

УДК 532.527

© 2004 г. С. М. ДРОЗДОВ

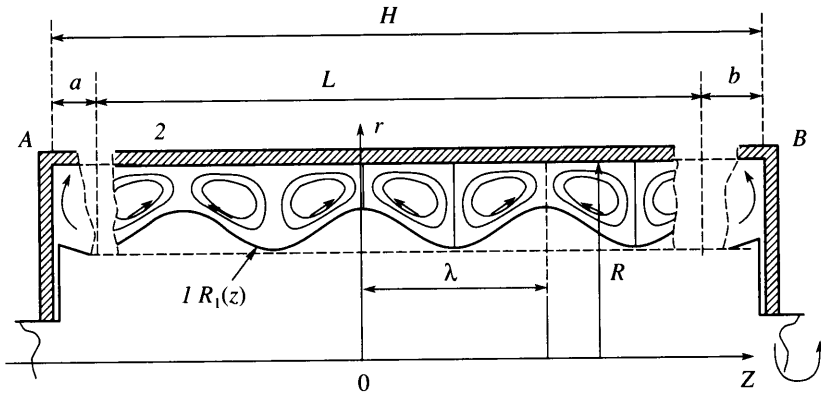
БИФУРКАЦИЯ ВОЗНИКНОВЕНИЯ АСИММЕТРИЧНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СТРУКТУР И САМОИНДУЦИРОВАННОГО ГРАДИЕНТА ДАВЛЕНИЯ В МОДИФИЦИРОВАННОМ ТЕЧЕНИИ ТЕЙЛОРА

На примере модифицированного течения Тейлора теоретически и численно исследуется бифуркация потери симметрии течений с возникновением самоиндуцированного градиента давления. Выполнен линейный анализ, показавший, что данная бифуркация является закритической, обязательно сопровождается появлением продольного градиента давления и происходит при таких значениях параметров, когда решение линейной системы для возмущений удовлетворяет условию нулевого расхода. Установлено, что в результате бифуркации рождаются сразу два асимметричных решения с противоположными направлениями градиента давления. В закритической области остается и симметричная ветвь решений, но она становится неустойчивой. Бифуркация потери симметрии и самоиндуцированный градиент давления могут иметь место только в нелинейных системах.

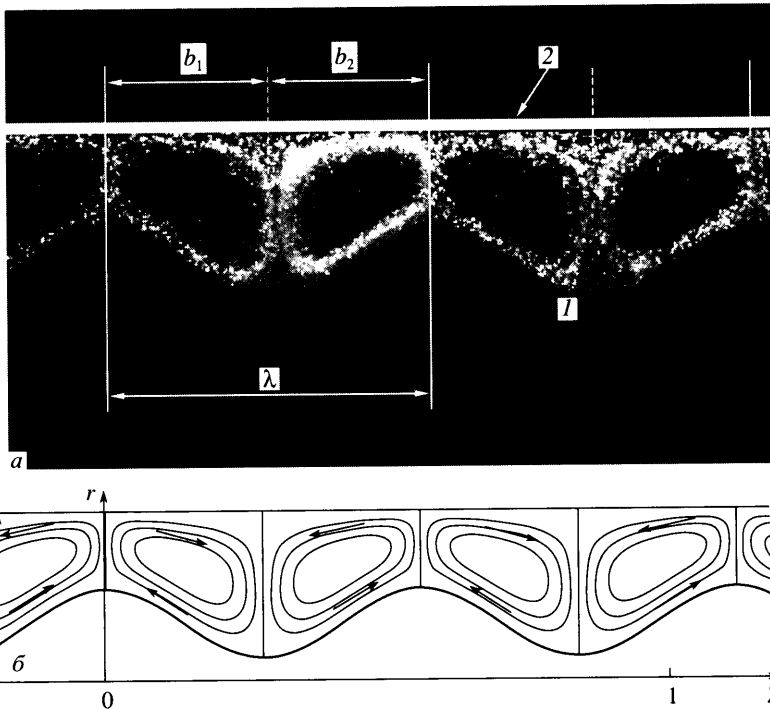
Ключевые слова: течение Тейлора, асимметричные структуры, бифуркация.

В гидродинамике хорошо известно течение несжимаемой жидкости между двумя коаксиальными цилиндрами, возникающее при вращении внутреннего цилиндра-ротора (течение Тейлора) [1]. Модифицированное течение Тейлора реализуется в протяженной области, где одна или обе твердые поверхности имеют осесимметричную форму с периодическим изменением радиуса вдоль оси вращения z (волнообразная форма) (фиг. 1). Впервые экспериментальные и численные исследования модифицированного течения Тейлора были выполнены в [2] для случая, когда внешняя неподвижная поверхность имела форму гладкого цилиндра, а радиус поверхности ротора изменялся по гармоническому закону (фиг.1). Экспериментальное исследование устойчивости модифицированного течения Тейлора проведено в [3]. Численное исследование модифицированного течения Тейлора для случая обеих волнообразных поверхностей произвольной формы, периодической вдоль оси z , выполнено в [4]. Исследования показали, что в отличие от классического модифицированное течение Тейлора даже при малых числах Тейлора $T \ll 1$ (T – управляющий параметр задачи, см. ниже) является трехмерным и осесимметричным. Течение имеет фиксированный период, равный или кратный длине волны поверхности λ . При малых и умеренных величинах T стационарные вихревые структуры повторяют симметрию области течения, если таковая имеется. Иллюстрацией этому факту служит фиг. 2, где один период течения состоит из двух симметричных вихрей с противоположной циркуляцией. Наличие двух вихрей на периоде не является общим правилом. Для других вариантов геометрии ротора в диапазоне $T > 55$ обнаружены симметричные течения с четырьмя вихрями на период, а в расчетах, кроме того, найдена ветвь решений с шестью вихрями на период [6].

Одним из самых интересных и неожиданных результатов экспериментальных исследований [2] стало обнаружение устойчивых стационарных вихревых структур, несимметричных в плоскости r, z . Эти структуры возникали из симметричных вихрей после превышения некоторого критического числа $T^* \approx 250$. На фиг. 3,а приведена картина траекторий индикаторных частиц в плоскости лазерного ножа при $T = 325$.



