

УДК 532.5.031:533.6.011.32:533.694.2

© 2004 г. Д. Ф. АБЗАЛИЛОВ, П. А. ВОЛКОВ, Н. Б. ИЛЬИНСКИЙ

**РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ АЭРОГИДРОДИНАМИКИ
ДЛЯ ДВУХЭЛЕМЕНТНОГО КРЫЛОВОГО ПРОФИЛЯ**

Дано численно-аналитическое решение основной обратной краевой задачи аэрогидродинамики для двухэлементного крылового профиля в полной постановке, т.е. задачи построения крыловых профилей биплана, профиля с закрылком или предкрылком по заданному на искомым контурах профилей распределению скорости или давления как функции дуговой абсциссы этих контуров, зависящей от конечного числа параметров.

Ключевые слова: идеальная несжимаемая жидкость, обратная краевая задача аэрогидродинамики, двухэлементный крыловой профиль.

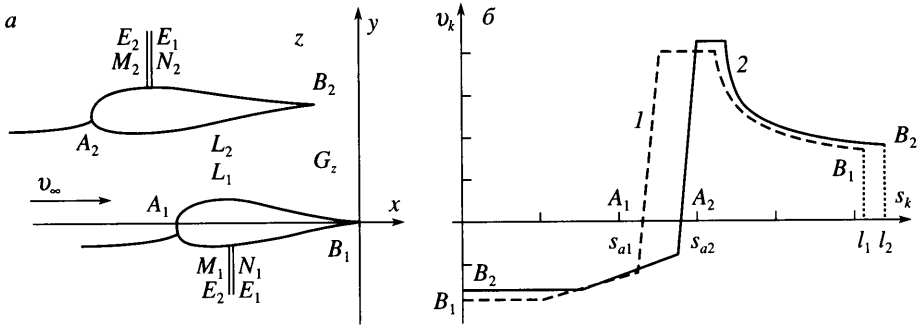
Вопрос об аэродинамическом расчете двухэлементных крыловых профилей всегда привлекал внимание исследователей. С использованием математической модели идеальной несжимаемой жидкости эта задача сводится к решению прямой краевой задачи для двухсвязной области. Обратные задачи, в которых форма профилей заранее не задается, а отыскивается по заданным аэродинамическим характеристикам, появились позднее. В одном из первых исследований [1], в котором на искомым профилях биплана задавалось распределение скорости, области течения ставилась в соответствие внешность двух дуг единичной окружности во вспомогательной плоскости. Задача Дирихле решалась путем сведения к двум задачам Римана. В [2] предложен несколько иной путь решения, а именно: в качестве вспомогательной области выбирался прямоугольник. Функция Мичела – Жуковского восстанавливалась по формуле Вилля. Однако вопрос о способах выполнения условий разрешимости задачи в [1, 2] остался открытым.

В [3] решена задача построения решеток бипланов по методу годографа скорости. Комплексный потенциал искомого течения в физической плоскости находился как аналитическая функция комплексной скорости в заданной области годографа скорости. Замкнутость профилей обеспечивалась вариацией исходного годографа скорости и свободных параметров.

В [4] для выполнения условий разрешимости обратной краевой задачи аэрогидродинамики применен способ квазирешения некорректных задач математической физики. Однако, учитывая, что этот способ разработан лишь для односвязных областей, один из профилей, в частности закрылок, заменялся системой вихрей. В результате подобного предположения решение задачи удалось получить лишь в случае, когда размеры одного профиля малы по сравнению с размерами основного профиля.

В [5] предложен метод решения, основанный на интегральных соотношениях для функции Мичела – Жуковского в кольце. Решение задачи сведено к быстрому преобразованию Фурье. Выполнение условий разрешимости достигалось вариацией коэффициентов ряда Фурье. В [6] описан численный метод проектирования многоэлементных крыловых профилей.

