

УДК 533.6.011.8

© 2004 г. М. Ю. ПЛОТНИКОВ

ПРЯМОЕ СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОПЕРЕЧНОГО ОБТЕКАНИЯ ЦИЛИНДРА СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА

Методом прямого статистического моделирования проведено исследование сверхзвукового обтекания цилиндра в широком диапазоне разреженности: от числа Кнудсена $Kn = 0.1$ до свободномолекулярного течения. Исследовано влияние температуры цилиндра на область существенной неравновесности вблизи цилиндра и на тепловой поток.

Ключевые слова: сверхзвуковой поток, разреженный газ, обтекание цилиндра, прямое статистическое моделирование, теплообмен.

Исследования сверхзвукового обтекания цилиндра потоком разреженного газа привлекали к себе внимание с середины прошлого века [1, 2]. В последние годы развитие численных методов газовой динамики с одной стороны, а с другой – развитие вычислительной техники существенно расширили возможности для численного решения этой задачи. В [3, 4] проведено численное исследование обтекания цилиндра на основе уравнений Навье–Стокса, в [5] – на основе уравнений Рейнольдса. В [6] проведена апробация модели переменных мягких сфер (VSS) для расчета методом прямого статистического моделирования [7] обтекания цилиндра азотом и сравнение с экспериментом. В [8] проведено сравнение решений, получаемых при моделировании обтекания цилиндра на основе уравнений Навье–Стокса и методом прямого статистического моделирования. В [9] исследовано влияние внутренних степеней свободы молекул на поле течения и теплопередачу при обтекании цилиндра гиперзвуковым потоком разреженного газа.

В настоящей работе исследуется поперечное обтекание сверхзвуковым потоком разреженного газа цилиндра бесконечной длины с целью получения данных о влиянии степени разреженности на структуру течения и теплообмен. Работа инициирована, в частности, разработкой методики определения коэффициента аккомодации при сверхзвуковом свободномолекулярном обтекании тонкопроволочного датчика [10]. Методика основана на изучении тепловых потоков при свободномолекулярном обтекании проволоочки. Поэтому естественным образом возник вопрос о подборе режимов, при которых теплообмен между газом и цилиндром близок к свободномолекулярному. В [11] приведены экспериментальные данные о зависимости отношения теплового потока к свободномолекулярному пределу от числа Kn для двух температур цилиндра. В данной работе проведено исследование теплообмена между цилиндром и окружающим газом в широком диапазоне разницы температур и степени разреженности.

1. Постановка задачи и решение методом прямого статистического моделирования. Поток газа обтекает цилиндр бесконечной длины. Ось цилиндра перпендикулярна направлению потока. Используется прямоугольная система координат: поток течет вдоль оси X , оси Y и Z – перпендикулярны течению. Ось Z совпадает с осью цилиндра.

В начальный момент времени задан невозмущенный сверхзвуковой поток одноатомного газа с поступательной температурой T_1 , числом Маха M_1 , плотностью ρ_1 .

Предполагалось, что в сечении $x = x_1 < 0$ расположена плоскость источника потока, через начало координат проходит ось цилиндра, а в сечении $x = x_e$ – полностью поглощающая поверхность. Диаметр цилиндра d . В силу симметрии задачи перейдем к следующей постановке: плоскость $y = 0$ предполагается зеркальной, на плоскости $y = y_e$ заданы граничные условия, соответствующие невозмущенному потоку. Если частица возвращается на плоскость источника, то происходит ее поглощение.

Для описания закона взаимодействия частиц между собой использовалась модель переменных твердых сфер (VHS) [7] с параметрами, соответствующими гелию. Для описания взаимодействия частиц с поверхностью цилиндра использовалась диффузная модель, соответствующая отражению частиц при температуре поверхности.

На плоскости источника заданы следующие граничные условия: поступательная температура T_1 , число Маха M_1 , плотность n_1 . Температура поверхности цилиндра постоянна и равна T_w . Длина свободного пробега L_1 определялась согласно [7] по плотности n_1 и температуре T_1

$$L_1 = (\sqrt{2}\pi D_{\text{ref}}^2 n_1 (T_{\text{ref}}/T_1)^{\omega - 0.5})^{-1}$$

Здесь D_{ref} – диаметр частицы, $\omega = 0.66$ для гелия. Для характеристики разреженности использовалось число $\text{Kn} = L_1/d$.