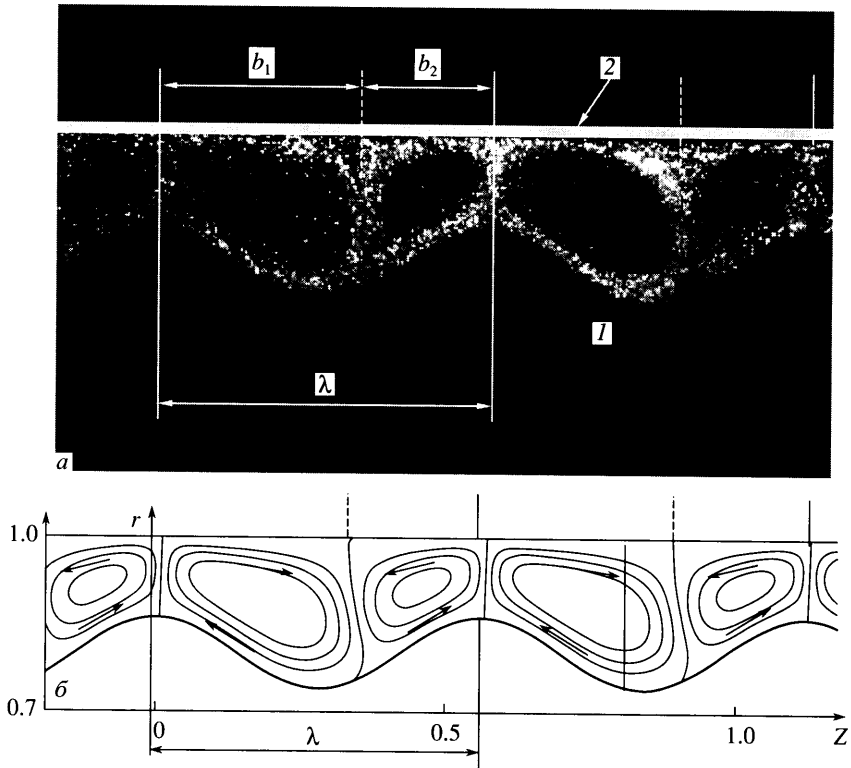
Фиг. 1. Схема области течения и система координат: 1 – ротор, 2 – корпус



Фиг. 2. Симметричное течение в области с геометрией WR5 при $T = 210.5$. а) визуализация поля течения r, z в эксперименте; б) расчет течения Тейлора для ротора WR5: Линии тока в плоскости r, z

Видно, что симметрия вихрей сильно нарушена – их размеры различаются в полтора раза. Для объяснения этого эффекта в [5] выдвинута гипотеза, что асимметричные стационарные периодические вихревые структуры могут существовать в неограниченной по z области и возникают в результате бифуркации потери симметрии при определенном числе T^* . Выяснилось, что явление потери симметрии вихревого течения сопровождается самопроизвольным возникновением осевого градиента давления.

Явление потери симметрии течения жидкости в области с симметричной формой геометрии границ обнаружено в целом ряде задач гидродинамики. Для несжимаемой



Фиг. 3. Асимметричное течение в области с геометрией WR5 при $T = 325.3$. а) визуализация поля течения r, z в эксперименте; б) расчет течения Тейлора для ротора WR5: линии тока в плоскости r, z

жидкости также хорошо известна возможность сосуществования периодического поля вектора скорости и непериодического поля давления с заданным средним градиентом. Однако никогда не рассматривалась возможность самопроизвольного возникновения градиента давления в периодическом течении жидкости в замкнутой области большого удлинения. В [5] это было предсказано теоретически, обнаружено в численных исследованиях и подтверждено экспериментально. Там же дано обобщение задачи расчета периодических вихревых течений в области с большим удлинением, которое состоит в разложении давления на периодическую по z функцию и градиентный член $G(t)z$, который заранее не известен и должен быть получен как один из параметров искомого решения. Условием, замыкающим данную задачу, является интегральное уравнение, фиксирующее осевой расход жидкости.

Расчеты в рамках стационарных уравнений Навье – Стокса, выполненные согласно этой обобщенной постановке, дали результаты, хорошо совпадающие с экспериментом в закритической области $T > T^*$ (фиг. 3, б). Но саму бифуркацию исследовать таким образом нельзя – именно в этой точке решение уравнений Навье – Стокса локально неединственно. Необходимо провести линейный бифуркационный анализ, который только и может дать точное критическое число T^* , указать причину возникновения и роль градиента давления, прояснить структуру и свойства ответвляющегося решения. Этому и посвящена настоящая работа.

Рассмотрим осесимметричную область, заключенную между внутренней поверхностью корпуса и поверхностью ротора (фиг. 1). Длина $H = a + L + b$ области вдоль

оси z многократно превышает радиус внешнего цилиндра R и длину волны λ поверхностей ($H \gg R$, $H \gg \lambda$). Область заполнена несжимаемой вязкой жидкостью. Вращение ротора с угловой скоростью ω вызывает движение жидкости в области.

Введем цилиндрическую систему координат с центром на оси z так, что ось r проходит через один из максимумов функции $R_1(z)$, примерно одинаково удаленный от левого A и правого B концов области (фиг. 1). Математическая модель течения жидкости строится в рамках осесимметричных стационарных уравнений Навье – Стокса. Жидкость считается несжимаемой, ее вязкость постоянна, а поле течения – изотермическое. Характерные масштабы скорости и давления определяются следующим образом:

$$M_V = \omega R, \quad M_P = \rho(\omega R)^2 \quad (1)$$

Все геометрические параметры обезразмерены по радиусу корпуса R . Далее используются только безразмерные величины.