В настоящей работе дается численно-аналитическое решение обратной задачи для двухэлементного профиля по заданным на искомым контурах профилей распределениям скорости или давления как функций дуговой абсциссы этих контуров. Выполне-



Фиг. 1. Физическая плоскость (а) и распределения скорости (б) по контурам двух-элементного профиля: 1 – по контуру L_1 ; 2 – L_2

ние условий разрешимости достигается за счет введения в исходные распределения скорости свободных параметров. В числовых расчетах исходные распределения скорости берутся из класса гидродинамически целесообразных распределений (см., например, [3, 4]), что обеспечивает безотрывное обтекание профилей в рамках принятой схемы плавного обтекания.

1. Постановка задачи. В физической плоскости z (фиг. 1,а) искомые непроницаемые крыловые профили $A_k B_k$ ($k = 1, 2$) обтекаются установившимся безвихревым потоком идеальной несжимаемой жидкости; контуры L_k профилей считаются гладкими, за исключением задних кромок B_k , где внутренний к области течения угол равен 2π .

Начало декартовой системы координат выбрано в задней кромке B_1 профиля L_1 , а ось абсцисс параллельна направлению заданного вектора скорости v_∞ набегающего потока. Периметры профилей известны и равны l_k . Дуговые абсциссы s_k контуров профилей отсчитываются от 0 в точках B_k до l_k в них же так, что при возрастании s_k область течения остается слева. Распределение скорости по профилям L_k в параметрическом виде есть

$$v_k = v_k(s_k, d_j), \quad s_k \in [0, l_k], \quad k = 1, 2, \quad j = 1, \dots, m \tag{1.1}$$

где d_j ($j = 1, \dots, m$) – свободные параметры. В дальнейшем в записи функции v_k свободные параметры d_j будем опускать. На фиг. 1,б распределение $v_1(s_1)$ изображено кривой 1, а $v_2(s_2)$ – кривой 2. Функции $v_k(s_k)$ – кусочно-гладкие, обращающиеся в нуль в точках A_k разветвления потока s_{ak} и в них непрерывно дифференцируемые. Знак v_k связан с направлением обхода, поэтому $v_k(s_k) < 0$ при $s_k \in [0, s_{ak}]$, $v_k(s_k) > 0$ при $s_k \in (s_{ak}, l_k]$.

Введем в рассмотрение комплексный потенциал течения $w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$, где $z = x + iy$. Считаем, что известны расход q между профилями и разность потенциалов φ_* между точками A_2 и A_1 . Положив $w(z)$ равным нулю в точке A_1 , будем иметь

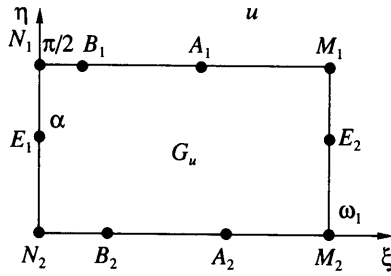
$$\varphi(s_{a1}) = 0, \quad \psi(s_{a1}) = 0, \quad \varphi(s_{a2}) = \varphi_*, \quad \psi(s_{a2}) = q$$

Значения $\varphi_k = \varphi(s_k)$ вдоль профилей определяются формулами

$$\varphi_1(s_1) = \int_{s_{a1}}^{s_1} v_1(s) ds, \quad s_1 \in [0, l_1], \quad \varphi_2(s_2) = \varphi_* + \int_{s_{a2}}^{s_2} v_2(s) ds, \quad s_2 \in [0, l_2]$$

Циркуляции скорости Γ_k по каждому контуру L_k равны $\varphi_k(l_k) - \varphi_k(0)$.

Требуется найти форму профилей и их аэродинамические характеристики.



Фиг. 2. Вспомогательная область

2. Решение. Двухсвязную область G_z в плоскости z можно конформно отобразить на кольцо, ограниченное двумя concentric circles with center at the origin and radii $R_1 = 1$, $R_2 = r > 1$. Для единственности отображения потребуем, чтобы внутренней окружности соответствовал контур L_1 , а бесконечно удаленная точка в плоскости z переходила в некоторую точку E на положительной части действительной оси. Кольцо с разрезом вдоль положительного отрезка оси конформно отображается на прямоугольник G_u в плоскости $u = \xi + i\eta$ со сторонами ω_1 и $\omega_2 = i\pi/2$. При этом контур L_1 в плоскости u соответствует сторона N_1M_1 прямоугольника G_u , а контур L_2 – сторона N_2M_2 (фиг. 2), точка E переходит в точку $u = i\alpha$ на мнимой оси.

