

УДК 533.6.011:537.84

© 2004 г. К. В. БРУШЛИНСКИЙ, Н. С. ЖДАНОВА

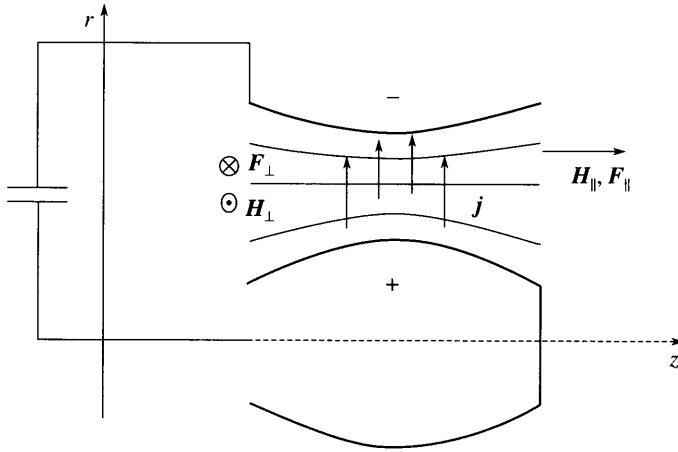
СТАЦИОНАРНЫЕ МГД-ТЕЧЕНИЯ В СОПЛАХ С ВНЕШНИМ ПРОДОЛЬНЫМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

Стационарные МГД-течения в каналах-соплах в присутствии внешнего продольного магнитного поля делятся на два существенно различных класса. Докритические течения, в которых альфвеновская скорость, рассчитанная по продольному полю, меньше скорости плазмы, обладают в основном теми же свойствами, что и течения в собственном поперечном поле, а их количественные характеристики несущественно зависят от величины продольного поля. Закритические течения с противоположным неравенством для скоростей соответствуют сильному продольному полю. Их основное различие – в переходах разных видов энергии (кинетической, тепловой и электромагнитной) друг в друга. В статье дана классификация возможных течений: докритических и закритических, дозвуковых, сверхзвуковых и транзвуковых по отношению к быстрой и медленной магнитозвуковым и альфвеновской скоростям. Приведены примеры всех типов течений. Исследовано влияние параметров задачи на свойства течений.

Ключевые слова: стационарные МГД-течения, сопло, продольное магнитное поле, докритические, закритические, дозвуковые, сверхзвуковые течения.

В связи с разработкой коаксиальных плазменных ускорителей [1, 2] подробно исследованы свойства осесимметричных течений плазмы в каналах при ее взаимодействии с собственным поперечным магнитным полем. Исследования включают математическое моделирование и расчеты течений плотной плазмы [3–7]. Канал ускорителя в форме сопла образован двумя коаксиальными электродами (фиг. 1). Электрический ток радиального направления взаимодействует с порожденным им азимутальным магнитным полем и ускоряет плазму в направлении оси канала. Ускорение плазмы в такой системе описывается уравнениями магнитной газодинамики (МГД) и подчинено закономерностям, аналогичным известным в газодинамических соплах, но эффективность МГД-ускорения может быть намного выше: кинетическая энергия вытекающей из канала струи получена не столько из тепловой, сколько из электромагнитной энергии разрядного тока. Теория МГД-аналога сопла Лавалья с поперечным магнитным полем изложена, например, в [1, 3, 4, 6, 8, 9].

Для дальнейшего развития теории и расширения перспективы приложений представляют интерес свойства течений плазмы в каналах в присутствии продольного магнитного поля, порожденного внешними по отношению к каналу проводниками. Они гораздо менее изучены. Некоторые вопросы затронуты в обзоре [3], где, в частности, обращено внимание на два принципиально различных типа течения плазмы: докритические, в которых альфвеновская скорость, соответствующая продольному полю, меньше скорости плазмы, и закритические – с противоположным неравенством. Особенности двумерного стационарного течения в приэлектродной зоне с учетом частичного протекания плазмы через поверхности анода и катода рассмотрены в [10] в модифицированной МГД-модели, учитывающей эффект Холла, в приближении “плавного канала”. Продольное поле здесь оказывает положительное влияние на организацию течения: ослабляет влияние эффекта Холла и уменьшает величину необходимого подпотока плазмы, втекающего с малой скоростью со стороны анода.



Фиг. 1. Схема коаксиального канала плазменного ускорителя

Цель настоящей работы – исследовать стационарные МГД-течения в канале с продольным магнитным полем. Основные закономерности легче получить и нагляднее представить, ограничившись квазиодномерным (гидравлическим) приближением. Если, как обычно в данном классе задач, пренебречь вязкостью и теплопроводностью, а также считать электропроводность плазмы бесконечной, то математический аппарат МГД-модели в этом случае сводится к алгебраическому уравнению – следствию первых интегралов дифференциальных уравнений, выражающих законы сохранения. В тех случаях, когда интересна роль конечной проводимости, МГД-задачи о течении плазмы решены численно методом установления в нестационарной модели.