Математическая модель допускает общий случай модифицированной геометрии Тейлора с волнообразными поверхностями ротора и корпуса, описываемыми произвольными непрерывными функциями $R_1(z)$, $R_2(z)$, периодическими вдоль оси z с одинаковым периодом $\lambda = 2\pi/s$ [4]. Эти функции могут быть представлены сходящимися рядами Фурье

$$R_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \exp(insz), \quad R_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n \exp(insz) \quad (2)$$

В большинстве примеров, рассмотренных в настоящей работе, течение происходит в области с цилиндрической поверхностью корпуса $R_2 = 1$ (фиг. 1). Однако, как будет видно из дальнейшего изложения, все выводы работы относятся и к общему случаю (2). Числа Тейлора и Рейнольдса определяются так

$$T = \text{Re} \sqrt{A_0(1 - A_0)^{3/2}}, \quad \text{Re} = \frac{\rho \omega R^2}{\mu} \quad (3)$$

Без ограничения общности постановки задачи давление может быть представлено в следующей форме:

$$P' = P_0 + \rho(\omega R)^2 [P(r, z) - Gz] \quad (4)$$

Здесь $P_0 = \text{const}$, а функция $P(r, z)$ остается ограниченной при неограниченном увеличении длины области H (фиг. 1). Входящий в (4) средний градиент давления G может быть вызван внешним нагнетанием жидкости (если границы области A и B открытые). Однако наиболее интересный случай соответствует закрытым границам A и B , где при определенном числе T^* возникает самоиндуцированный градиент давления G [5].

При сделанных предположениях система уравнений движения жидкости может быть представлена в безразмерном виде

$$\begin{aligned} v \frac{\partial u}{\partial r} + u \frac{\partial u}{\partial z} &= G - \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 u \\ v \frac{\partial v}{\partial r} + u \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{w^2}{r} &= -\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\nabla^2 v - \frac{v}{r^2} \right] \\ v \frac{\partial w}{\partial r} + u \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{vw}{r} &= \frac{1}{\text{Re}} \left[\nabla^2 w - \frac{w}{r^2} \right] \end{aligned} \quad (5)$$

$$\frac{\partial(rv)}{\partial r} + \frac{\partial(ru)}{\partial z} = 0$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Здесь v , w , u – радиальная, окружная и осевая компоненты скорости жидкости. Граничные условия для v , w , u есть условия прилипания на твердых стенках области. На поверхностях ротора и корпуса

$$r = R_1(z): u = v = 0, \quad w = R_1(z), \quad r = R_2(z): u = v = w = 0 \quad (6)$$

В краевых сечениях A и B

$$z = Z_A, \quad z = Z_B: u = v = w = 0 \quad (7)$$

Кроме этого нужно задать величину давления в одной произвольной точке внутри области

$$P^*(0, R_2(0)) = P_0 \quad \text{или} \quad P(0, R_2(0)) = 0 \quad (8)$$

Приведенная выше классическая постановка задачи о движении несжимаемой жидкости не зависит от размера области H и обеспечивает локальную однозначность стационарных решений (5)–(8) (по крайней мере, при не слишком больших числах Re или T). Локальная однозначность может нарушаться только при бифуркационных значениях параметров задачи.

Для преобразования сложной формы области течения к прямоугольнику в плоскости r, z применена следующая замена переменных

$$\{r, \varphi, z\} \Rightarrow \{y, \varphi, x\}, \quad x = z, \quad y = \frac{r - R_1(z)}{[R_2(z) - R_1(z)]} \quad (9)$$

Предположим, что в некотором диапазоне чисел T установившееся течение в области состоит из главной части, имеющей протяженность $L \gg 1$, и буферных областей ограниченной протяженности $a \sim b \sim 1$, примыкающих к краевым сечениям A и B (фиг. 1). В главной части течение периодическое с периодом, равным длине волны поверхности ротора λ (или целому их числу $\Lambda = m\lambda$). В буферных областях возможны отклонения от периодичности течения.

Как показано в [5], обобщенная формулировка краевой задачи расчета периодических вихревых течений в области с большим удлинением L предполагает разложение давления на периодическую по z функцию и градиентный член Gz (4), который заранее не известен и должен быть получен как один из параметров искомого решения. Условием, замыкающим данную задачу, является интегральное уравнение, фиксирующее осевую расход жидкости

$$Q = 2\pi \int_{R_1}^{R_2} u(r, z) r dr = 0 \quad (10)$$

Примем условие периодичности всех функций по координате x (или z) с периодом $\lambda = 2\pi/s$ (s – главное волновое число) и представим функции системы (5) в виде рядов Фурье

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ P \end{pmatrix} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} U_n(y) \\ V_n(y) \\ W_n(y) \\ P_n(y) \end{pmatrix} \exp(insx) \quad (11)$$

Предполагая достаточную гладкость функций u, v, w, P по x , в рядах (11) можно априори ограничиться конечным числом членов $N \gg 1$. Подстановка (11) в (5) дает комплексную систему обыкновенных дифференциальных уравнений для амплитуд гармоник. Для дальнейшего анализа необходимо рассмотреть лишь принципиальную структуру амплитудных уравнений, а их полный алгебраический вид используется только при написании программ. Полученные уравнения содержат много членов в виде известных функций, определяемых геометрией границ области (далее обозначены $X(x, y)$), функций, линейно зависящих от компонент вектора скорости течения u, v, w (далее обозначены F), а также имеются произведения вида XX, XF и FF . Все произведения представляются в виде рядов Фурье. Коэффициенты Фурье нелинейных членов вида FF в системе (5) представляются в явной аналитической форме, например

$$\langle uv \rangle_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} V_k W_{n-k} = \langle FF \rangle_n \quad (12)$$

Система обыкновенных дифференциальных уравнений относительно коэффициентов Фурье искомых функций (11) формально состоит из бесконечного числа блоков, каждый из которых представляет баланс членов уравнений, соответствующих гармонике с номером n . Нелинейные члены завязывают блоки между собой. Ниже приведен принципиальный вид одного из таких блоков для произвольного n . Точками обозначены остальные члены, которые не меняют порядка уравнений.