Согласно решению прямой задачи о биплане [7], можно записать

$$w(u) = \varphi(\xi, \eta) + i\psi(\xi, \eta) = K\zeta(u - i\alpha) + \bar{K}\zeta(u + i\alpha) + \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2\pi i} \ln \frac{\sigma(u - i\alpha)}{\sigma(u + i\alpha)} + \frac{u}{\omega_1} \left(-\Gamma_1 + (\Gamma_1 + \Gamma_2) \frac{\alpha\eta_1}{\pi} - (K + \bar{K})\eta_1 \right) + C$$

$$\frac{dw}{du}(u) \equiv \Omega(u) = -K\lambda(u - i\alpha) - \bar{K}\lambda(u + i\alpha) + \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2\pi i} [\zeta(u - i\alpha) - \zeta(u + i\alpha)] + \frac{1}{\omega_1} \left[-\Gamma_1 + (\Gamma_1 + \Gamma_2) \frac{\alpha\eta_1}{\pi} - (K + \bar{K})\eta_1 \right]$$

$$\varphi_1(\xi_1) = \varphi(\xi_1, \pi/2), \quad \psi_1(\xi_1) = \psi(\xi_1, \pi/2)$$

$$\varphi_2(\xi_2) = \varphi(\xi_2, 0), \quad \psi_2(\xi_2) = \psi(\xi_2, 0), \quad \xi_1, \xi_2 \in [0, \omega_1]$$

где $K = K_1 + iK_2$, $C = C_1 + iC_2$, α – неизвестные постоянные; $\lambda(u)$, $\zeta(u)$, $\sigma(u)$ – функции Вейерштрасса с полупериодами $\pi i/2$ и $\omega_1/2$; $\eta_1 = \zeta(u + \omega_1) - \zeta(u)$ – константа, зависящая от ω_1 .

Приняв $u_1 = \xi_1 + \pi i/2$ и $u_2 = \xi_2$ на границах N_1M_1 и N_2M_2 прямоугольника G_u , получим систему из десяти нелинейных алгебраических уравнений для определения десяти параметров: $u_{a1} = \xi_{a1} + \pi i/2$, $u_{a2} = \xi_{a2}$, $u_{b1} = \xi_{b1} + \pi i/2$, $u_{b2} = \xi_{b2}$, C_1 , C_2 , K_1 , K_2 , α и ω_1

$$\Omega(u_{a1}) = 0, \quad \Omega(u_{a2}) = 0, \quad \Omega(u_{b1}) = 0, \quad \Omega(u_{b2}) = 0$$

$$\varphi_1(\xi_{a1}) = 0, \quad \psi_1(\xi_{a1}) = 0, \quad \varphi_2(\xi_{a2}) = \varphi_*, \quad \psi_2(\xi_{a2}) = q$$

$$\varphi_2(\xi_{b2}) = \varphi_* + \varphi_{b2}, \quad \varphi_1(\xi_{b1}) = \varphi_{b1} + \Gamma_1$$

(2.1)

Систему (2.1) сведем к четырем уравнениям относительно K_1, K_2, α и ω_1

$$\varphi_1(\xi_{b1}) = \varphi_{b1} + \Gamma_1, \quad \varphi_2(\xi_{b2}) = \varphi_* + \varphi_{b2}, \quad \varphi_2(\xi_{a2}) = \varphi_*, \quad \Psi_2(\xi_{a2}) = q$$

определив которые, найдем функции $\varphi_k(\xi_k)$ на отрезках $N_k M_k$. Так как значения потенциалов скорости в первоначальном и преобразованном потоках, взятых в соответствующих друг другу точках, совпадают, а функции $\varphi_k(\xi_k)$ и $\varphi_k(s_k)$ непрерывны, то устанавливается связь $s_k = s_k(\xi_k)$ между точками контуров L_k и отрезков $N_k M_k$ прямоугольника G_u . Функция Мичела – Жуковского $\chi(u) = \ln(v_\infty^{-1} dw/dz) = \ln|v/v_\infty| - i\theta$, где θ – аргумент вектора скорости, имеет логарифмические особенности в точках A_k обращения скорости v в нуль. Поэтому $\chi(u)$ ищется в виде

$$\chi(u) = \chi^*(u) + \chi_0(u), \quad \chi_0(u) = \ln \left[\sin \frac{\pi(u - u_{a1})}{\omega_1} \sin \frac{\pi(u - u_{a2})}{\omega_1} \right]$$

где $\chi_0(u)$ – периодическая в плоскости u и имеет такой же характер поведения в точках A_k , что и функция $\chi(u)$.

