкости представляет в механическом аспекте сосредоточенную упругость, Рэлей установил, что резонатор Гельмгольца является колебательной системой с одной степенью свободы. Такое описание допустимо, если максимальный размер резонатора значительно меньше длины волны звука, соответствующей низшей собственной частоте.

При построении математической модели колебаний системы будем следовать [1]. Введем систему координат xT_x так, как это представлено на фигуре. Начало координат отвечает нижнему концу трубки – точке ее соединения с емкостью. Смещение x сосредоточенной в трубке массы газа описывается без учета диссипации уравнением колебаний линейного осциллятора вида [1]

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \omega_0^2 = \frac{c_0^2 S}{Vl} \quad (1.1)$$

где c_0 – скорость звука в газе, ω_0 – собственная частота резонатора. Приведем оценку величины ω_0 для типичных значений параметров резонатора V , l , S и c_0 , отвечающей земной атмосфере

$$V = 10^2 \text{ см}^3, \quad l = 10 \text{ см}, \quad S = 1 \text{ см}^2, \quad c_0 = 3.4 \cdot 10^4 \text{ см с}^{-1} \quad (1.2)$$

$$\omega_0 \approx 1.08 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}, \quad f = \omega_0/2\pi \approx 172 \text{ гц}$$

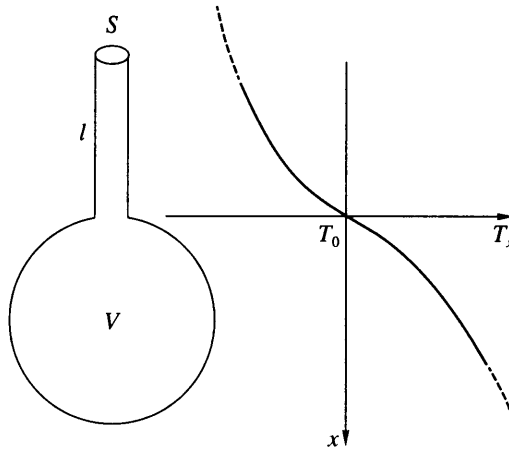


Схема резонатора Гельмгольца

Если придать резонатору Гельмгольца, подчиняющемуся соотношениям (1.1), (1.2), некоторое начальное отклонение x^0 столба воздуха в трубке, то он будет издавать звуковые колебания на слышимой частоте f . Конечно, эти колебания весьма быстро затухнут вследствие трения столба воздуха о стенки трубки, а температура воздуха в емкости снизится. Однако, если обеспечить достаточно интенсивный подвод тепловой энергии к емкости (нагрев), то возможно осуществить положительную обратную связь в рассматриваемой термогазодинамической системе. В результате резонатор Гельмгольца будет совершать незатухающие автоколебания, что наблюдается на практике и в природе [2]: “Всем стеклодувам хорошо известно следующее явление: если на конце стеклянной трубки диаметром в несколько миллиметров и длиной 10–15 см раздуть шарик, то весьма часто, пока шарик горяч, трубка начинает звучать. Частота звуковых колебаний соответствует основному тону резонатора Гельмгольца”.

Аналогичным термогазодинамическим механизмом возбуждения автоколебаний объясняют специалисты “пение” пара в порах накипи перед закипанием жидкости, автоколебания в трубах паровых котлов, периодическое геотермальное явление – гейзеры, астрофизическое явление – звезды типа цефеид и др.

Задача описания автоколебаний газа в резонаторе Гельмгольца, когда положительная обратная связь осуществляется за счет температурного градиента и подвода тепла, весьма сложна и требует отдельного исследования. Однако с помощью упрощенной математической модели, предложенной в [2], можно не только качественно, но и количественно определить условия возникновения и основные характеристики автоколебаний в зависимости от параметров термомеханической системы.

Считается, что установившаяся температура T_x стенки резонатора довольно быстро (это существенно) спадает в окрестности точки соединения трубки и емкости так, как это представлено на фигуре. Указанное изменение определяется довольно грубо на основе общих феноменологических представлений, и для его аппроксимации могут быть взяты ограниченные функции типа

$$T_x = T_0 + \Theta \operatorname{th} kx, \quad T_x = T_0 + \Theta \operatorname{arctg} kx \quad (1.3)$$

где T_0 – средняя температура в состоянии равновесия $x = 0$, постоянные Θ и $k > 0$; они выбираются из эксперимента. Для приближенного описания малых автоколебаний

резонатора вместо выражений (1.3) можно взять полиномиальную аппроксимацию вида [2]:

$$T_x = T_0 + k_1 x - k_3 x^3, \quad |x| \leq x_* \ll l \quad (1.4)$$

где $k_1, k_3 > 0$ – постоянные, определяемые через Θ, k или экспериментально.