Для приведения задачи к безразмерному виду в качестве характерных величин приняты температура T_1 , плотность n_1 , длина свободного пробега L_1 и наиболее вероятная тепловая скорость частиц при температуре T_1 . Задача определяется следующими параметрами: числом M_1 , отношением температур T_w/T_1 и числом Kn .

Очевидно, что размер расчетной области (в частности, положение плоскостей $x = x_e$ и $y = y_e$) оказывает влияние на формирование течения. Анализ показал, что, начиная с некоторых значений x_e и y_e , процесс формирования течения вблизи цилиндра практически не зависит от размера расчетной области. Именно такие расстояния и использовались в расчетах. Основным интерес представляло стационарное решение задачи.

В расчетах вычислялись макропараметры потока: плотность, скорость, число Маха, температуры по направлениям (T_x – вдоль потока, T_y и T_z – перпендикулярно потоку, $T = (T_x + T_y + T_z)/3$ – общая температура), а также тепловой поток Q между газом и цилиндром и коэффициент сопротивления цилиндра C_x .

Численные эксперименты показали, что точность вычисления теплового потока и коэффициента сопротивления сильно зависит от шага сетки, временного шага и соответственно от числа моделируемых частиц. Поэтому на каждом временном шаге в моделировании использовалось от 300 до 700 тыс. частиц. Стационарное решение насчитывалось с использованием большого количества повторений. Для оценки макропараметров потока в каждой ячейке фактически использовалось порядка миллиона частиц. Точность расчетов контролировалась путем использования различных шагов сетки и временных интервалов алгоритма прямого статистического моделирования. Решение считалось “точным”, если дальнейшее уменьшение шага сетки и временного интервала не приводило к выходящему за рамки статистической погрешности изменению вычисляемых параметров.

2. Результаты численных экспериментов. Численные эксперименты проводились для следующего набора параметров: $\text{Kn} = 0.1 - \infty$, для $M_1 = 2.9$ температура менялась в диапазоне $T_w/T_1 = 2.5 - 11.5$, для $M_1 = 5.6$ – в диапазоне $T_w/T_1 = 11.45 - 26.7$. Числа $M_1 = 2.9$ и 5.6 соответствуют числам Маха в струе на расстоянии одного и двух калибров от среза сопла при расширении одноатомного газа в вакуум [12]. Выбор числа Маха и диапазона температур привязан к условиям [10]. В ряде случаев удобно представлять полученные данные с использованием температуры, выраженной через температуру торможения T_0 . Для чисел $M_1 = 2.9$ и 5.6 температуры торможения $T_0 = 3.8T_1$ и $11.45T_1$. Важной характеристикой для рассматриваемой задачи является температура

восстановления T_r . Для $M_1 = 2.9$ и 5.6 в свободномолекулярном случае температуры восстановления $T_r = 4.74T_1$ и $14.3T_1$ [2].

В типичной картине, наблюдаемой при обтекании цилиндра сверхзвуковым потоком, можно выделить следующие особенности. Вокруг цилиндра формируется область возмущенного течения, характеризующаяся сильной неравновесностью. Перед цилиндром имеет место существенное увеличение плотности и область разрежения за ним. Отметим значительный рост температуры в некоторой окрестности цилиндра. За цилиндром находится дозвуковая область течения, быстро переходящая в сверхзвуковую.

Для более ясного представления о течении вблизи цилиндра приведем распределение макропараметров потока (плотность, число Маха, температуры по направлениям и общая температура) вдоль линии симметрии задачи. На фиг. 1 приведены данные для $Kn = 0.1$ (а), 1 (б) и 40 (в) при $T_w/T_1 = 3.8$, $M_1 = 2.9$. Положение цилиндра показано двумя сплошными вертикальными линиями вблизи точки $x = 0$. Вблизи цилиндра имеется область существенной неравновесности, характеризующаяся значительным различием температур по направлениям. Рост температуры T_x наиболее значителен в области перед цилиндром. Для $Kn = 40$ поведение T_x близко к случаю свободномолекулярного течения. С уменьшением числа Kn столкновения между налетающими и отраженными молекулами приводят к уменьшению T_x и росту T_y и T_z . Для $Kn = 0.1$ имеются два максимума в поведении T_x , что может свидетельствовать о начале формирования отошедшей ударной волны. Отметим рост плотности и снижения общей температуры с уменьшением Kn . В области за цилиндром наибольший рост у температуры T_y , что, по-видимому, связано с натеканием частиц как с области $Y > 0$, так и с $Y < 0$. Поведение T_x в области за цилиндром качественно похоже на случай испарения с цилиндра в вакуум [13] и определяется поведением молекул, отраженных от поверхности цилиндра.