Рассмотрим аналитическую функцию $\chi^*(u) = S^*(\xi, \eta) - i\theta^*(\xi, \eta)$, действительная часть которой на границах прямоугольника G_u известна:

$$S_1(\xi_1) = \ln|v_1(s_1(\xi_1))| - \ln \left| \sin \frac{\pi(\xi_1 - \xi_{a1})}{\omega_1} \sin \frac{\pi(\xi_1 - \xi_{a2} + 1/2\pi i)}{\omega_1} \right|$$

$$S_2(\xi_2) = \ln|v_2(s_2(\xi_2))| - \ln \left| \sin \frac{\pi(\xi_2 - \xi_{a2})}{\omega_1} \sin \frac{\pi(\xi_2 - \xi_{a1} - 1/2\pi i)}{\omega_1} \right|$$

где $S_1(\xi_1) = S^*(\xi_1, \pi i/2)$, $S_2(\xi_2) = S^*(\xi_2, 0)$.

Функцию χ^* можно восстановить по формуле Вилля (см., например, [8])

$$\chi^*(u) = \frac{1}{\pi i} \int_0^{\omega_1} \left[S_1(\xi) \zeta \left(u - \xi - \frac{1}{2} \pi i \right) - S_2(\xi) \zeta(u - \xi) \right] d\xi + \frac{\eta_1 - 2}{2\omega_1} P_1 + iP_2 \quad (2.2)$$

где P_2 – произвольная вещественная постоянная, а для P_1 имеем

$$P_1 = \int_0^{\omega_1} S_1(\xi) d\xi = \int_0^{\omega_1} S_2(\xi) d\xi \quad (2.3)$$

Последнее условие является условием однозначности функции χ^* , зная которую, запишем

$$\frac{dz}{du} = \frac{\Omega(u)}{dw/dz} = \frac{\Omega(u)}{v_\infty} \exp[-\chi(u)] = \frac{\Omega(u)}{v_\infty} \exp[-\chi^*(u) - \chi_0(u)]$$

Проинтегрировав действительную и мнимую части функции dz/du , найдем координаты искомых профилей

$$z_1(\xi_1) = z_{01} + \int_{\xi_{b1}}^{\xi_1} \frac{\exp[-\chi^*(\xi + 1/2\pi i)] \Omega(\xi + 1/2\pi i)}{\sin[\pi(\xi - \xi_{a1})\omega_1^{-1}] \sin[\pi(\xi - \xi_{a2} + 1/2\pi i)\omega_1^{-1}]} d\xi$$

$$z_2(\xi_2) = z_{02} + \int_{\xi_{b2}}^{\xi_2} \frac{\exp[-\chi^*(\xi)] \Omega(\xi)}{\sin[\pi(\xi - \xi_{a1} - 1/2\pi i)\omega_1^{-1}] \sin[\pi(\xi - \xi_{a2})\omega_1^{-1}]} d\xi$$

$$z_{01} = x_{01} + iy_{01} = 0, \quad z_{02} = x_{02} + iy_{02} = \int_{u_{b1}}^{u_{b2}} \frac{dz}{du} du, \quad \xi_1, \xi_2 \in [0, \omega_1]$$

3. Условия разрешимости. Под условиями разрешимости обратной краевой задачи аэрогидродинамики понимают условия замкнутости искомых контуров крыловых профилей и условие совпадения заданной скорости v_∞ с определяемой в процессе решения. В случае двухэлементного крылового профиля к этим условиям надо добавить еще и условие (2.3). Условия замкнутости эквивалентны требованию однозначности функций $z_k = z_k(\xi_k)$, что записывается так:

$$\int_0^{\omega_1} \frac{dz}{du} \left(\xi + \frac{1}{2} \pi i \right) d\xi = 0, \quad \int_0^{\omega_1} \frac{dz}{du}(\xi) d\xi = 0 \quad (3.1)$$