При перемещениях газа в трубке и емкости некоторая его часть с массой m движется вдоль участка стенок с большим градиентом температуры в окрестности среднего (равновесного) значения T_0 . Мгновенное значение T при колебаниях указанного элемента можно представить в виде: $T = T_0 + \theta(t)$, где $\theta = \theta(t)$ – отклонение от среднего значения. Уравнение теплового баланса в линейном приближении по T (закон Ньютона для теплообмена)

$$mc\dot{\theta} = K(k_1 x - k_3 x^3 - \theta) \quad (1.5)$$

Здесь c – удельная теплоемкость газа при постоянном объеме, K – коэффициент теплопроводности.

В предположении малости перемещения x массы газа $m_* = \rho Sl$, где ρ – плотность, в трубке резонатора с учетом теплообмена и линейной диссипации уравнение движения после деления на m_* представимо в виде [2]

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = -\beta\theta, \quad x \ll l \quad (1.6)$$

Здесь 2δ – коэффициент диссипации, β – приведенный коэффициент теплового расширения газа, частота ω_0 введена в (1.1) и отвечает свободным колебаниям резонатора Гельмгольца при $\delta = \beta = 0$. Уравнения (1.5) и (1.6) оказываются связанными, причем значения $\theta = x = \dot{x} = 0$ определяют стационарное состояние системы. Представляет интерес исследование устойчивости точки покоя и возможности осуществления незатухающих колебаний, т.е. автоколебаний резонатора Гельмгольца, которые наблюдаются на практике, см. выше и [2].

Попытки аналитического исследования нелинейной системы (1.5), (1.6) предпринимались [2]. Применялась приближенная процедура, аналогичная методу гармонического баланса. Однако вследствие досадных погрешностей приближенное решение не было построено, удовлетворительный анализ автоколебаний системы отсутствует до сих пор.

Цель данной работы – построение и исследование автоколебаний резонатора Гельмгольца в рамках квазилинейной модели (1.5), (1.6) и в предположении малости безразмерных коэффициентов самовозбуждения и диссипации.

2. Приведение уравнений движения к стандартной форме. Избавимся вначале от переменной θ , не имеющей механического содержания. Для этого продифференцируем по t уравнение (1.6) и выразим величины $\theta, \dot{\theta}$ через x, \dot{x}, \ddot{x} с помощью соотношений (1.5), (1.6). В результате элементарных преобразований получим для x нелинейное уравнение третьего порядка:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + (2\delta + K/(mc))\dot{x} + (\omega_0^2 + 2\delta K/(mc))x + \\ + (K/(mc))(\omega_0^2 + \beta k_1)x - (K/(mc))\beta k_3 x^3 = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Уравнение (2.1) содержит размерные переменные x и t и большое число (восемь) размерных параметров. Выбором безразмерных переменных оно приводится к виду,

содержащему только три безразмерных параметра ε , κ , σ . Исследуемое уравнение принимает форму

$$\ddot{\xi} + (\kappa + \varepsilon\sigma)\dot{\xi} + (1 + \varepsilon\sigma\kappa)\xi + (\kappa + \varepsilon)\xi - \varepsilon\xi^3 = 0,$$

$$\tau = \omega_0 t, \quad \xi = \frac{x}{d}, \quad d^2 = \frac{k_1}{k_3}, \quad \kappa = \frac{K}{mc\omega_0} > 0, \quad (2.2)$$

$$\kappa \sim 1, \quad \varepsilon = \frac{\kappa\beta k_1}{\omega_0^2}, \quad \varepsilon\sigma = \frac{2\delta}{\omega_0} \geq 0, \quad \varepsilon \ll 1$$

В качестве единицы времени взята величина ω_0^{-1} , а единицы длины d – интервал, характеризующий градиент температуры согласно (1.4). Точкой в (2.2) вновь обозначено дифференцирование по безразмерному аргументу τ . Далее безразмерная величина $\varepsilon > 0$ считается малым параметром системы. Для исследования асимптотической устойчивости по Ляпунову состояния покоя $\xi = \dot{\xi} = \ddot{\xi} = 0$ системы (2.1) ($x = \dot{x} = \theta = 0$ для (1.5), (1.6)) отбросим нелинейный член ξ^3 . Соотношения критерия Рауса – Гурвица имеют вид неравенств:

$$\kappa + \varepsilon\sigma > 0, \quad \sigma(1 + \kappa^2 + \varepsilon\sigma\kappa) > 1, \quad \kappa + \varepsilon > 0 \quad (2.3)$$

Крайние условия выполняются автоматически, а центральное является соотношением, налагаемым на параметры термомеханической системы (1.5), (1.6) (или (2.1), (2.2)). Оно получается из второго условия Рауса – Гурвица после деления на $\varepsilon > 0$ и может нарушаться, если величина σ (т.е. δ/ω_0) достаточно мала, в частности, $\sigma \sim \varepsilon$.