Сравнивая фиг. 1, а–в, видим изменение размера области возмущенного течения для различных чисел Kn . Более детальная зависимость длины этой области перед цилиндром от числа Kn приведена на фиг. 2, а. Здесь и далее, за исключением специально отмеченных случаев, $M_1 = 2.9$. Данные приведены в локальных длинах свободного пробега, рассчитанных для модели переменных твердых сфер (локальная длина определяется по локальным плотности и температуре: $l = (\sqrt{2} \pi D_{ref}^2 n (T_{ref}/T)^{\omega-0.5})^{-1}$)

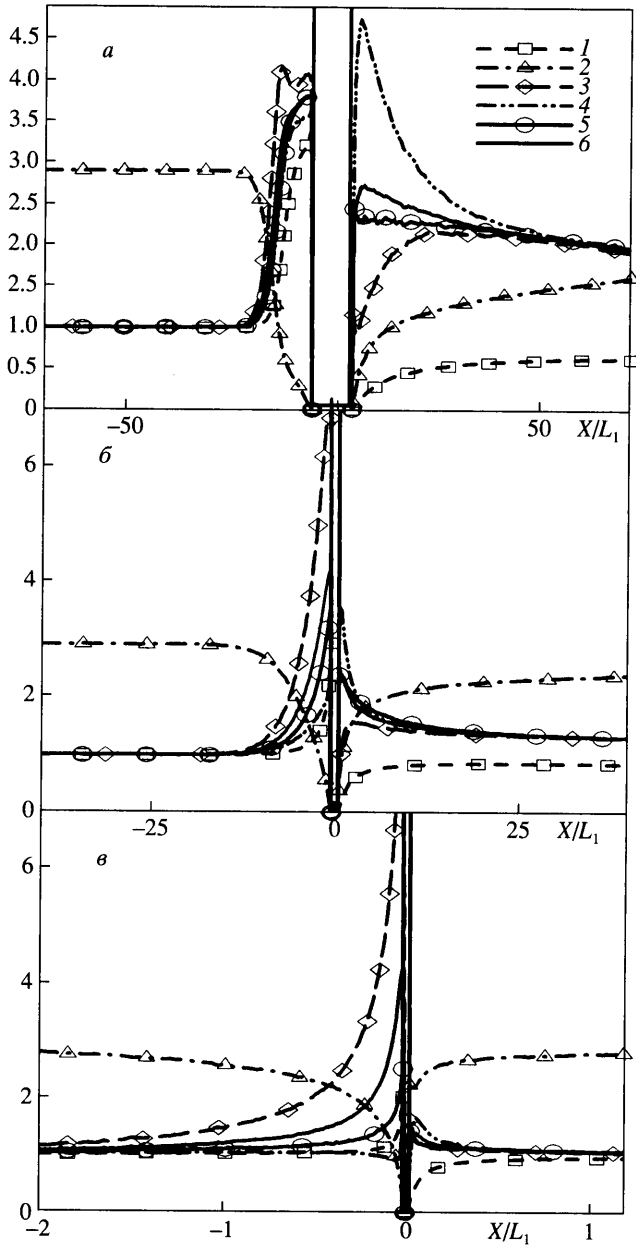
(штриховая кривая) и для модели твердых сфер ($l = (\sqrt{2} \pi D_{ref}^2 n)^{-1}$) (сплошная кривая). За левую границу области возмущенного течения взята точка, где плотность отличается от невозмущенной на 10%. Правая граница – поверхность цилиндра. Размеры этой области растут с уменьшением числа Kn . На фиг. 2, б приведена зависимость длины области возмущенного течения от температуры цилиндра для $Kn = 0.5$ (точки 1) и 0.1 (точки 2). С ростом температуры цилиндра протяженность этой области несколько возрастает.