С учетом факта $dw/dz|_{z \rightarrow \infty} = v_\infty$ получим

$$\operatorname{Im} \chi^*(i\alpha) = 0, \quad \operatorname{Re} \chi(i\alpha) = 0 \quad (3.2)$$

Первое из условий (3.2) служит для определения неизвестной P_2 , а второе есть еще одно условие разрешимости.

Таким образом, для разрешимости задачи необходимо выполнение условий (2.3), (3.1) и второго из (3.2). Для этого воспользуемся введенными в распределения скорости (1.1) свободными параметрами. Часть из них будем определять из условий разрешимости задачи, а за счет других – обеспечивать нужное поведение скорости, выбирая его из класса гидродинамически целесообразных.

4. Расчет аэродинамических характеристик. Аэродинамические силы находятся по формуле Чаплыгина

$$\bar{R}_k = X_k - iY_k = \frac{i\rho}{2} \oint_{L_k} \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 dz$$

где X_k, Y_k – проекции на оси координат результирующих сил $R_k = X_k + iY_k$, действующих на профили. Перейдя в плоскость u , получим

$$\bar{R}_1 = -\frac{i\rho}{2} \int_0^{\omega_1} \Omega \left(\xi + \frac{1}{2} \pi i \right) \exp \left[\chi^* \left(\xi + \frac{1}{2} \pi i \right) \right] \sin \frac{\pi(\xi - \xi_{a1})}{\omega_1} \sin \frac{\pi(\xi - \xi_{a2} + 1/2\pi i)}{\omega_1} d\xi$$

$$\bar{R}_2 = \frac{i\rho}{2} \int_0^{\omega_1} \Omega(\xi) \exp[\chi^*(\xi)] \sin \frac{\pi(\xi - \xi_{a1} - 1/2\pi i)}{\omega_1} \sin \frac{\pi(\xi - \xi_{a2})}{\omega_1} d\xi$$

Для результирующей силы, действующей на систему профилей, имеют место формулы

$$X = X_1 + X_2 = 0, \quad Y = Y_1 + Y_2 = \rho v_\infty (\Gamma_1 + \Gamma_2)$$

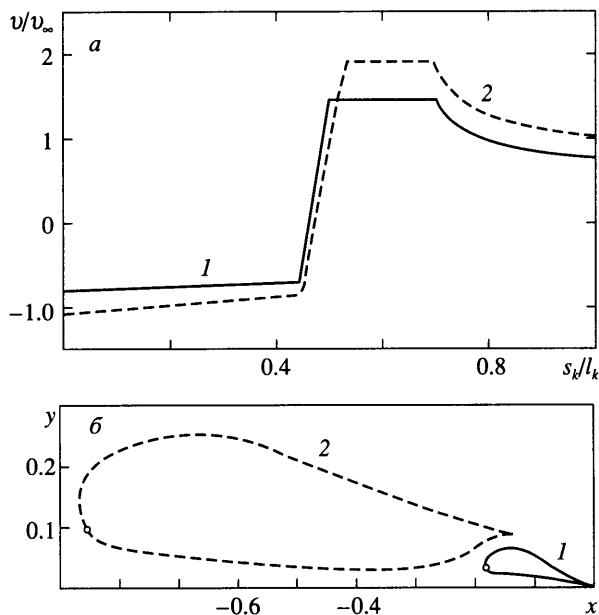
Сила сопротивления X равна нулю (парадокс Даламбера), в то время как ее составляющие X_1 и X_2 отличны от нуля, но противоположны по знаку.