Посредством методов символьных вычислений можно получить аналитические выражения всех корней характеристического уравнения как функций параметров (формулы Кардано). Однако для дальнейшего исследования задачи проще использовать приближенные аналитические выражения в виде разложения по степеням параметра ε . Имеем

$$\lambda^3 + (\kappa + \varepsilon\sigma)\lambda^2 + (1 + \varepsilon\sigma\kappa)\lambda + (\kappa + \varepsilon) = 0, \quad \lambda = \lambda_{1,2,3}(\varepsilon)$$

$$\lambda(\varepsilon) = \lambda^0 + \varepsilon\lambda^1 + \varepsilon^2 \dots, \quad \lambda_{1,2}^0 = \pm i, \quad \lambda_3^0 = -\kappa, \quad i = \sqrt{-1}$$

$$\lambda_{1,2} = \pm i \left(1 + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\kappa}{1 + \kappa^2} \right) + \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{1}{1 + \kappa^2} - \sigma \right) + \varepsilon^2 \dots \quad (2.4)$$

$$\lambda_3 = -\kappa - \frac{\varepsilon}{1 + \kappa^2} + \varepsilon^2 \dots$$

Из (2.4) следует, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ корни характеристического уравнения линеаризованной системы (2.2) имеют положительные вещественные части, если $\sigma < (1 + \kappa^2)^{-1}$. Это соответствует нарушению второго условия Рауса – Гурвица (2.3) и приводит к экспоненциальной неустойчивости состояния покоя $\xi = \dot{\xi} = \ddot{\xi} = 0$. Представляет интерес исследование движения системы в окрестности стационарной точки, установление возможности существования автоколебаний и определение их устойчивости по Ляпунову.

При $\varepsilon = 0$ невозмущенная система допускает общее ξ_0 и соответствующее двухпараметрическое 2π -периодическое ξ_* решение:

$$\xi_0(\tau) = A \cos \tau + B \sin \tau + C \exp(-\kappa \tau), \quad \xi_*(\tau) = A \cos \tau + B \sin \tau \quad (2.5)$$

Постоянные A, B, C произвольны и могут быть определены из начальных данных. Построение периодического решения $\xi(\tau, \varepsilon)$ с некоторым неизвестным периодом $\Pi(\varepsilon)$, обращающимися соответственно в $\xi_*(\tau)$, 2π при $\varepsilon = 0$, может быть проведено приближенно с помощью метода Ляпунова–Пуанкаре [3]. Для этой цели вводится “возмущенный аргумент” $s = 2\pi\tau/\Pi$, где $\Pi = 2\pi(1 + \mu(\varepsilon))$ – возмущенный период, причем $\mu(0) = 0$. Таким образом, по s период фиксирован и равен 2π . Введением нового аргумента периодическую краевую задачу для уравнения (2.2) представим в виде

$$\begin{aligned} \xi''' + (\kappa + \varepsilon\sigma)(1 + \mu)\xi'' + (1 + \varepsilon\sigma\kappa)(1 + \mu)^2\xi' + (\kappa + \varepsilon(1 - \xi^2))(1 + \mu)^3\xi &= 0 \\ \xi &= \xi(s, \varepsilon), \quad \xi(s + 2\pi, \varepsilon) \equiv \xi(s, \varepsilon), \quad \mu = \mu(\varepsilon) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Штрих в формуле (2.6) означает производную по аргументу s .

