

УДК 532.516

© 2004 г. А. А. ЗАМЫШЛЯЕВ, Г. Р. ШРАГЕР

ОБТЕКАНИЕ СФЕРОИДОВ ПОТОКОМ ЖИДКОСТИ ПРИ УМЕРЕННЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

Рассмотрено осесимметричное обтекание сфероидов потоком вязкой жидкости. Для описания течения использованы полные уравнения Навье–Стокса, записанные для стационарного случая в сферической системе координат. Задача решена методом установления на основе схемы переменных направлений. Для построения регулярной расчетной сетки использовано преобразование исходной системы координат. В результате численного исследования получены картины течения при обтекании вытянутых и сплюснутых сфероидов для различных значений определяющих параметров. Представлены численные значения размеров циркуляционной зоны, а также коэффициента сопротивления для различных значений отношения полуосей сфероидов в области умеренных значений числа Рейнольдса.

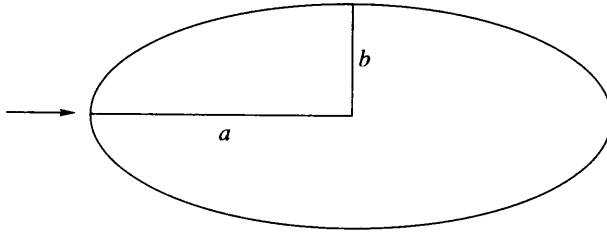
Ключевые слова: обтекание, сфероид, вязкая жидкость, коэффициент сопротивления.

Изучение течения дисперсных систем использует результаты анализа взаимодействия одиночных частиц с движущимся потоком. Большинство исследований в этом направлении ограничивается рассмотрением обтекания сферической частицы. Однако представляет интерес и изучение обтекания частиц, форма которых отлична от сферы, в частности для частиц сфероидальной формы. Работы, посвященные исследованию обтекания сфероидов, рассматривают течение при $Re \leq 1$ [1–4], либо при $Re \gg 1$.

В данном исследовании рассматривается обтекание частиц, имеющих форму вытянутого и сплюснутого сфероидов, потоком вязкой жидкости при умеренных числах Рейнольдса. Область умеренных чисел Рейнольдса определяется условно диапазоном $1 \leq Re \leq 100$, допускающим существование стационарного режима обтекания. Математическую основу описания рассматриваемого течения образуют полные уравнения Навье–Стокса совместно с уравнением неразрывности, записанные для стационарного осесимметричного случая в сферической системе координат. Сформулированная задача решается методом установления на основе конечно-разностной схемы переменных направлений с использованием специального преобразования исходной системы координат для цели построения регулярной расчетной сетки. Разработанный алгоритм расчета тестируется на известных аналитических и экспериментальных результатах для обтекания твердой сферы и аналитических решений для обтекания сплюснутых и вытянутых сфероидов, полученных в приближении Стокса. В работе анализируется картина течения при обтекании сфероидов и находятся значения коэффициентов сопротивления в зависимости от величины определяющих параметров.

1. Постановка задачи. Рассматривается стационарное обтекание твердой частицы в форме вытянутого и сплюснутого сфероидов в бесконечном пространстве, заполненном движущейся вязкой несжимаемой жидкостью в предположении, что течение имеет осевую симметрию (фиг. 1).

Стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости описывается уравнениями Навье–Стокса совместно с уравнением неразрывности. В сферической системе коор-



Фиг. 1. Схема обтекания

динат, центр которой расположен в центре сфероида, в безразмерных переменных эти уравнения запишутся в виде

$$\begin{aligned} v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta \partial v_r}{r \partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} = \\ = -\frac{\partial p}{\partial r} + \text{Re} \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{2 \partial v_r}{r \partial r} + \frac{\text{ctg} \theta \partial v_r}{r^2 \partial \theta} - \frac{2 \partial v_\theta}{r^2 \partial \theta} - \frac{2}{r^2} v_r - \frac{2 \text{ctg} \theta}{r^2} v_\theta \right) \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta \partial v_\theta}{r \partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} = \\ = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \text{Re} \left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2 \partial v_\theta}{r \partial r} + \frac{\text{ctg} \theta \partial v_\theta}{r^2 \partial \theta} + \frac{2 \partial v_r}{r^2 \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{v_\theta}{\sin^2 \theta} \right) \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r} v_r + \frac{\text{ctg} \theta}{r} v_\theta = 0 \quad (1.3)$$

Здесь v_r , v_θ – проекции вектора скорости на направления r , θ соответственно; p – давление; $\text{Re} = 2UR\rho/\mu$ – число Рейнольдса, где U – скорость набегающего потока; R – экваториальный радиус сфероида.