При вычислении сил удобно пользоваться безразмерными коэффициентами

$$C_{xk} = \frac{2X_k}{\rho v_\infty^2 (b_1 + b_2)}, \quad C_{yk} = \frac{2Y_k}{\rho v_\infty^2 (b_1 + b_2)}$$

Для результирующих коэффициентов имеем

$$C_x = C_{x1} + C_{x2} = 0, \quad C_y = C_{y1} + C_{y2} = 2(\Gamma_1 + \Gamma_2) [v_\infty (b_1 + b_2)]^{-1}$$

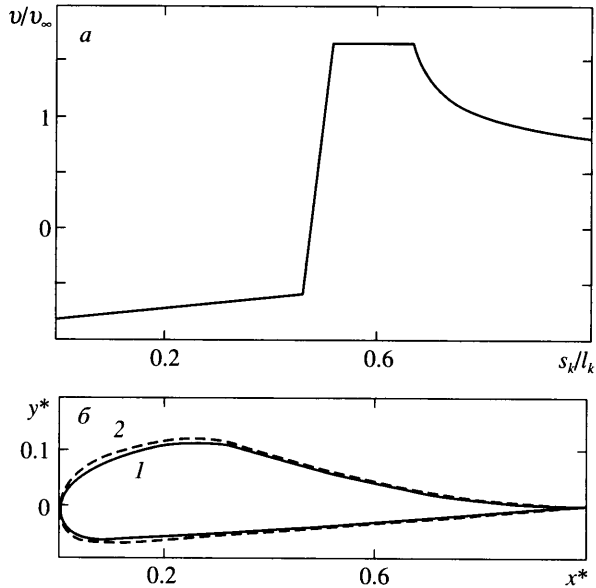


Фиг. 3. Распределения скорости (а) и контуры профиля с закрылком (б):
1 – закрылок, 2 – основной профиль

5. Примеры построения крыловых профилей. Предложенный метод решения реализован в виде программы. По заданным распределениям скоростей $v_k(s_k)$ “полочного” типа из класса гидродинамически целесообразных распределений скорости и значениям φ_* и q определялись функции S_k на верхней и нижней сторонах прямоугольника. Затем восстанавливалась функция $\chi^*(u)$. Для выполнения условий разрешимости часть свободных параметров в исходных распределениях скоростей находилась из решения системы нелинейных уравнений (2.3), (3.1) и второго из (3.2) методом Ньютона. В качестве таких свободных параметров были выбраны дуговые абсциссы s_{ak} передних критических точек, градиенты скоростей dv_k/ds_k в этих точках и значения скорости $v_k(l_k)$ в задних кромках. Одним из основных требований гидродинамической целесообразности является требование безотрывности обтекания, с учетом которого осуществлялся выбор скорости на полке. Для расчета пограничного слоя использовался интегральный метод Кочина – Лойцянского (см., например, [9]). Критерий безотрывности турбулентного пограничного слоя брался в виде $f \geq -2$, где f – формпараметр. Процесс повторялся, пока условия разрешимости не выполнялись с заданной точностью.

Пример построения крылового профиля с закрылком приведен на фиг. 3. Рассчитанные в ходе решения распределения скорости изображены кривыми 1 и 2 на фиг. 3, а, соответствующие им профили – на фиг. 3, б. Задаваемые и определяемые параметры и характеристики этих профилей приведены в табл. 1, где расчетные углы атаки α_k указаны в градусах. Расчет одного двухэлементного профиля по 400 точкам на ЭВМ типа “Pentium III” занимает от 3 до 6 минут процессорного времени, сходимость процесса решения происходит достаточно быстро, точность расчета 10^{-4} .

Частным случаем рассмотренной задачи является задача построения профиля вблизи экрана. Экранный эффект моделируется методом зеркального отражения профиля относительно экрана. Задача сводится к расчету обтекания двух симметрич-



Фиг. 4. Распределение скорости (а) и контур профиля экраноплана (б): 1 – профиль, рассчитанный методом, изложенным в статье, 2 – методом [10]