Согласно методу Пуанкаре [3, 4] решение задачи (2.6) строится в виде разложений по целым степеням параметра ε или последовательными приближениями. Неизвестными являются $\xi(s, \varepsilon)$ и величина $\mu(\varepsilon)$

$$\xi = \xi_*(s) + \varepsilon\xi_1(s) + \varepsilon^2\xi_2 + \dots, \quad \mu = \varepsilon\mu_1 + \varepsilon^2\mu_2 + \dots \quad (2.7)$$

Стандартная процедура подстановки разложений (2.7) в (2.6) и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях ε приводит к зацепляющейся последовательности линейных неоднородных краевых задач. Из них рекуррентно определяются неизвестные на каждом шаге параметры $A, B; \mu_1, A_2, B_2$ и т.д. Условию периодичности – тождеству по s, ε в (2.6) – эквивалентны следующие тождества по ε :

$$\xi(2\pi, \varepsilon) \equiv \xi(0, \varepsilon), \quad \xi'(2\pi, \varepsilon) \equiv \xi'(0, \varepsilon), \quad \xi''(2\pi, \varepsilon) \equiv \xi''(0, \varepsilon) \quad (2.8)$$

Поскольку рассматриваемая система автономна, то без ограничения общности можно положить одно из значений (2.8) тождественно равным нулю; $\xi(0, \varepsilon) \equiv 0$, или $\xi'(0, \varepsilon) \equiv 0$, или $\xi''(0, \varepsilon) \equiv 0$. Обычно полагают $\xi'(0, \varepsilon) \equiv 0$, что отвечает максимальному или минимальному отклонению ξ при $s = 0$ и позволяет установить связь между неизвестными A_j, B_j, μ_{j-1} на j -м шаге. Два недостающих условия получаются из соотношений

$$\begin{aligned} (\kappa + \varepsilon\sigma)(1 + \mu) \int_0^{2\pi} \xi''^2 ds &= (1 + \mu)^3 \int_0^{2\pi} (\kappa + \varepsilon(1 - 3\xi^2))\xi'^2 ds \\ \int_0^{2\pi} \xi''^2 ds &= (1 + \varepsilon\sigma\kappa)(1 + \mu)^2 \int_0^{2\pi} \xi'^2 ds \end{aligned} \quad (2.9)$$

которые совпадают при $\varepsilon = 0$ ($\mu = 0$). Формулы (2.9) есть результат интегрирования по частям уравнения (2.6), умноженного на ξ'' , ξ' соответственно.

Решение задачи об автоколебаниях резонатора Гельмгольца на основе соотношений (2.6)–(2.9), т.е. существование, единственность и устойчивость, а также приближенное их построение, например, с погрешностью $O(\varepsilon^2)$, представляются весьма трудоёмкими и громоздкими. Для более эффективного исследования автоколебаний применим метод локальных интегральных многообразий [5–8], требующий приведе-

ния уравнения (2.2) к стандартной форме посредством замены переменных ξ, ξ', ξ'' на a, ψ, z по формулам

$$\xi = a \sin \psi + z, \quad \xi' = a \cos \psi - \kappa z, \quad \xi'' = -a \sin \psi + \kappa^2 z \quad (2.10)$$

Здесь a – амплитуда, ψ – фаза, z – переменная, определяющая асимптотически устойчивое интегральное многообразие. Дифференцирование выражений (2.10) в силу возмущённого уравнения (2.2) приводит к стандартной системе:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \varepsilon A(a, \psi, z), \quad A = (\kappa \cos \psi - \sin \psi) f(\xi, \xi', \xi''), \\ \dot{\psi} &= 1 + \varepsilon \Psi(a, \psi, z), \quad \Psi = -a^{-1} (\kappa \sin \psi + \cos \psi) f(\xi, \xi', \xi''), \quad a > 0 \\ \dot{z} + \kappa z &= \varepsilon Z(a, \psi, z), \quad Z = f(\xi, \xi', \xi''), \quad f \equiv (1 + \kappa^2)^{-1} (\xi^3 - \xi - \sigma \kappa \xi' - \sigma \xi'') \end{aligned} \quad (2.11)$$

В функцию f из (2.11) предполагаются подставленными выражения (2.10) для ξ, ξ', ξ'' . При $\varepsilon = 0$ получается решение a_0, ψ_0, z_0 , отвечающее ξ_0 (2.5); при достаточно малом значении $\varepsilon > 0$ решение строится и исследуется приближенно методами теории локальных интегральных многообразий и усреднения [5–8].

3. Метод локальных интегральных многообразий. Посредством качественного анализа системы (2.11) можно показать, что за относительно короткое время $\Delta t \approx \approx \kappa^{-1} \ln(|z^0| \varepsilon^{-1}) \ll \varepsilon^{-1}$ переменная z придет из произвольного состояния $z(0) = z^0$ в ε -окрестность точки $z = 0$ при значении $\varepsilon > 0$ достаточно малом. В результате система будет совершать движения в окрестности локального интегрального многообразия $z = \varepsilon h(a, \psi, \varepsilon)$ [5, 6]. Функция h является 2π -периодической относительно ψ , а искомое автоколебательное движение принадлежит этому многообразию.