Уравнение неразрывности

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{dV_k}{dy} \langle X \rangle_{n-k} + isk U_k \langle X \rangle_{n-k} - \frac{i}{2} s(n-k) \frac{dU_k}{dy} \langle X \rangle_{n-k} + \dots \right] = 0 \quad (13)$$

Уравнение баланса продольной компоненты импульса

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{dU_k}{dy} \langle F \rangle_{n-k} - sk U_k \langle F \rangle_{n-k} - \frac{dP_k}{dy} i \langle X \rangle_{n-k} + isk P_k \langle X \rangle_{n-k} - \right. \\ \left. - \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{d^2 U_k}{dy^2} \langle X \rangle_{n-k} + \frac{dU_k}{dy} \langle X \rangle_{n-k} - U_k \langle X \rangle_{n-k} \right] \right\} = G \langle X \rangle_n \quad (14)$$

Уравнение баланса радиальной компоненты импульса

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{dV_k}{dy} \langle F \rangle_{n-k} + \dots + \frac{dP_k}{dy} \langle X \rangle_{n-k} - \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{d^2 V_k}{dy^2} \langle X \rangle_{n-k} + \dots \right] \right\} = 0 \quad (15)$$

Уравнение баланса азимутальной компоненты импульса

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{dW_k}{dy} \langle F \rangle_{n-k} + V_k \langle F \rangle_{n-k} + \dots - \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{d^2 W_k}{dy^2} \langle X \rangle_{n-k} + \dots \right] \right\} = 0 \quad (16)$$

Напомним, что в уравнениях (13)–(16) одинаковыми символами F обозначены разные функции. Поэтому нельзя использовать $\langle F \rangle_{n-k}$ как общий множитель.

Граничные условия для (13)–(16) примут следующий вид:

$$y = 0: U_n = V_n = 0, \quad W_n = A_n \\ y = 1: U_0 = W_0 = P_0 = 0, \quad U_n = V_n = W_n = 0, \quad n \neq 0 \quad (17)$$

Таблица 1

Вариант	Ротор R_1			Корпус R_2	
	A_0	$2A_1$	λ	B_0	$2B_1$
WR3	0.8	0.122	0.5597	1	0
WRB3	0.8	0.122	0.5597	0.98	0.02
WR5	0.8	0.061	0.5597	1	0
WR112	0.7	0.15	1.12	1	0
WR03	0.9	0.05	0.3	1	0
WR012	0.96	0.02	0.12	1	0

При граничных условиях (7) система (13)–(17) замыкается уравнением нулевого расхода (10), которое тоже должно быть записано в терминах разложения Фурье

$$Q = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^1 U_k X_{-k} dy = 0 \quad (18)$$

Решение краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (13)–(18) относительно коэффициентов Фурье осуществлялось конечно-разностным методом, в котором аппроксимация производных выполнена по схеме центральных разностей второго порядка точности. Решение нелинейной алгебраической системы конечно-разностных уравнений производилось модифицированным методом Ньютона. Все вычисления производились с двойной точностью. Правильность расчетов проверялась по быстрой сходимости итераций в методе Ньютона, быстрой сходимости результатов при увеличении числа гармоник в рядах Фурье (11) и точному выполнению законов баланса сил и моментов, действующих на один период течения. Выполнены сравнения с расчетными и экспериментальными данными других авторов [6]. Основной объем расчетов произведен при следующем пространственном разрешении: число гармоник на один период 12–25, число шагов сетки по координате y – 41 и 81.

На фиг. 2, б и 3, б представлены результаты расчетов течений, которые хорошо согласуются с экспериментальными данными фиг. 2, а и 3, а. В [4] приведено несколько примеров расчетов полей течения в областях со сложной геометрией границ (2) при наличии (задано $G \neq 0$) и отсутствии внешнего нагнетания жидкости. В [5] представлены результаты экспериментальных и численных исследований модифицированного течения Тейлора для случая, когда внешняя неподвижная поверхность имеет форму гладкого цилиндра $R_2 = 1$, а радиус поверхности ротора изменяется по гармоническому закону

$$R_1(z) = A_0 + 2A_1 \cos(2\pi z/\lambda) \quad (19)$$

Варианты геометрии области течения, о которых пойдет речь в настоящей статье, приведены в табл. 1.

Здесь корпус имеет либо цилиндрическую форму $R_2 = 1$, либо его радиус тоже изменяется по гармоническому закону $R_2(z) = B_0 + 2B_1 \cos(2\pi z/\lambda)$.

Исследования показали, что при малых и умеренных значениях T стационарные вихревые структуры повторяют симметрию области течения, если таковая имеется. В частности многообразие геометрических форм поверхности ротора (19) обладает свойством симметрии относительно плоскостей вида $z = k\lambda/2$, где k – целое число. Ил-

люстрацией этому факту служат результаты экспериментальных исследований (фиг. 2, а) [5] и численного интегрирования системы (13)–(18) при $T = 210$ (фиг. 2, б), из которых видно, что один период течения состоит из двух симметричных вихрей с противоположной циркуляцией.

Однако в модифицированном течении Тейлора с симметричной формой внутренней области могут существовать и асимметричные стационарные периодические вихревые структуры, которые возникают из симметричных структур в результате бифуркации потери симметрии при определенном числе T^* [5]. Потеря симметрии вихревого течения сопровождается самопроизвольным возникновением продольного градиента давления G , но при этом остается нулевым расход жидкости (10). На фиг. 3 приведены экспериментальная и численная реализации типичного асимметричного течения при $T = 325.3$ [5].

Основываясь на результатах [5], проведем детальный анализ обнаруженной бифуркации. Пусть границы области течения обладают свойством симметрии $R_1(z) = R_1(-z)$, $R_2(z) = R_2(-z)$. С учетом периодичности поверхностей ротора и корпуса (2) это приводит к действительному виду коэффициентов Фурье

$$A_n = A_{-n} = \text{real}, \quad B_n = B_{-n} = \text{real} \quad (20)$$

Нетрудно убедиться, что все функции в системе (13)–(17) вида $X(x, y)$ будут удовлетворять принципу симметрии $X(-x, y) = X(x, y)$ либо антисимметрии $X(-x, y) = -X(x, y)$, а их коэффициенты Фурье являются либо действительными, либо чисто мнимыми. В итоге для всех коэффициентов можно использовать только действительные функции X_n вида

$$\langle X \rangle_n = X_n(y) \quad \text{или} \quad \langle X \rangle_n = iX_n(y) \quad (21)$$

При сделанных предположениях у системы (5) имеются так называемые симметричные решения вида

$$\begin{aligned} u(r, z) &= -u(r, -z), & v(r, z) &= v(r, -z) \\ w(r, z) &= w(r, -z), & P(r, z) &= P(r, -z) \end{aligned}$$

Эти решения тоже могут быть представлены в виде рядов (11)