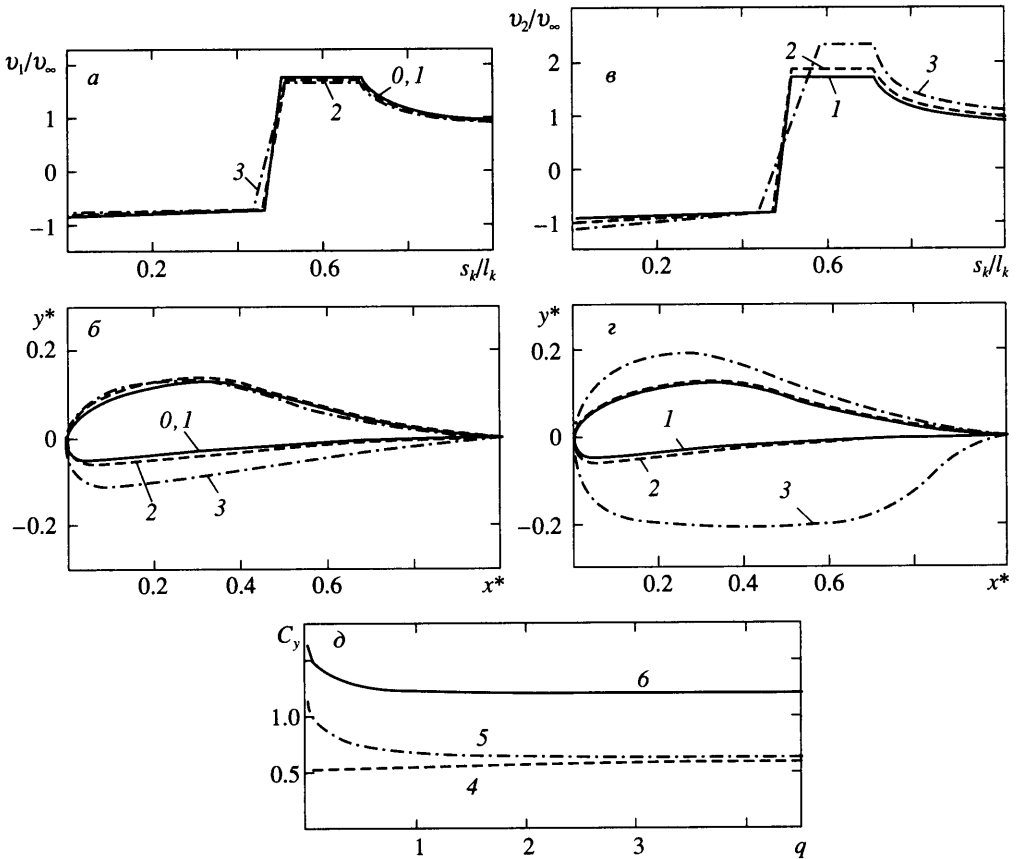
но расположенных профилей, периметры контуров которых одинаковы, а распределения скоростей удовлетворяют условию $v_1(s) = -v_2(1 - s)$. В качестве примера был рассчитан профиль с отстоянием h задней кромки профиля от экрана, равным 0.06. Результаты проведенного расчета (фиг. 4, кривая 1) с высокой степенью точности совпали с полученными ранее (фиг. 4, кривая 2) другим методом [10].

Для сравнения коэффициентов подъемной силы биплана и одиночного профиля возьмем в качестве распределений скорости по контурам профилей (как для одиночного, так и для биплана) одинаковые трехпараметрические распределения скорости полочного типа. Вначале по схеме решения обратной краевой задачи аэрогидродинамики для профиля в безграничном потоке (см., например, [4]) построены одиночный профиль и распределение скорости по его контуру (фиг. 5, а, кривая 0). Затем решена задача для биплана при значительном ($q = 3$) расстоянии между профилями. Периметры профилей выбраны одинаковыми: $l_1 = l_2$. Как и ожидалось, распределения скорости и контуры профилей биплана (фиг. 5, а–г, кривая 1) практически совпали со случаем одиночного профиля. Как следствие, коэффициенты подъемной силы биплана и одиночного профиля различаются незначительно.