Для свободномолекулярного случая известны аналитические выражения для коэффициентов сопротивления и теплообмена [1, 2]:

$$C_x = \frac{\sqrt{\pi}}{S} \left[\left(S^2 + \frac{3}{2} \right) I_0(S_1) + \left(S^2 + \frac{1}{2} \right) I_1(S_1) \right] \exp(-S_1) + \frac{\pi^{3/2}}{4S} \sqrt{\frac{T_w}{T_1}} \quad (1.1)$$

$$q = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (T_r - T_w) k n_1 \sqrt{2RT_1} \exp(-S_1) [I_0(S_1) + S^2 (I_0(S_1) + I_1(S_1))] \quad (1.2)$$

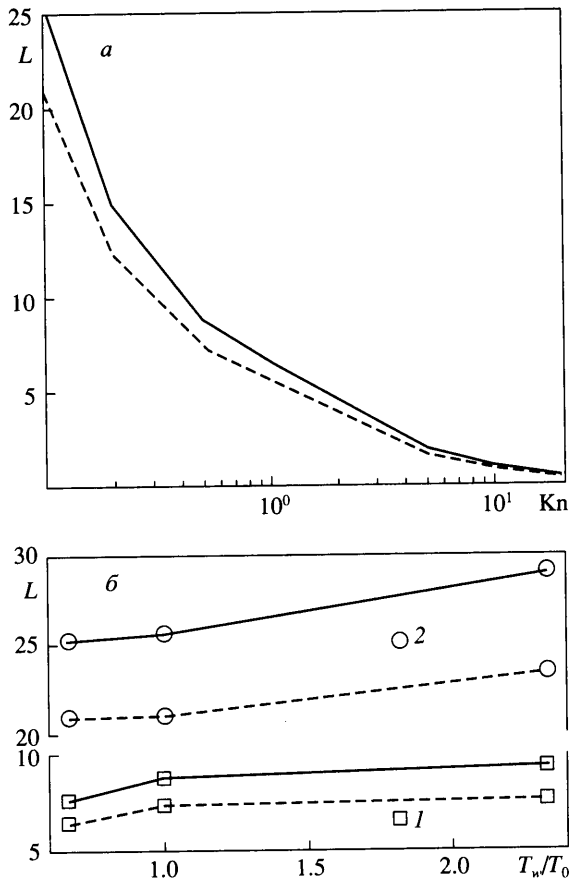
Здесь $I_0(S_1)$ и $I_1(S_1)$ – модифицированные функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядка, $S = \sqrt{5/6} M_1$, $S_1 = S^2/2$, k – постоянная Больцмана, тепловой поток q



Фиг. 1. Распределение плотности n (1), числа Маха M (2), температур по направлениям T_x (3), T_y (4), T_z (5) и общей температуры T (6) вдоль линии симметрии для $Kn = 0.1$ (а), 1 (б) и 40 (в) при $M_1 = 2.9$, $T_w/T_1 = 3.8$

отнесен к единице площади поверхности цилиндра. В дальнейшем через Q обозначим обезразмеренный тепловой поток.

В данной работе коэффициент сопротивления и тепловой поток вычислялись на основе суммирования импульса и энергии частиц, столкнувшихся с поверхностью цилиндра. В качестве тестового реализован свободномолекулярный режим обтекания

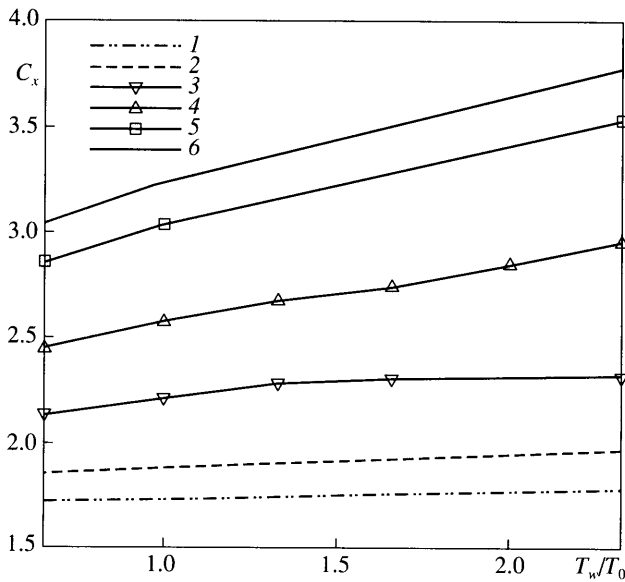


Фиг. 2. Зависимость размера области возмущенного течения от числа Kn (а) и температуры цилиндра (б) для $Kn = 0.5$ (1) и 0.1 (2) в локальных длинах свободного пробега, рассчитанных для модели твердых сфер (сплошная кривая) и модели переменных твердых сфер (штриховая кривая)