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ P \end{pmatrix} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} iU_n^*(y) \\ V_n^*(y) \\ W_n^*(y) \\ P_n^*(y) \end{pmatrix}_{\text{Sim}} \exp(insx), \quad U_0^*(y) = 0 \quad (22)$$

Коэффициенты Фурье в (22) – действительные функции. Они представляют класс решений системы (13)–(18), который далее именуется симметричным. Течение, приведенное на фиг. 2, принадлежит к классу симметричных решений. Коэффициенты Фурье общего вида (11) являются комплексными функциями, которые можно представить так

$$\begin{pmatrix} U_n \\ V_n \\ W_n \\ P_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} iU_n^*(y) \\ V_n^*(y) \\ W_n^*(y) \\ P_n^*(y) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_n(y) \\ i v_n(y) \\ i w_n(y) \\ i g_n(y) \end{pmatrix}, \quad U_n(y) = u_n(y) \quad (23)$$

Отметим, что в общем случае первый столбец в правой части (23) не совпадает с (22). В коэффициентах Фурье для функций F системы (13)–(17) разделим реальную и мнимую части.

$$\langle F \rangle_n = F_n^*(U_n^*, V_n^*, W_n^*) + i f_n(u_n, v_n, w_n) \quad (24)$$

Структура уравнений (5), (20), (21) такова, что реальная часть коэффициентов (24) является линейной функцией только переменных первого столбца (23), а мнимая часть – линейная функция только второго столбца. Подставим (23) в систему (13)–(18), разделим в уравнениях реальную и мнимую части и перегруппируем их следующим образом. В первую группу входят следующие блоки уравнений для каждого номера n .

Действительная часть уравнения неразрывности

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{dV_k^*}{dy} X_{n-k} + V_k^* X_{n-k} - sk U_k^* X_{n-k} + \frac{1}{2} s(n-k) \frac{dU_k^*}{dy} X_{n-k} \right] = 0 \quad (25)$$

Мнимая часть уравнения баланса продольной компоненты импульса

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{dU_k^*}{dy} F_{n-k}^* + \frac{du_k}{dy} f_{n-k} - sk(U_k^* F_{n-k}^* + u_k f_{n-k}) - \frac{dP_k^*}{dy} X_{n-k} + \right. \\ \left. + sk P_k^* X_{n-k} - \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{d^2 U_k^*}{dy^2} X_{n-k} + \frac{dU_k^*}{dy} X_{n-k} - U_k^* X_{n-k} \right] \right\} = 0 \quad (26)$$

Действительная часть уравнения баланса радиальной компоненты импульса

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{dV_k^*}{dy} F_{n-k}^* - \frac{dv_k}{dy} f_{n-k} + \dots - \frac{dP_k^*}{dy} X_{n-k} - \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{d^2 V_k^*}{dy^2} X_{n-k} + \dots \right] \right\} = 0 \quad (27)$$

Действительная часть уравнения баланса азимутальной компоненты импульса

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{dW_k^*}{dy} F_{n-k}^* - \frac{dw_k}{dy} f_{n-k} + V_k^* F_{n-k}^* + \dots - \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{d^2 W_k^*}{dy^2} X_{n-k} + \dots \right] \right\} = 0 \quad (28)$$

Во вторую группу входят следующие блоки уравнений для каждого номера n .

Мнимая часть уравнения неразрывности

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{dv_k}{dy} X_{n-k} + v_k X_{n-k} + sk u_k X_{n-k} - \frac{1}{2} s(n-k) \frac{du_k}{dy} X_{n-k} \right] = 0 \quad (29)$$

Действительная часть уравнения баланса продольной компоненты импульса

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{du_k}{dy} F_{n-k}^* - \frac{dU_k^*}{dy} f_{n-k} - sk(u_k F_{n-k}^* - U_k^* f_{n-k}) + \frac{dg_k}{dy} X_{n-k} - \right. \\ \left. - sk g_k X_{n-k} - \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{d^2 u_k}{dy^2} X_{n-k} + \dots \right] \right\} = GX_n \quad (30)$$

Мнимая часть уравнения баланса радиальной компоненты импульса

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{dv_k}{dy} F_{n-k}^* + \frac{dV_k^*}{dy} f_{n-k} + \dots + \frac{dg_k}{dy} X_{n-k} - \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{d^2 v_k}{dy^2} X_{n-k} + \dots \right] \right\} = 0 \quad (31)$$

Мнимая часть уравнения баланса азимутальной компоненты импульса

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{dw_k}{dy} F_{n-k}^* + \frac{dW_k^*}{dy} f_{n-k} + v_k F_{n-k}^* + \dots - \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{d^2 w_k}{dy^2} X_{n-k} + \dots \right] \right\} = 0 \quad (32)$$

С учетом (20) граничные условия для (25)–(32) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} y = 0: U_n^* = V_n^* = 0, \quad W_n^* = A_n, \quad u_n = v_n = w_n = 0 \\ y = 1: u_0 = W_0^* = P_0^* = 0, \quad U_n^* = V_n^* = W_n^* = u_n = v_n = w_n = 0, \quad n \neq 0 \end{aligned} \quad (33)$$

Замыкает задачу условие нулевого расхода (10) в форме

$$\int_0^1 u_0 X_0 dy + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^1 u_k X_k dy \right) = 0 \quad (34)$$

Система (25)–(34) отличается от исходной системы (13)–(18) только предположением о симметрии границ области течения (20). Симметричные решения в этих системах получаются, если для всех n

$$\begin{pmatrix} u_n(y) \\ v_n(y) \\ w_n(y) \\ g_n(y) \end{pmatrix} \equiv 0, \quad G = 0 \quad (35)$$

В этом случае все уравнения второй группы блоков (29)–(32) автоматически обращаются в нуль, а условие (34) выполняется тривиально. Уравнения первой группы блоков образуют замкнутую систему относительно нетривиальных компонент симметричного решения (22)