На границе сфероида выполняется условие прилипания

$$v_r = 0, \quad v_\theta = 0, \quad r = \delta(\theta) \quad (1.4)$$

где $\delta(\theta)$ – функция, описывающая границу эллипсоида.

Условия на бесконечности есть

$$v_r = \cos \theta, \quad v_\theta = -\sin \theta, \quad r \rightarrow \infty \quad (1.5)$$

На оси симметрии используются условия симметрии

$$\frac{\partial v_r}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0, \quad v_\theta = 0, \quad \theta = \theta; \pi \quad (1.6)$$

Вместо уравнения неразрывности (1.3) используется уравнение Пуассона для давления, полученное из уравнений (1.1), (1.2) с применением (1.3)

$$\begin{aligned} \nabla^2 p = \frac{2}{r} \left(\frac{\partial v_r \partial v_\theta}{\partial r \partial \theta} - \frac{\partial v_r \partial v_\theta}{\partial \theta \partial r} \right) + \frac{v_\theta}{r} \left(\frac{v_\theta}{r} - \frac{v_\theta}{r \sin^2 \theta} + 2 \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta \text{ctg}^2 \theta}{r} \right) - \\ - \frac{2 v_r}{r} \left(\frac{v_r}{r} - \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{2 v_\theta \text{ctg} \theta}{r} \right) \end{aligned} \quad (1.7)$$

Для эквивалентности решения системы (1.1), (1.2), (1.7) при заданных граничных условиях решению системы (1.1)-(1.3) необходимо потребовать дополнительно выполнение уравнения (1.3) на границах области [5].

2. Метод расчета. Для получения решения рассматриваемой стационарной задачи используется метод установления с применением конечно-разностной схемы переменных направлений. Для построения регулярной расчетной сетки в конечной области используется преобразование исходной системы координат

$$\theta = \theta, \quad \eta = r \left[\frac{K}{R} - \left(\frac{K}{R} - \frac{1}{\delta} \right) \frac{R-r}{R-\delta(\theta)} \right] \quad (2.1)$$

где K, R – некоторые постоянные.

Выбранное преобразование позволяет использовать внешнюю границу, помещенную на достаточном расстоянии от сфероида, в виде шаровой поверхности, что, в свою очередь, обеспечивает приблизительную равноудаленность точек поверхности сфероида от внешней границы. Исходные уравнения (1.1), (1.2), (1.7) в новой системе координат принимают вид

$$v_r \frac{\partial v_r}{\partial \eta} \eta'_r + \frac{v_\theta}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \eta} \eta'_\theta + \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) - \frac{v_\theta^2}{r} = - \frac{\partial p}{\partial \eta} \eta'_r + \frac{2}{\text{Re}} \left[\frac{\partial^2 v_r}{\partial \eta^2} A + \frac{\partial v_r}{\partial \eta} B + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + 2 \frac{\partial^2 v_r}{\partial \eta \partial \theta} \eta'_\theta \right) \right] + \frac{\text{ctg} \theta \partial v_r}{r^2 \partial \theta} - \frac{2}{r^2} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial \eta} \eta'_\theta \right) - \frac{2}{r^2} v_r - \frac{2 \text{ctg} \theta}{r^2} v_\theta \quad (2.2)$$

$$v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial \eta} \eta'_r + \frac{v_\theta}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \eta} \eta'_\theta + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{v_r v_\theta}{r} = - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{\partial p}{\partial \eta} \eta'_\theta \right) + \frac{2}{\text{Re}} \left[\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \eta^2} A + \frac{\partial v_\theta}{\partial \eta} B + \frac{1}{r^2} \left(2 \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \eta \partial \theta} \eta'_\theta + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} \right) \right] + \frac{\text{ctg} \theta \partial v_\theta}{r^2 \partial \theta} + \frac{2}{r^2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \eta} \eta'_\theta + \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{v_\theta}{\sin^2 \theta} \quad (2.3)$$

$$\nabla^2 p = \frac{2}{r} \eta'_\theta \left(\frac{\partial v_r}{\partial \eta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \eta} \right) + \frac{v_\theta}{r} \left(\frac{v_\theta}{r} - \frac{v_\theta}{r \sin^2 \theta} + 2 \frac{\partial v_\theta}{\partial \eta} \eta'_r - \frac{v_\theta \text{ctg}^2 \theta}{r} \right) - \frac{2 v_r}{r} \left(\frac{v_r}{r} - \frac{\partial v_r}{\partial \eta} \eta'_r + \frac{2 v_\theta \text{ctg} \theta}{r} \right) \quad (2.4)$$