Неизвестная h строится как 2π -периодическое по ψ решение уравнения в частных производных:

$$h'_{\psi} + \kappa h = Z - \varepsilon (h'_{\psi} \Psi + h'_a A), \quad 0 < a^- \leq a \leq a^+ < \infty, \quad |h| \leq h_0, \quad |\varepsilon| \leq \varepsilon_0 \quad (3.1)$$

при $\varepsilon_0 > 0$ достаточно малом. Аргументами функций A, Ψ, Z являются переменные a, ψ и неизвестная h , которая входит в виде εh согласно выражениям (2.11) и равенству $z = \varepsilon h$. Вследствие аналитичности уравнения (3.1) по h, ε и a искомая функция h может быть определена с заданной степенью точности по ε при помощи стандартной процедуры разложения в ряд Тейлора:

$$z = \varepsilon h = \varepsilon h_1(a, \psi) + \varepsilon^2 h_2(a, \psi) + \dots + \varepsilon^j h_j(a, \psi) + \dots, \quad j = 1, 2, \dots$$

$$h'_{j\psi} + \kappa h_j = H_j^*(a, \psi), \quad H_j^* \equiv Z(a, \psi, 0) \quad (3.2)$$

$$H_2^* \equiv Z'_h(a, \psi, 0) - (Z(a, \psi, 0) - \kappa h_1^*(a, \psi)) \Psi(a, \psi, 0) - h_1^{*1} a(a, \psi) A(a, \psi, 0), \dots$$

Последующие функции H_j^* находятся рекуррентно на основе функций A, Ψ, Z и вычисленных на предыдущих шагах аналитических выражений $h_1^*, h_2^*, \dots, h_{j-1}^*$. Искомые 2π -периодические по ψ коэффициенты $h_j^*(a, \psi)$ могут быть представлены квадратами либо тригонометрическими полиномами

$$h_j^*(a, \psi) = \int_{-\infty}^{\psi} \exp(-\kappa(\psi - \varphi)) H_j^*(a, \varphi) d\varphi, \quad j = 1, 2, \dots$$

$$h_j^*(a, \psi) = \sum_{n=1}^N (n^2 + \kappa^2)^{-1} [(\kappa \eta_{jn}^c - n \eta_{jn}^s) \cos n\psi + (n \eta_{jn}^c + \kappa \eta_{jn}^s) \sin n\psi] \quad (3.3)$$

$$H_j^* = \sum_{n=1}^N (\eta_{jn}^c \cos n\psi + \eta_{jn}^s \sin n\psi), \quad N = N(j), \quad N(1) = 3$$

Здесь $\eta_{jn}^{c,s}$ – известные коэффициенты, выражаемые через параметры κ, σ . В результате применение процедуры (3.2), (3.3) позволяет найти искомую функцию $z = \varepsilon h^*$ с требуемой степенью точности по ε .

Подстановка $z = \varepsilon h^*(a, \psi, \varepsilon)$ в правые части уравнений для a, ψ (2.11) приводит к стандартной системе с вращающейся фазой

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \varepsilon A^*(a, \psi, \varepsilon), \quad A^* \equiv A(a, \psi, \varepsilon h^*(a, \psi, \varepsilon)) \\ \dot{\psi} &= 1 + \varepsilon \Psi^*(a, \psi, \varepsilon), \quad \Psi^* \equiv \Psi(a, \psi, \varepsilon h^*(a, \psi, \varepsilon)) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Система (3.4) существенно проще для исследования, чем (2.11). Ее решения $a^*(\tau, \varepsilon), \psi^*(\tau, \varepsilon)$, удовлетворяющие некоторым начальным условиям, и аналогичные решения $a(\tau, \varepsilon), \psi(\tau, \varepsilon), z(\tau, \varepsilon)$ системы (2.11) являются асимптотически близкими [5]; в частности, справедливы оценки:

$$\begin{aligned} |z(\tau, \varepsilon) - \varepsilon h^*(a^*(\tau, \varepsilon), \psi^*(\tau, \varepsilon), \varepsilon)| &\leq C \exp(-\kappa^* \tau), \quad C, \kappa^* > 0 \\ |\xi(\tau, \varepsilon) - a^*(\tau, \varepsilon) \sin \psi^*(\tau, \varepsilon)| &\leq C \exp(-\kappa^* \tau) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Из (3.5) следует, что автоколебательные движения, определяемые системой (2.11), описываются на интегральном устойчивом многообразии $z = \varepsilon h(a, \psi, \varepsilon)$ (3.2) уравнениями (3.4). Для их нахождения можно воспользоваться методом Пуанкаре [3, 4, 6] (см. выше) или методом усреднения [7, 8].