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{dV_k^*}{dy} X_{n-k} + V_k^* X_{n-k} - sk U_k^* X_{n-k} + \frac{1}{2} s(n-k) \frac{dU_k^*}{dy} X_{n-k} \right] = 0 \quad (36)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{dU_k^*}{dy} F_{n-k}^* + \dots - \frac{dP_k^*}{dy} X_{n-k} + sk P_k^* X_{n-k} - \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{d^2 U_k^*}{dy^2} X_{n-k} + \dots \right] \right\} = 0 \quad (37)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{dV_k^*}{dy} F_{n-k}^* - W_k^* F_{n-k}^* + \dots + \frac{dP_k^*}{dy} X_{n-k} - \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{d^2 V_k^*}{dy^2} X_{n-k} + \dots \right] \right\} = 0 \quad (38)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{dW_k^*}{dy} F_{n-k}^* - sk W_k^* F_{n-k}^* + V_k^* F_{n-k}^* - \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{d^2 W_k^*}{dy^2} X_{n-k} + \dots \right] \right\} = 0 \quad (39)$$

Расчеты показывают, что системы (13)–(18) и (25)–(34) имеют симметричные решения (22) во всем исследованном диапазоне чисел $T < 600$, за исключением одной точки T^* , где итерационная процедура решения нелинейных уравнений по методу Ньютона перестает сходиться. Для геометрических параметров эксперимента с ротором WR5 (табл. 1) эта критическая точка оказалась около $T^* \approx 250$, т.е. там, где впервые появляются асимметричные решения [5]. Однако если сразу искать только симметричные решения и ограничиться интегрированием системы (36)–(39), то при всех числах T , включая точку T^* , удастся получить однозначные решения с быстрой сходимостью итераций.

Предположим, что при некотором значении T^* в системе (25)–(34) происходит бифуркация и в локальной окрестности симметричного решения (22) появляется новое асимметричное решение. Если бифуркация закритическая, то при $T - T^* \ll 1$ отвечающее решение отличается от симметричного на малые величины

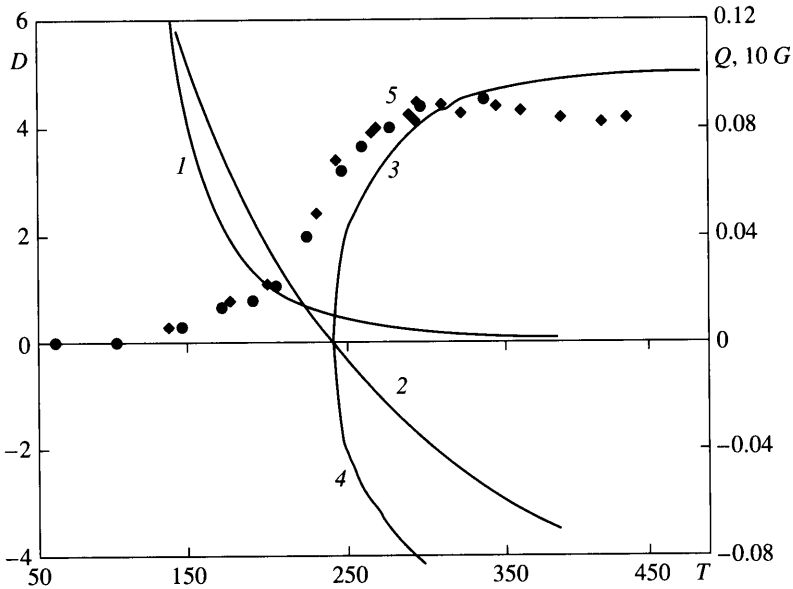
$$\begin{pmatrix} U_n^*(y) \\ V_n^*(y) \\ W_n^*(y) \\ P_n^*(y) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} U_n^*(y) \\ V_n^*(y) \\ W_n^*(y) \\ P_n^*(y) \end{pmatrix}_{\text{Sim}} \ll 1, \quad \begin{pmatrix} u_n(y) \\ v_n(y) \\ w_n(y) \\ g_n(y) \end{pmatrix} \ll 1 \quad (40)$$

Тогда в главном (нулевом) порядке относительно возмущений (40) уравнения первой группы блоков (25)–(28) образуют замкнутую систему (36)–(39), где присутствуют только компоненты симметричного решения (22). А в первом порядке образуется линейная однородная система, в которую не входят асимметричные компоненты возмущений – второй столбец (23) или (40). Уравнения второй группы блоков в главном (первом) порядке относительно возмущений (40) образуют замкнутую систему, совпадающую с (29)–(32) с точностью до следующего равенства

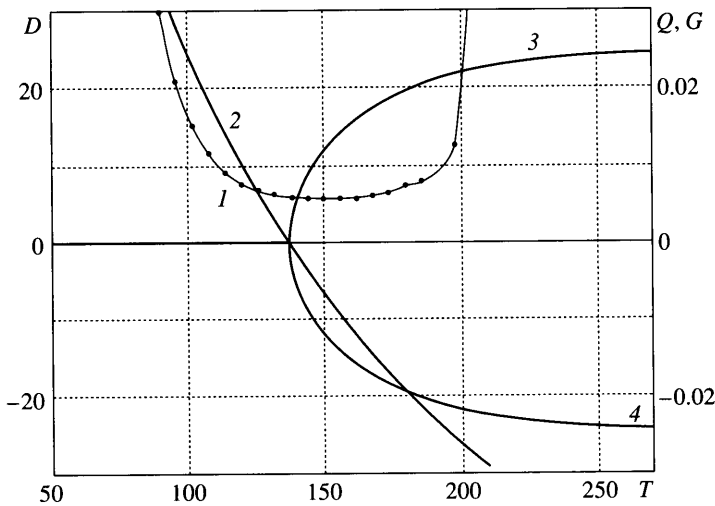
$$\begin{pmatrix} U_n^*(y) \\ V_n^*(y) \\ W_n^*(y) \\ P_n^*(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_n^*(y) \\ V_n^*(y) \\ W_n^*(y) \\ P_n^*(y) \end{pmatrix}_{\text{Sim}} \quad (41)$$

Отметим, что при этом система (29)–(32) становится линейной и содержит только асимметричную часть компонентов вектора возмущений – второй столбец (40). Для этой системы поставлены нулевые граничные условия (33), а ее коэффициенты (например, F_n^*) – линейные функции компонент симметричного решения (22) или (41).