Уравнение неразрывности в новых координатах записывается в форме

$$\frac{\partial v_r}{\partial \eta} \eta'_r + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \eta} \eta'_\theta + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{2}{r} v_r + \frac{\text{ctg} \theta}{r} v_\theta = 0 \quad (2.5)$$

$$A = \left[(\eta'_r)^2 + \frac{1}{r^2} (\eta'_\theta)^2 \right]; \quad \eta'_r = \frac{K}{R} - \left(\frac{K}{R} - \frac{1}{\delta} \right) \frac{R-2r}{R-\delta}$$

$$B = \left[\eta''_{rr} + \frac{1}{r^2} \eta''_{\theta\theta} + \frac{2}{r} \eta'_r + \frac{\text{ctg} \theta}{r^2} \eta'_\theta \right]; \quad \eta''_{rr} = \left(\frac{K}{R} - \frac{1}{\delta} \right) \frac{2}{R-\delta}$$

$$\eta'_{\theta} = \left[-\left(\frac{K}{R} - \frac{1}{\delta}\right) \frac{rR - r^2}{(R - \delta)^2} - \frac{rR - r^2}{(R - \delta)\delta^2} \right] \delta'_{\theta}$$

$$\eta''_{\theta\theta} = \left[-\left(\frac{K}{R} - \frac{1}{\delta}\right) \frac{2(rR - r^2)}{(R - \delta)^3} - \frac{rR - r^2}{(R - \delta)^2\delta^2} + \frac{2(rR - r^2)}{(R - \delta)\delta^3} \right] \delta_{\theta}^2$$

$$\delta'_{\theta} = \frac{ac(a^2 - c^2)}{2(c^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta)^{3/2}}, \quad r = \frac{1}{2} \left\{ P_1 + \sqrt{P_1^2 + 4\eta D(R - \delta)} \right\} D^{-1}, \quad P_1 = \frac{\delta K}{R} - \frac{R}{\delta},$$

$$D = \frac{K}{R} - \frac{1}{\delta}$$

Граничные условия (1.4), (1.5) в новых координатах есть

$$v_r = 0, \quad v_{\theta} = 0, \quad \eta = 1 \quad (2.6)$$

$$v_r = \cos \theta, \quad v_{\theta} = -\sin \theta, \quad \eta \rightarrow \infty \quad (2.7)$$

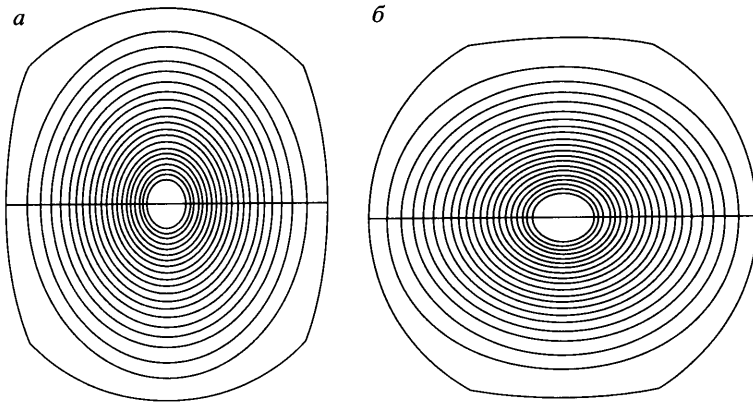
Условия симметрии переписутся как

$$\frac{\partial v_r}{\partial \eta} \eta'_{\theta} + \frac{\partial v_r}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \eta} \eta'_{\theta} + \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0, \quad v_{\theta} = 0, \quad \theta = 0; \quad \pi \quad (2.8)$$