Согласно общей схеме метода усреднения строится замена $(a, \psi) \rightarrow (\alpha, \varphi)$ такая, что “усреднённая медленная переменная” – амплитуда α – не будет связана с “усреднённой фазой” φ :

$$\begin{aligned} a &= \alpha + \varepsilon u_1(\alpha, \varphi) + \varepsilon^2 u_2(\alpha, \varphi) + \dots + \varepsilon^j u_j(\alpha, \varphi) + \dots \\ \psi &= \varphi + \varepsilon v_1(\alpha, \varphi) + \varepsilon^2 v_2(\alpha, \varphi) + \dots + \varepsilon^j v_j(\alpha, \varphi) + \dots \\ \dot{\alpha} &= \varepsilon \Lambda_1(\alpha) + \varepsilon^2 \Lambda_2(\alpha) + \dots + \varepsilon^{j+1} \Lambda_{j+1}(\alpha) + \dots \\ \dot{\varphi} &= 1 + \varepsilon \Phi_1(\alpha) + \varepsilon^2 \Phi_2(\alpha) + \dots + \varepsilon^{j+1} \Phi_{j+1}(\alpha) + \dots \end{aligned} \quad (3.6)$$

Неизвестные 2π -периодические по φ функции u_j, v_j находятся совместно с Λ_j, Φ_j с помощью стандартной рекуррентной процедуры разложения по степеням ε правой части системы (3.4) после подстановки замены (3.6), приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях ε и вычисления средних по φ . Для нахождения высших приближений ($j \geq 1$) требуется привлечение программы символьных вычислений на компьютере, поскольку коэффициенты имеют весьма громоздкий вид. Однако искомое решение задачи в первом приближении по ε , связанное лишь с определением коэффициентов Λ_1, Φ_1 , определяется элементарно:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \varepsilon \Lambda_1(\alpha), \quad \Lambda_1 = \langle A^*(\alpha, \varphi, 0) \rangle_\varphi = \frac{\alpha}{2} \left(\frac{1}{1 + \kappa^2} - \sigma \right) - \frac{3}{8} \frac{\alpha^3}{1 + \kappa^2} \\ \dot{\varphi} &= 1 + \varepsilon \Phi_1(\alpha), \quad \Phi_1 = \langle \Psi^*(\alpha, \varphi, 0) \rangle_\varphi = -\frac{\kappa}{1 + \kappa^2} \left(\frac{3}{8} \alpha^2 - \frac{1}{2} \right) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Угловые скобки $\langle \cdot \rangle_\varphi$ означают усреднение по φ . Интегрирование первого уравнения (3.7) при произвольном начальном значении $\alpha(0) = a^0 > 0$ приводит к выражениям

$$\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{(a^0)^2} \exp(-\varepsilon\gamma\tau) = \frac{\chi}{\gamma} [1 - \exp(-\varepsilon\gamma\tau)], \quad \gamma > 0$$

$$\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{(a^0)^2} = \varepsilon\chi\tau, \quad \gamma = 0; \quad \gamma = \frac{1}{1 + \kappa^2} - \sigma, \quad \chi = \frac{3}{4} \frac{1}{1 + \kappa^2}$$
(3.8)

Из (3.8) следует, что для больших значений коэффициента диссипации σ , приводящих к $\gamma \leq 0$, амплитуда колебаний неограниченно уменьшается: $\alpha \approx a \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$. Стационарная точка $\alpha = 0$ уравнения (3.7) будет экспоненциально устойчивой и автоколебания не возникнут.