Таким образом, если бифуркация потери симметрии существует, то она должна появляться именно в системе (29)–(32). Найдем условия возникновения этой бифуркации. В системе (29)–(32) имеется один неопределенный параметр – градиент давления G . Если предположить, что $G = 0$, и его введение в (4) было излишним, то для (29)–(32) получится однородная краевая задача на собственные значения параметра T^* , при которых возможно существование нетривиальных решений. Хорошо известно, что необходимым условием существования нетривиальных решений однородной краевой задачи является обнуление детерминанта D матрицы Вронского. Для краевой задачи (29)–(33) была численно найдена матрица Вронского и обнаружено, что ее детерминант нигде не меняет знак и при всех исследованных параметрах остается существенной величиной (фиг. 4, 5). Это означает, что при всех числах T



Фиг. 4. Бифуркационная диаграмма модифицированного течения Тейлора для ротора WR5: 1 – детерминант матрицы Вронского (левая шкала), 2 – функция $Q(T)$ (правая шкала), 3 и 4 – самоиндуцированный градиент давления, положительная G^+ и отрицательная G^- ветви (правая шкала), 5 – экспериментальные величины G



Фиг. 5. Бифуркационная диаграмма модифицированного течения Тейлора для ротора WR03 (обозначения см. на фиг. 4)

(в том числе и при $T \approx 250$) в локальной окрестности симметричной ветви (22) у системы (29)–(32) с $G = 0$ не существует других решений. Но эксперимент и численные расчеты по полной нелинейной системе (29)–(33) дают бифуркацию. Следовательно, необходимо рассмотреть случай $G \neq 0$, либо признать бифуркацию нелокальной. Предположим первое и, пользуясь линейностью системы (29)–(33), избавимся от не-

известного параметра G путем деления на него всех уравнений и приняв новый вектор неизвестных в виде

$$\begin{pmatrix} \alpha_n(y) \\ \beta_n(y) \\ \gamma_n(y) \\ \sigma_n(y) \end{pmatrix} = \frac{1}{G} \begin{pmatrix} u_n(y) \\ v_n(y) \\ w_n(y) \\ g_n(y) \end{pmatrix} \quad (42)$$

В результате получим следующую линейную неоднородную систему относительно (42) с однородными граничными условиями (33)

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{d\beta_k}{dy} X_{n-k} + \beta_k X_{n-k} + sk\alpha_k X_{n-k} - \frac{1}{2}s(n-k) \frac{d\alpha_k}{dy} X_{n-k} \right] = 0 \quad (43)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{d\alpha_k}{dy} F_{n-k}^* - \frac{dU_k^*}{dy} f_{n-k} + \frac{d\sigma_k}{dy} X_{n-k} + \dots - \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{d^2\alpha_k}{dy^2} X_{n-k} + \dots \right] \right\} = X_n \quad (44)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{d\beta_k}{dy} F_{n-k}^* + \frac{dV_k^*}{dy} f_{n-k} + \dots - \frac{d\sigma_k}{dy} X_{n-k} - \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{d^2\beta_k}{dy^2} X_{n-k} + \dots \right] \right\} = 0 \quad (45)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{d\gamma_k}{dy} F_{n-k}^* + \frac{dW_k^*}{dy} f_{n-k} + \beta_k F_{n-k}^* + \dots - \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{d^2\gamma_k}{dy^2} X_{n-k} + \dots \right] \right\} = 0 \quad (46)$$

Напомним, что символами f обозначены функции, пропорциональные компонентам вектора неизвестных (42), а символами F^* обозначены функции, пропорциональные компонентам вектора симметричного решения (41).

Матрицы Вронского однородной краевой задачи для систем (29)–(32) и (43)–(46) одинаковые и, как было установлено, их детерминант не имеет нулей (фиг. 4). Тогда, по известной теореме, неоднородная краевая задача для системы (43)–(46) имеет единственное решение при всех значениях параметров. Однако для исходной задачи (13)–(18) или (25)–(34) это будет только потенциальное асимметричное решение. Следует учесть, что любое истинное решение, которое было представлено в виде (23), должно удовлетворять еще и условию нулевого расхода вдоль оси z (34), которое после замены (42) примет вид

$$Q(T) = \int_0^1 \alpha_0 X_0 dy + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^1 \alpha_k X_k dy \right) = 0 \quad (47)$$

Если равенство (47) не тривиально, то его левая часть есть функция решения системы (43)–(46), симметричного решения (41), а в конечном итоге – функция параметров геометрии области течения и числа T . В точке $T = T^*$, где функция (47) проходит через нуль, потенциальное решение (42) совместимо с граничными условиями непротекания на концах A и B области (фиг. 1). Поэтому только в этой точке T^* может родиться асимметричное решение и самоиндуцированный градиент давления G . Причем из (42) и единственности решения неоднородной краевой задачи (43)–(46) следует,

Таблица 2

Вариант	$d = 1 - A_0$	T^*	$Re^*(d)$	T_{\max}	G_{\max}
WR3	0.2	221.50	443.61	383	0.0106
WRB3	0.18	237.71	428.48	361	0.011
WR5	0.2	247.72	495.76	495	0.0101
WR112	0.3	331.57	506.48	536	0.0034
WR03	0.1	137.33	411.98	270	0.02435
WR012	0.04	89.880	440.32	137	0.02697

что в системе (25)–(34) рождается сразу два асимметричных решения с противоположными направлениями градиента давления

$$G_2 = -G_1, \quad \begin{pmatrix} u_n(y) \\ v_n(y) \\ w_n(y) \\ g_n(y) \end{pmatrix}_2 = - \begin{pmatrix} u_n(y) \\ v_n(y) \\ w_n(y) \\ g_n(y) \end{pmatrix}_1 \quad (48)$$

Расчеты показали, что для всех исследованных форм геометрии области (табл. 1) функция (47) не является тривиальной и проходит через нуль в единственной точке диапазона $T < 600$. На фиг. 4, 5 приведены бифуркационные диаграммы для модифицированного течения Тейлора в областях различных геометрических форм (табл. 1).

Для геометрических параметров ротора WR5 бифуркация потери симметрии и возникновение самоиндуцированного градиента давления происходят в точке $T^* = 247.72$, а для геометрических параметров ротора WR3 в точке $T^* = 221.5$. Заметим, что из линейной теории нельзя найти конкретную величину G . Известно только, что $G \neq 0$. Конкретные величины G при закритических числах T дает решение нелинейной задачи (13)–(18) или (25)–(34).