В соответствии с методом установления в уравнения (2.2)–(2.4) добавляется производная по времени, и для полученной системы записываются разностные аналоги с использованием схемы переменных направлений [6]. Выбранная разностная схема аппроксимирует исходную систему дифференциальных уравнений на каждом полушаге и не требует дополнительного расщепления граничных условий. Для аппроксимации конвективных членов используются разности против потока. Полученные разностные уравнения решаются методом прогонки [7]. Начальные значения прогоночных коэффициентов для решения разностных уравнений, аппроксимирующих уравнения (2.2), (2.3), находятся из разностных аналогов граничных условий (2.6)–(2.8). Граничные значения давления на поверхности сфероида и на внешней границе находятся из разностных аналогов проекций уравнения движения на нормальное направление к границе, записанных в преобразованной системе координат с учетом разностного аналога уравнения неразрывности (2.5) и соответствующих граничных условий для проекций вектора скорости. Описанный алгоритм расчета используется для получения установившегося решения с выбранным критерием сходимости. Дополнительно следует отметить некоторые особенности выбранного преобразования координат (2.1). Анализ показывает, что при $K > R$ сгущение сетки происходит в окрестности внешней границы, а при $K < R$ – поверхности сфероида. Кроме того, при $K < R$ возможны такие значения K и R , что в случае вытянутого сфероида происходит деформация внешней границы в окрестности экваториальной плоскости (фиг. 2, а), а для сплюснутого сфероида в окрестности меридиональной плоскости (фиг. 2, б), что приводит к снижению точности расчетов.

Представленные особенности преобразования необходимо учитывать при выборе значений K и R .

3. Результаты расчетов. Проведение расчетов для проверки аппроксимационной сходимости и влияния удаления внешней границы от границы сфероида показывает,



Фиг. 2. Распределения линий постоянного значения η в плоскости (r, θ)

что при значениях Re , $a' = a/b$, $b' = b/a$ в рассматриваемом диапазоне достаточно выбрать значения $R = K = 8$ и сетку 211×101 .

Для тестирования разработанного алгоритма расчета были проведены сравнения с известными аналитическими и экспериментальными результатами. В частности, расчет обтекания сферической частицы при $Re = 0.01$ дает значение коэффициента сопротивления, отличающееся от значения, вычисленного по формуле Стокса, на 1%. Кроме того, были проведены расчеты обтекания сферической частицы при умеренных значениях числа Re и сравнение результатов расчетов для коэффициентов сопротивления с результатами эмпирической формулы Клячко

$$C_D = \frac{24}{Re} [1 + 0.167 \cdot Re^{0.67}] \tag{3.1}$$

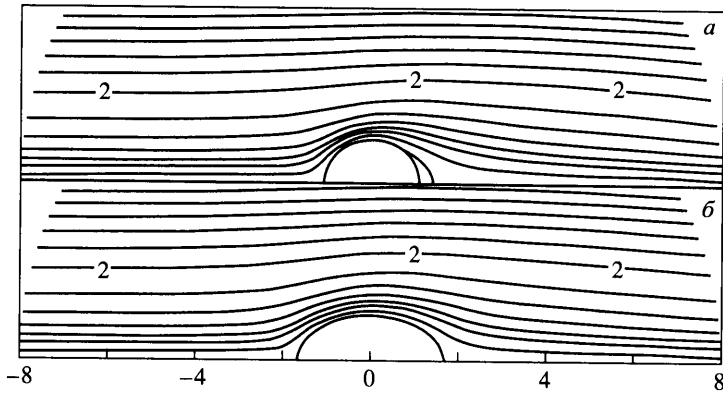
Таблица 1 показывает удовлетворительное согласование результатов расчетов с формулой Клячко.

Для обтекания сплюснутых и вытянутых сфероидов при $Re \ll 1$ было также проведено сравнение результатов расчетов при $Re = 0.01$ и имеющегося аналитического решения в приближении Стокса [4] по значениям коэффициента сопротивления. В табл. 2 даны результаты этого сравнения. Из таблицы видно, что здесь также наблюдается удовлетворительное согласование.