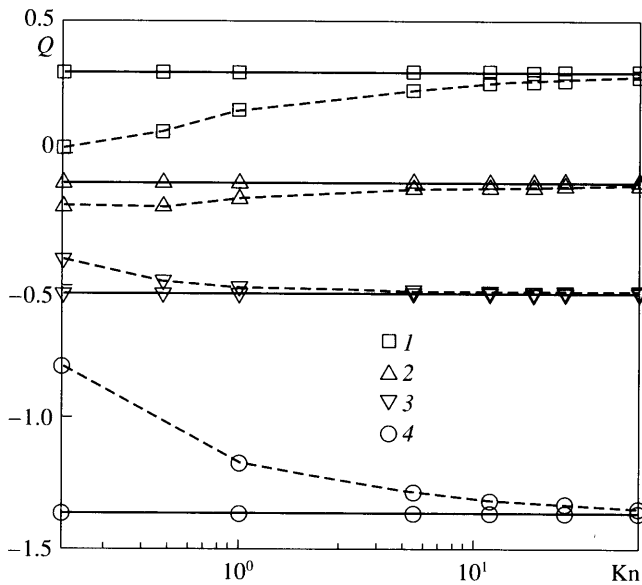
цилиндра. Полученные коэффициент сопротивления и тепловой поток с хорошей точностью совпали с значениями (1.1)–(1.2).

На фиг. 3 представлены зависимости C_x от температуры поверхности для различных режимов: от свободномолекулярного течения до течения при $Kn = 0.1$. Отметим уменьшение зависимости C_x от температуры цилиндра при уменьшении числа Kn в исследуемом диапазоне параметров течения, что известно также из других работ [14, 15]. Часто число $Kn = 10$ рассматривают в качестве границы, за которой течение можно считать свободномолекулярным (см., например [2]). В данной задаче для $Kn = 10$ коэффициент сопротивления отличается от свободномолекулярного случая на 6.1–6.6 % для $M_1 = 2.9$ и 5.6.

На фиг. 4 приведены зависимости теплового потока от числа Kn для различных отношений T_w/T_0 (штриховые кривые). Также приведены величины теплового потока для свободномолекулярного обтекания (сплошные кривые) при соответствующей температуре цилиндра. Видно приближение расчетных данных к свободномолекулярному при увеличении Kn . По представленным данным можно сделать вывод о