Экспериментальные результаты измерения градиента давления (фиг. 4) достаточно хорошо согласуются с результатами расчетов по (13)–(18) или (25)–(34). Некоторое отклонение экспериментальных точек от нуля в докритической области, скорее всего, объясняется наличием небольшой асимметрии в форме ротора на концах A и B . В экспериментах устойчивые стационарные асимметричные вихревые структуры реализуются до $T \approx 400$, после чего внутри них появляются мелкомасштабные нестационарные вихревые образования. Видимо, по этой причине в испытаниях с ротором WR5 градиент давления G несколько снижается по сравнению с расчетным при $T > 400$ (фиг. 4).

Как показали расчеты, бифуркация потери симметрии типична и существует в широком диапазоне параметров. В табл. 2 приведены основные результаты расчетов этой бифуркации и максимальной величины появившегося градиента давления для областей с различной геометрией. На фиг. 5 приведена бифуркационная диаграмма для варианта геометрии области WR03 (табл. 1).

Все приведенные на фиг. 1–5 примеры относились к случаю цилиндрического корпуса. Однако это совершенно не обязательное условие. Бифуркация потери симметрии возникает и в областях с обеими волнообразными поверхностями ротора и корпуса (2), если только они удовлетворяют общему принципу симметрии (20). Пример такого рода течения приведен в табл. 1 и 2 под обозначением WRB3.

В закритической области $T > T^*$ существуют три ветви решений – симметричная и две асимметричные. Но симметричная становится неустойчивой по известному свойству обмена устойчивости [1].

Критические числа T^* сильно зависят от геометрической формы области, в частности от среднего зазора $d = 1 - A_0$. Но если рассчитывать число Re следующим образом:

$$Re(d) = ReA_0(1 - A_0) \quad (49)$$

то критическое значение $Re^*(d)$ меняется сравнительно мало (табл. 2).

Из табл. 2 видно, что наибольшие величины градиента давления реализуются для узких зазоров между цилиндрами. Есть все основания предполагать, что асимметричные течения со значительным градиентом давления имеют место и в пределе тонкого зазора $d \rightarrow 0$ в некотором диапазоне $Re^*(d) \approx 450$.

Бифуркация потери симметрии и самоиндуцированный градиент давления – существенно нелинейные явления. Для возникновения исследуемой бифуркации необходимо присутствие в уравнениях движения инерционных сил Кориолиса и центробежной силы. Если удалить эти силы из системы (5), то из нее выделится независимая подсистема для компонент u , v , которая имеет только тривиальное решение. Оставшееся уравнение для w имеет нетривиальные решения, но без вихревых структур. Таким образом, в плоском течении Куэтта с волнообразными поверхностями невозможно получить двумерные стационарные периодические структуры.

Анализ показывает, что бифуркация потери симметрии и самоиндуцированный градиент давления не могут появиться в классическом стационарном течении Тейлора, где обе поверхности цилиндрические. В этом случае система (43)–(46) становится однородной и имеет только тривиальные решения. Физически этот факт тоже понятен – градиенту давления не за что “зацепиться”. Пока остается не выясненным вопрос о возможности появления в классическом течении Тейлора нестационарного градиента давления $G(t)$.

Еще одним видом течения несжимаемой жидкости, для которого было бы логично предположить существование такого рода бифуркации, является плоская конвекция Релея – Бенара с волнообразными поверхностями. Здесь в отличие от течения Куэтта температура (которая играет роль третьей компоненты скорости) присутствует в уравнениях импульса, но линейно. Скорее всего, поэтому в расчетах не удалось получить для данной задачи бифуркацию потери симметрии и самоиндуцированный градиент давления. Хотя при искусственном введении асимметрии в граничные условия для распределения температуры $T(x, 0) \neq T(-x, 0)$ появляется асимметричное течение и градиент давления $G \neq 0$.

Заключение. В модифицированном течении Тейлора с симметричной формой внутренней области могут существовать асимметричные стационарные периодические вихревые структуры, которые возникают из симметричных структур в результате бифуркации потери симметрии при определенном числе T^* .

Данная бифуркация – закритическая, обязательно сопровождается рождением продольного градиента давления G и происходит при таких значениях параметров, когда решение линейной системы для возмущений удовлетворяет условию нулевого расхода. Установлено, что в результате бифуркации рождается сразу два асимметричных решения с противоположными направлениями градиента давления. В закритической области $T > T^*$ остается и симметричная ветвь решений, но она становится неустойчивой.

Бифуркация потери симметрии и самоиндуцированный градиент давления – это существенно нелинейные явления. Для их возникновения необходимо присутствие в уравнениях движения жидкости инерционных кориолисовых и центробежных сил.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ди Прима Р. С., Суинни Х. Л.* Неустойчивости и переход в течении между концентрическими вращающимися цилиндрами. Гидродинамические неустойчивости и переход к турбулентности / Под ред. Х. Суинни, Дж. Голлаб. М.: Мир, 1984. С. 169–217.
2. *Rafique M., Skali-Lami S.* A study of steady state flow in modified Taylor-Couette system: Inner rotating wavy cylinder coaxial with a smooth stationary outer cylinder // 11th Intern. Couette-Taylor Workshop. Bremen, 1999. P. 105, 106.
3. *Stepless A. E., Smits A. J.* The Dynamics of Spatially Modulated Taylor-Couette Flow // Proc. 12th Intern. Couette-Taylor Workshop. USA, Evanston, 2001.
4. *Drozdov S.M.* A Numerical Investigation of a Modified Couette-Taylor Apparatus with Application to Industrial Mixing // Theoret. and Comput. Fluid Dynamics, 2002. V. 16. № 1. P. 17–28.
5. *Skali-Lami S., Drozdov S., Rafique M.* An asymmetrical periodic vortical structures and appearance of the self-induced pressure gradient in the modified Taylor flow // Proc. 13th Intern. Couette-Taylor Workshop. Barcelona, 2003. P. 18–21.
6. *Wereley S.T., Lueptow R.M.* Spatio-temporal character of non-wavy and wavy Taylor-Couette flow // J. Fluid Mech. 1998. V. 364. P. 59–80.

Москва

Поступила в редакцию
5.IX.2003