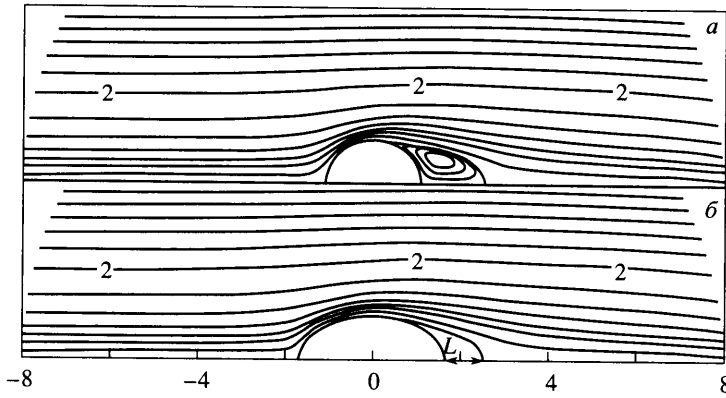
Фигуры 3, 4 иллюстрируют картины течения при обтекании вытянутых сфероидов. Из представленных результатов при $Re = 30$ видно, что при уменьшении отношения b' происходит сокращение размеров и дальнейшее исчезновение циркуляционной

Таблица 1

Re	C_D	$C_D(3.1)$	Различие, %	Re	C_D	$C_D(3.1)$	Различие, %
10	4.16	4.27	2.64	60	1.39	1.43	2.88
20	2.62	2.69	2.67	70	1.28	1.32	3.12
30	2.08	2.10	0.96	80	1.19	1.24	4.2
40	1.75	1.79	2.29	90	1.12	1.17	4.46
50	1.55	1.58	1.94	100	1.06	1.11	3.77



Фиг. 3. Линии тока обтекания вытянутого сфероида при $Re = 30$: $a - b' = 0.9$; $b - b' = 0.6$



Фиг. 4. Линии тока обтекания вытянутого сфероида при $Re = 100$: $a - b' = 0.9$; $b - b' = 0.6$

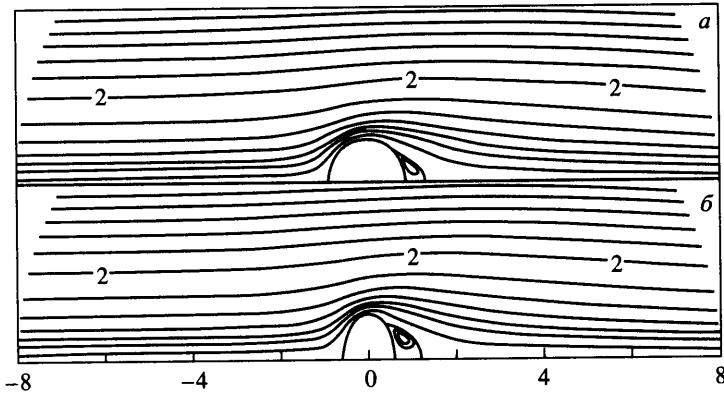
зоны. Результаты для $Re = 100$ также демонстрируют уменьшение размеров циркуляционной зоны с соответствующим изменением отношения полуосей эллипса в сечении сфероида.

Фигуры 5, 6 показывают структуру течений при обтекании сплюснутых сфероидов. Представленные результаты демонстрируют увеличение размеров циркуляционной зоны с ростом Re и уменьшением параметра a' .

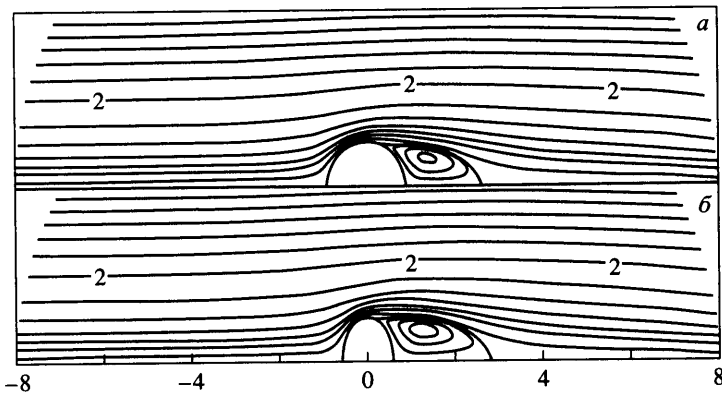
Выберем в качестве размера циркуляционной зоны величину L , показанную на фиг. 4, б. В табл. 3 даны результаты расчетов размера циркуляционной зоны L в зависимости от числа Re и отношения полуосей a' , b' .