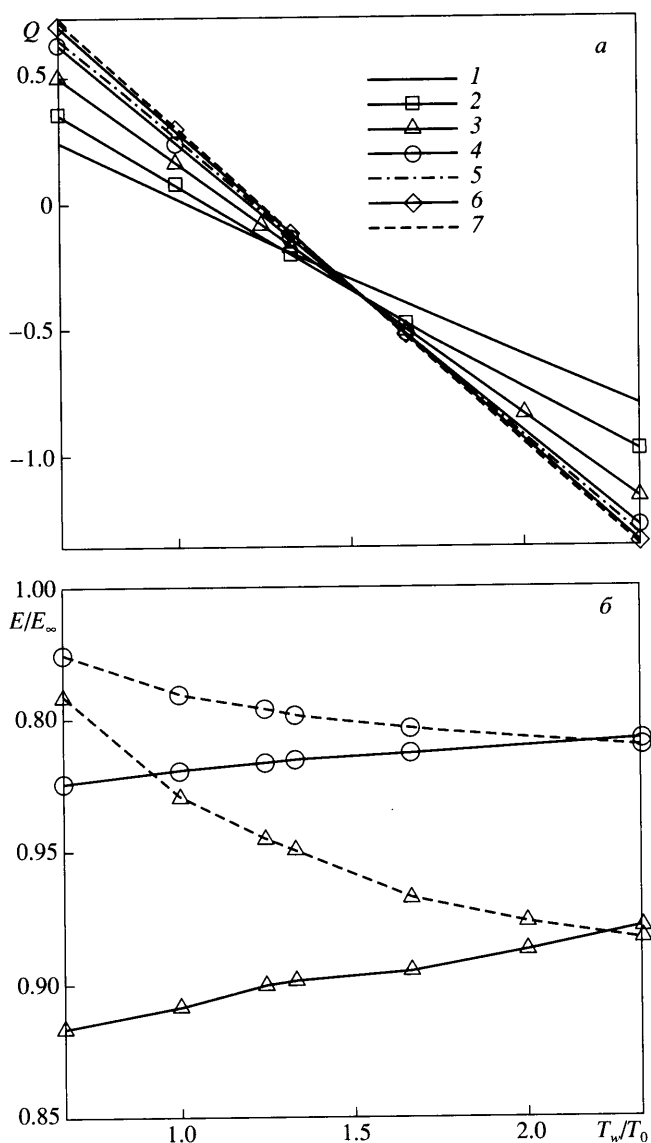


Фиг. 3. Зависимость коэффициента сопротивления C_x от температуры поверхности: 1 – $Kn = 0.1$, 2 – 0.2, 3 – 0.5, 4 – 1, 5 – 10, 6 – ∞



Фиг. 4. Зависимости теплового потока от числа Kn для различных отношений T_w/T_0 (штриховые кривые) и для свободномолекулярного обтекания (сплошные кривые): 1 – $T_w/T_0 = 1$, 2 – 1.33, 3 – 1.66, 4 – 2.33

значительном росте отличия расчетного теплового потока от свободномолекулярного значения при $Kn < 10$, которое увеличивается как при росте температуры цилиндра ($T_w/T_0 > 1.66$), так и при его уменьшении ($T_w/T_0 < 1$). Отметим возможность использования для характеристики теплового потока свободномолекулярных значений при $T_w/T_0 = 1.66$ даже для достаточно малых чисел Kn .



Фиг. 5. Зависимости теплового потока от температуры цилиндра (а), относительной энергии (б), приносимой частицами на цилиндр (сплошная кривая) и уносимой с его поверхности (штриховая кривая), от температуры цилиндра для различных чисел Кн: 1 – Кн = 0.2, 2 – 0.5, 3 – 1, 4 – 5, 5 – 10, 6 – 40, 7 – ∞

Чтобы пояснить этот результат, на фиг. 5, а представлены зависимости теплового потока от температуры цилиндра. Тепловой поток для свободномолекулярного течения убывает линейно при увеличении T_w . Зависимости для конечных чисел Кн также практически линейно убывают с ростом T_w . Однако их углы наклона отличаются от угла наклона прямой для свободномолекулярного обтекания. Для $Kn > 0.5$ кривые пересекаются вблизи точки $T_w/T_0 = 1.66$.

Для более детального исследования происходящих процессов на фиг. 5, б для двух чисел Кн = 5 и приведены раздельно данные по энергии, приносимой частицами на

цилиндр (сплошная кривая) и уносимой с его поверхности (штриховая кривая). Данные приведены в безразмерном виде. Для приносимой энергии данные отнесены к энергии, приносимой частицами в свободномолекулярном случае, а для уносимой – к количеству энергии, уносимой частицами в свободномолекулярном случае при соответствующей температуре поверхности. Так как частицы взаимодействуют с поверхностью по диффузному закону, то зависимость для уносимой энергии фактически отражает количество частиц, сталкивающихся с поверхностью. Для малых T_w/T_0 это количество становится близко к свободномолекулярному случаю. С ростом T_w/T_0 это количество уменьшается и соответственно понижается относительная величина энергии, уносимая с поверхности. В то же время столкновительный процесс приводит к увеличению относительной энергии, приносимой на поверхность с ростом T_w/T_0 (сплошная кривая). С учетом уменьшения количества сталкивающихся с поверхностью цилиндра с ростом T_w/T_0 это означает рост кинетической энергии таких частиц. В конечном итоге для малых T_w/T_0 тепловой поток для рассматриваемых чисел Кн меньше, чем в свободномолекулярном случае, а для больших T_w/T_0 – превосходит его. Это и приводит к пересечению кривых, отражающих зависимости тепловых потоков для свободномолекулярного случая и для конечного числа Кн (фиг. 5, а).

При обработке экспериментальных данных при больших числах Кн часто используются данные о тепловом потоке для свободномолекулярного случая. Использование полученных зависимостей теплового потока от температуры цилиндра (фиг. 5, а) позволяет получить более точную оценку изменения Q .