Если же $\gamma > 0$, что имеет место при достаточно малых значениях σ , то согласно (3.8) амплитуда колебаний a независимо от начальной величины $a^0 > 0$ стремится к асимптотически устойчивому предельному значению a^* :

$$a^* \approx \alpha^* = \sqrt{\gamma/\chi} = [(4/3)(1 - \sigma(1 + \kappa^2))]^{1/2}, \quad \alpha^* \sim 1$$
(3.9)

Помимо экспоненциально неустойчивой стационарной точки $\alpha = 0$ ($a \approx 0$) уравнение (3.7) для α допускает стационарное значение $\alpha = \alpha^*$, которое является асимптотически (экспоненциально) устойчивым. Конечно, величина α^* (3.9) лишь приближенно с погрешностью $O(\varepsilon)$ определяет амплитуду a^* автоколебаний, описываемых на локальном интегральном многообразии системой уравнений (3.4). Более точно по степеням параметра ε искомое решение и стационарные точки можно найти с помощью процедуры (3.6) либо методом Пуанкаре [7]. При достаточно малых значениях параметра ε найденные выражения хорошо описывают основные свойства автоколебаний и поведение исходной системы в некоторой малой окрестности согласно формулам замены (2.10), (2.2).

Фаза $\psi = \varphi + O(\varepsilon)$ определяется с помощью квадратуры из второго уравнения (3.7), в которое подставлены функция $\alpha(\varepsilon, \tau)$ (3.8) либо стационарное значение $\alpha = \alpha^*$ (3.9). Стационарные периодические движения (автоколебания) характеризуются согласно методу Пуанкаре малым, порядка ε , изменением периода на относительную величину $\mu \approx \varepsilon\mu_1$ (2.7), т.е. частоты на $\nu \approx \varepsilon\nu_1 = -\varepsilon\mu_1$. На основе (3.7) можно получить выражения

$$\nu_1 = \frac{1}{2} \frac{\kappa}{1 + \kappa^2} \left(1 - \frac{3}{4} \alpha^{*2} \right) = \frac{1}{2} \sigma \kappa, \quad \psi \approx \varphi = (1 + \varepsilon\nu_1)\tau + \psi^0$$
(3.10)

где ψ^0 – начальное значение фазы ψ . Безразмерные параметры ε , σ , κ и аргумент τ в формулах (3.8)–(3.10) могут быть выражены через исходные физические параметры посредством соотношений (2.2).

4. Термомеханическая интерпретация автоколебаний газа в резонаторе Гельмгольца. С помощью найденных безразмерных выражений, описывающих автоколебания системы (см. разд. 2, 3), переходом к размерным физическим величинам по формулам (2.2) исследуется влияние различных параметров. Пусть начальные значения θ^0, x^0, \dot{x}^0 системы (1.5), (1.6) заданы. Тогда для z^0, a^0, ψ^0 получаются представления

$$z^0 = -(\beta\theta^0 + 2\delta\dot{x}^0)(1 + \kappa^2)^{-1} (d\omega_0^2)^{-1}, \quad a^0 \sin \psi^0 = x^0/d - z^0$$

$$a^0 \cos \psi^0 = \dot{x}^0/(d\omega_0) - \kappa z^0, \quad \kappa = K/(mc\omega_0), \quad d = (k_1/k_3)^{1/2}$$
(4.1)

Величина $|z^0| \sim 1$ может быть взята достаточно большой. За относительно короткий промежуток размерного времени Δt , где

$$\Delta t = \frac{\Delta \tau}{\omega_0}, \quad \Delta \tau \approx \kappa^{-1} \ln(|z^0| \varepsilon^{-1}) \ll \varepsilon^{-1}, \quad \kappa \sim 1, \quad \varepsilon = \frac{\beta k_1 K}{m c \omega_0^3} \ll 1 \quad (4.2)$$

при $a^0 \sim 1$ система придет в малую окрестность устойчивого локального интегрально-го многообразия. Если коэффициент диссипации 2δ относительно невелик, а именно

$$2\delta < \frac{\beta k_1 m c K}{K^2 + m^2 c^2 \omega_0^2} \quad (4.3)$$

то фазовая точка x, \dot{x}, θ стремится к экспоненциально устойчивому предельному циклу, описываемому соотношениями

$$x^2 + \dot{x}^2 \omega_0^{-2} = \frac{4k_1}{3k_3} \left[1 - 2\delta \frac{K^2 + m^2 c^2 \omega_0^2}{\beta k_1 m c K} \right] \equiv d^2 \alpha^{*2}$$

$$x = d\alpha^* \sin \varphi, \quad \dot{x} = d\omega_0 \alpha^* \cos \varphi$$

$$\theta = \frac{d\kappa}{1 + \kappa^2} k_1 \alpha^{*2} \left(1 - \frac{3}{4} \alpha^{*2} \right) (\kappa \sin \varphi - \cos \varphi) +$$

$$+ \frac{d\kappa}{9 + \kappa^2} k_1 \frac{\alpha^{*3}}{4} (\kappa \sin^3 \varphi - 3 \cos 3\varphi) \quad (4.4)$$