Далее по тем же распределениям скорости решена задача построения профиля биплана для меньших расстояний ($q = 0.5$ и 0.05). Удовлетворяя условия разрешимо-

Таблица 1

φ_*	q	k	l_k	x_{0k}	y_{0k}	α_k^0	b_k	$C_{yк}$	C_y
-0.6	0.03	1	0.4	0	0	13	0.1863	0.1851	1.4541
-0.6	0.03	2	1.6	-0.1364	0.0859	5	0.7323	1.2691	1.4541



Фиг. 5. Распределения скорости (а), (в), контуры профилей (б), (г) биплана для различных значений безразмерного расхода: 1-3 – $q = 3, 0.5, 0.05$ – изолированный крыловой профиль; зависимости коэффициента C_y (д) подъемной силы биплана от q : 4 – контура L_1 ; 5 – L_2 ; 6 – биплана

сти, получим профили с несколько измененными распределениями скоростей (фиг. 5, кривые 2 для $q = 0.5$, кривые 3 – 0.05). Характеристики этих профилей представлены в табл. 2. Расчеты показали, что рост суммарного коэффициента подъемной силы C_y для системы профилей наблюдается уже при расстоянии $q \leq 1$ (кривая 6 на фиг. 5, д). При этом с уменьшением q величина C_{y1} для профиля L_1 падает, а величина C_{y2} для

Таблица 2

№ кривой	φ_*	q	k	x_{0k}	y_{0k}	α_k^0	b_k	C_{yk}	C_y
0	–	–	1	–	–	7	0.4788	1.1695	1.1695
1	–0.3	3.0	1	0	0	7	0.4787	0.5784	1.1962
1	–0.3	3.0	2	–0.4428	3.0108	7	0.4792	0.6176	1.1962
2	–0.3	0.5	1	0	0	9	0.4749	0.5277	1.2737
2	–0.3	0.5	2	–0.4227	0.5519	6	0.4758	0.7460	1.2737
3	–0.3	0.05	1	0	0	15	0.4658	0.5133	1.5497
3	–0.3	0.05	2	–0.4070	0.1881	1	0.4339	1.0363	1.5497

профиля L_2 увеличивается (кривые 4 и 5 соответственно). Изменяется и форма профилей. Хорды профилей уменьшаются, и, как следствие, увеличиваются их толщины. При сближении профилей расчетный угол атаки для профиля L_1 увеличился, а для профиля L_2 – уменьшился.

Заключение. Приведено численно-аналитическое решение задачи построения двухэлементного крылового профиля по заданному на искомым контурах профилей распределению скорости или давления как функции дуговой абсциссы этих контуров. Получены формулы для вычисления аэродинамических сил, действующих на каждый профиль. Результаты числовых расчетов показали, что коэффициент подъемной силы двухэлементного крылового профиля увеличивается при уменьшении расстояния между профилями.

Благодарим Г.Ю. Степанова, вдохновившего нас на выполнение настоящей работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 01-01-04004, 02-01-00061 и 03-01-06259).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Насыров Р.М.* Определение формы биплана по заданному распределению скорости по поверхности профилей, его составляющих // Учен. зап. Казан. ун-та. 1953. Т. 113. Кн. 10. С. 31–41.
2. *Тумаев Г.Г., Нужин М.Т.* Обратные краевые задачи и их приложения. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1965. 333 с.
3. *Степанов Г.Ю.* Гидродинамика решеток турбомашин. М.: Физматгиз, 1962. 512 с.
4. *Елизаров А.М., Ильинский Н.Б., Поташев А.В.* Обратные краевые задачи аэрогидродинамики. М.: Наука, 1994. 440 с.
5. *James R.M.* The theory and design of two-airfoil lifting systems // Comput. Meth. Appl. Mech. and Eng. 1977. V. 10. № 1. P. 13–42.
6. *Gopalathnam A., Selig M.S.* Multipoint inverse method for multielement airfoil design // J. Aircraft. 1998. V. 35. № 3. P. 398–404.
7. *Седов Л.И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.;Л.: Гостехиздат, 1950. 444 с.
8. *Ахиезер Н.И.* Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970. 304 с.
9. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 840 с.
10. *Ильинский Н.Б., Лотфуллин М.В., Маклаков Д.В., Поташев А.В.* Определение формы крылового профиля, обтекаемого вблизи границы раздела сред, по заданной эпюре скоростей // Изв. РАН. МЖГ. 1992. № 6. С. 15–21.

Казань

Поступила в редакцию
17.VI.2003