Таблица 2

a'	C_D , аналит.	C_D , расчет	Различие, %	b'	C_D , аналит.	C_D , расчет	Различие, %
0.9	2352	2311	1.75	0.9	2454	2481	1.12
0.8	2305	2237	2.99	0.8	2521	2578	2.23



Фиг. 5. Линии тока обтекания сплюснутого сфероида при $Re = 30$: $a - a' = 0.9$; $b - a' = 0.6$



Фиг. 6. Линии тока обтекания сплюснутого сфероида при $Re = 100$: $a - a' = 0.9$; $b - a' = 0.6$

Одним из основных параметров обтекания частицы потоком жидкости является величина, характеризующая силовое взаимодействие частицы с потоком. Эта величина определяется коэффициентом сопротивления частицы в потоке жидкости. В табл. 4 представлены значения коэффициента сопротивления C_D при обтекании сплюснутых и вытянутых сфероидов для различных значений a' , b' и числа Re .

Характер изменения величины коэффициента сопротивления C_D определяется уменьшением (увеличением) площади поверхности сплюснутого (вытянутого) сфероида при соответствующем изменении a' (b') при одинаковом радиусе экваториального сечения R , а также структурой течения, получаемой при заданных отношениях a' , b' и значении Re .

Заключение. Результаты проведенного численного исследования обтекания сферической частицы потоком вязкой жидкости при умеренных числах Рейнольдса показали, что картина течения и силовое взаимодействие частицы с потоком зависят от определяющих параметров процесса. Начиная с некоторого значения числа Re , структура течения характеризуется наличием циркуляционной зоны в кормовой части потока. При одинаковых значениях числа Re , экваториального радиуса и отношения полюсей размеры циркуляционной зоны при обтекании сплюснутого сфероида

Таблица 3

Re	L						
	$a' = 1$	$a' = 0.9$	$a' = 0.8$	$a' = 0.6$	$b' = 0.9$	$b' = 0.8$	$b' = 0.6$
10	Нет	Нет	Нет	0.15	Нет	Нет	Нет
20	Нет	0.21	0.3	0.42	Нет	Нет	Нет
30	0.41	0.5	0.59	0.67	0.35	0.28	Нет
40	0.70	0.75	0.8	1.04	0.55	0.49	0.24
50	0.95	1.01	1.11	1.36	0.8	0.68	0.4
60	1	1.1	1.2	1.56	0.9	0.83	0.48
70	1.2	1.3	1.4	1.76	1.1	0.96	0.6
80	1.25	1.41	1.62	1.92	1.2	1.12	0.69
90	1.4	1.51	1.75	2.08	1.35	1.2	0.76
100	1.55	1.75	1.9	2.24	1.5	1.32	0.88

Таблица 4

Re	C_D			
	$a' = 0.9$	$a' = 0.8$	$b' = 0.9$	$b' = 0.8$
10	3.97	3.42	4.56	5.29
20	2.42	2.16	2.87	3.18
30	1.91	1.7	2.26	2.45
40	1.63	1.46	1.93	2.08
50	1.46	1.3	1.72	1.84
60	1.33	1.19	1.56	1.68
70	1.23	1.11	1.45	1.54
80	1.16	1.05	1.35	1.44
90	1.12	0.99	1.28	1.36
100	1.04	0.95	1.22	1.29

значительно больше, чем в случае вытянутого сфероида. При прочих равных условиях коэффициент сопротивления падает с уменьшением a' для сплюснутого сфероида и растет для вытянутого сфероида, если b' уменьшается.

Работа выполнена при финансовой поддержке CRDF (ТО-016-02).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Payne L.E., Pell W.H. The Stokes flow problem for a class of axially symmetric bodies // J. Fluid Mech. 1960. V. 7. Pt 4. P. 529–549.
2. Breach D.R. Slow flow past ellipsoids of revolution // J. Fluid Mech. 1961. V. 10. Pt. 2. P. 306–314.

3. *Alassar R.S., Badr H.M.* Steady flow past of oblate spheroid at small Reynolds numbers // J. Eng. Math. 1999. V. 36. № 3. P. 277–287.
4. *Ханпель Дж., Бреннер Т.* Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976. 630с.
5. *Шрагер Г.Р., Козлобродов А.Н., Якутенок В.А.* Моделирование гидродинамических процессов в технологии переработки полимерных материалов. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1999. 229 с.
6. *Яненко Н. Н.* Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967. 195 с.
7. *Годунов С.К., Рябенький В.С.* Разностные схемы. М.: Наука, 1977. 439 с.

Томск

Поступила в редакцию
14.VII.2003