Поскольку $\alpha^* \sim 1$ согласно (3.9), то линейная амплитуда автоколебаний элемента газа в трубке характеризуется величиной d ; естественно полагать $d = (k_1/k_3)^{1/2} \ll l$, где l – длина трубки (см. разд. 1 и фигуру). Возмущенная частота ω автоколебаний согласно (3.10) описывается выражением

$$\omega = \omega_0 (1 + (\varepsilon/2)\sigma\kappa) = \omega_0 (1 + \delta K / (m c \omega_0^2)) \quad (4.5)$$

Характерное время ζ приближения фазовой точки к предельному циклу на локальном интегральном многообразии определяется с помощью уравнения в вариациях для γ при подстановке $\alpha = \alpha^* + \gamma$ в (3.7). Коэффициент q в уравнении $\gamma' = -\varepsilon q \gamma$ и постоянная ζ равны

$$q = \frac{1}{1 + \kappa^2} - \sigma = \frac{m^2 c^2 \omega_0^2}{K^2 + m^2 c^2 \omega_0^2} - \frac{2\delta}{\varepsilon \omega_0}, \quad \zeta = \frac{1}{\varepsilon q \omega_0} \quad (4.6)$$

$$\varepsilon \omega_0 = (\beta k_1 K) / (m c \omega_0^2)$$

Формулы (4.1)–(4.6) определяют зависимости характеристик автоколебаний резонатора Гельмгольца в исходных термических и газодинамических переменных. Они оказываются весьма непростыми и при расчетах требуют тщательных измерений и оценок. Выражения существенно упрощаются, если коэффициент диссипации 2δ относительно мал и им можно пренебречь, например, если $2\delta/\omega_0 = \varepsilon^2 \sigma$. Тогда условие (4.3) самовозбуждения автоколебаний всегда выполняется. Амплитуда автоколебаний принимает простое выражение $d\alpha^* = (4k_1/(3k_3))^{1/2}$, частота (период) в первом приближении не изменяется, см. (4.5); постоянная времени ζ (4.6) уменьшается, т.е. отрицатель-

ный показатель экспоненты увеличивается. Отсутствие диссипации ($\delta = 0$) при движении газа в трубке согласно (1.6) существенно упрощает исследование автоколебаний и позволяет построить также высшие приближения решения в аналитической форме. Однако для приложений значительно больший интерес представляет численно-аналитическое исследование задачи в предположении, что введённый параметр ϵ не мал и может принимать умеренно большие значения $\epsilon \sim 1$. Предварительные расчеты свидетельствуют о возможности бифуркации периодических движений рассматриваемой нелинейной системы (1.5), (1.6).

Заключение. Построена математическая модель автоколебаний резонатора Гельмгольца с тепловым механизмом самовозбуждения. Получены строгие условия возникновения автоколебаний, связывающие механические и газодинамические параметры резонатора. Найдены приближенные формулы, описывающие изменение амплитуды и частоты колебаний во времени, а также их стационарные значения. Доказана асимптотическая устойчивость стационарных квазилинейных автоколебаний. Впервые изучены методами локальных интегральных многообразий и усреднения автоколебания в нелинейной газодинамической системе третьего порядка.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 02-01-00252, 02-01-00157) и Программы поддержки ведущих научных школ НШ-1627.2003.01.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Strutt J.W. (Rayleigh). The Theory of Sound. London: Mc Millan, 1929 = Стрэтт Дж.В. (Лорд Рэлей). Теория звука. Т. 2. М.; Л.: Гостехиздат, 1955. 476 с.*
2. *Теодорчик К.Ф. Автоколебательные системы. М.; Л.: Гостехиздат, 1952. 272 с.*
3. *Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. 491 с.*
4. *Poincaré H. Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Celeste. 3 vols. Paris: Gauthier-Villars. 1892; 1893; 1899. = Пуанкаре А. Новые методы в небесной механике. Избр. тр. в 3-х т.т. М.: Наука. Т. 1. 1971. 771 с.; Т. 2. 1972. 999 с.*
5. *Митропольский Ю.А., Лыкова О.Б. Интегральные многообразия в нелинейной механике. М.: Наука, 1973. 512 с.*
6. *Акуленко Л.Д. Периодические движения автономных систем в окрестности устойчивого интегрального многообразия // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 3. С. 26–35.*
7. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.*
8. *Волосов В.М., Моргунов Б.И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971. 508 с.*

Москва

Поступила в редакцию
29.VII.2003