Также проведены расчеты для $M_1 = 5.6$. Расчетные данные качественно совпали с результатами экспериментов для $M_1 = 2.9$.

Заключение. Методом прямого статистического моделирования получены оценки размеров области возмущенного течения в зависимости от числа Кн и температуры цилиндра. Построены зависимости теплового потока Q и коэффициента сопротивления от числа Кн и T_w . Установлены области применимости теории свободномолекулярного течения для расчетов теплообмена.

Автор выражает благодарность А.К. Реброву за полезные обсуждения в ходе выполнения работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№ 03-01-00213) и гранта Президента РФ по поддержке ведущих научных школ (№ 910.2003.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коган М.Н. Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967. 440 с.
2. Кошмаров Ю.А., Рыжов Ю.А. Прикладная динамика разреженного газа. М.: Машиностроение, 1977. 184 с.
3. Башкин В.А., Егоров И.В., Егорова М.В., Иванов Д.В. Обтекание кругового цилиндра с изотермической поверхностью сверхзвуковым потоком газа // Изв. РАН. МЖГ. 2001. № 1. С. 165–172.
4. Гориков А.Б. Теплообмен при сверхзвуковом обтекании сферы и цилиндра при малых числах Рейнольдса // Изв. РАН. МЖГ. 2001. № 1. С. 156–164.
5. Башкин В.А., Ваганов А.В., Егоров И.В., Иванов Д.В., Игнатова Г.А. Сравнение расчетных и экспериментальных данных по обтеканию кругового цилиндра сверхзвуковым потоком // Изв. РАН. МЖГ. 2002. № 3. С. 134–145.
6. Koura K., Takahira M. Monte Carlo simulation of hypersonic rarefied nitrogen flow around a circular cylinder // Rarefied Gas Dynamics: Proc. 19th Intern. Symp. / Eds. J. Harvey and G. Lord. Oxford: Univ. Press, 1995. V. 2. P. 1236–1242.
7. Bird G. A. Molecular Gas Dynamics and the Direct Simulation of Gas Flows. Oxford: Clarendon Press, 1994. 458 p.
8. Shimada T. Comparison of numerical solutions of transition regime flows: Direct Monte Carlo simulation and Navier-Stokes computation // Rarefied Gas Dynamics: Proc. 18th Intern. Symp. / Ed. B.D. Shizgal and D.P. Weaver. Canada: AIAA. 1992. V. 159. P.256–267.

9. Горелов С.Л., Русаков С.В. Физико-химическая модель гиперзвукового обтекания тел разреженным газом // Изв. РАН. МЖГ. 2002. № 4. С. 131–144.
10. Rebrov A. K., Morozov A.A., Plotnikov M. Yu., Timoshenko N.I., Maltsev V.A. Determination of accommodation coefficients of translational and internal energy using a thin wire in free-molecular flow // Rev. Scient. Instruments. 2003. V. 74. № 2. P. 1103–1106.
11. Гусев В.Н., Никольский Ю.В., Черникова Л.Г. Экспериментальное исследование гиперзвуковых струй с помощью термоанемометра // Уч. зап. ЦАГИ. 1972. Т. 3. № 5. С. 33–39.
12. Жохов В.А., Хомутский А.А. Атлас сверхзвуковых течений свободно расширяющегося идеального газа, истекающего из осесимметричного сопла // Тр. ЦАГИ. 1970. Вып. 1224. 222 с.
13. Плотников М.Ю., Ребров А.К. Переход к сверхзвуковой скорости при испарении и инжекции с цилиндрической поверхности в вакуум // ПМТФ. 1996. Т. 37. № 2. С. 120–130.
14. Korpenwallner G. Drag and pressure distribution of a circular cylinder at hypersonic Mach numbers in the range between continuum flow and free molecular flow // Rarefied Gas Dynamics: Proc. 6th Intern. Symp. / Eds. L. Trilling and H.Y. Wachman. N.Y.: Acad. Press, 1969. V. 1. P.739–750.
15. Григорьев Ю.Н., Иванов М.С. Обтекание цилиндра разреженным газом на основе модельного кинетического уравнения // Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР. 1974. Т. 5. № 1. С. 152–156.

Новосибирск

Поступила в редакцию
16.VI.2003