В работе изложена математическая постановка квазиодномерной МГД-задачи и указана ее связь с двумерной осесимметричной задачей о течении плазмы в коаксиальном канале. Указаны особенности задачи, соответствующие трем характеристическим скоростям: быстрой и медленной магнитозвуковым и альфвеновской, рассчитанной по продольному магнитному полю (см., например, [8]). Дана классификация течений по отношению скорости плазмы к упомянутым трем скоростям: докритические и закритические [3], дозвуковые и сверхзвуковые для разных скоростей звука. Основное внимание уделено трансзвуковым течениям в каналах-соплах, где скорость монотонно изменяется по длине канала и переходит через одну из скоростей звука в минимальном сечении. При этом в закритических течениях кинетическая энергия переходит в основном в тепловую или растет за счет тепловой. Доля электромагнитной энергии в этих обменах, с одной стороны, невелика, с другой – в противоположность докритическим течениям она расходуется или генерируется одновременно с кинетической. Приведены примеры всех типов течений. Исследовано влияние параметров задачи на общую картину течения.

1. Постановка задачи. На фиг. 1 схематически изображен разрез коаксиального плазменного ускорителя плоскостью $\varphi = \text{const}$ в цилиндрических координатах. Через входное сечение канала слева в него поступает плазма с заданными плотностью ρ_0 , температурой T_0 и, следовательно, давлением $p_0 = (\gamma - 1)C_V\rho_0T_0$. Предполагается известной величина полного электрического тока J в системе, который втекает через левый торец центрального электрода. Это значит, что во входном сечении канала задано азимутальное магнитное поле

$$H_\varphi = \frac{2J}{cr} = H_0 \frac{r_0}{r}; \quad H_0 = \frac{2J}{cr_0}$$

где r_0, H_0 – характерные значения радиуса и напряженности поля на входе. Кроме того, в канале присутствует продольное магнитное поле, удовлетворяющее уравнению $\nabla H = 0$ и поддерживаемое граничными условиями. Боковые границы канала непроницаемы и эквипотенциальны.

Течение плотной горячей плазмы описывается уравнениями МГД в пренебрежении вязкостью и теплопроводностью, но, вообще говоря, с конечной проводимостью.

Задачу о течении в достаточно полном объеме следует рассматривать в двумерной осесимметричной постановке в области переменных (z, r) , соответствующей каналу (фиг. 1) с указанными выше граничными условиями. Начальные данные могут быть достаточно произвольными, лишь бы они обеспечили разгон плазмы слева направо.

В данной работе задача рассматривается в квазиодномерном (гидравлическом) приближении (см. например, [1, 3, 4, 6, 9]). А именно, предполагается, что зазор $\Delta r(z)$ между электродами мал и медленно меняется вдоль оси z , средний радиус канала $r = r_0$ постоянен, и все искомые величины усреднены по поперечному сечению канала $S(z) = 2\pi r_0 \Delta r(z)$.

В этом приближении уравнения МГД имеют вид [9]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho S}{\partial t} + \frac{\partial \rho u S}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \rho u S}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho u^2 + p + \frac{H_\phi^2}{2} \right) S &= \left(p + \frac{H_\phi^2}{2} \right) \frac{dS}{dz} \\ \frac{\partial \rho w S}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (\rho u w - H_\phi H_z) S &= 0 \\ \frac{\partial \rho E S}{\partial t} + \frac{\partial \rho E S u}{\partial z} + p \frac{\partial S u}{\partial z} &= \nu S \left(\frac{\partial H_\phi}{\partial z} \right)^2 \\ \frac{\partial H_\phi S}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (H_\phi u - H_z w) S &= \frac{\partial}{\partial z} \left(S \nu \frac{\partial H_\phi}{\partial z} \right); \quad \frac{\partial H_z S}{\partial t} = 0 \\ p &= (\gamma - 1) \rho E = \frac{\beta}{2} \rho T = \frac{\beta}{2} \rho^\gamma e^s \end{aligned} \tag{1.1}$$

где $u = V_z, w = V_\phi$. При этом $V_r = 0, H_r = 0$, а из уравнения Максвелла следует $\partial H_z S / \partial z = 0$, т.е. продольный магнитный поток $H_z S$ постоянен, и его следует считать заданным.

Уравнения (1.1) приведены в безразмерном виде. Единицы измерения составлены из размерных величин, участвующих в постановке задачи:

$$\rho_U = \rho_0, \quad T_U = T_0, \quad z_U = L, \quad H_U = H_0, \quad V_U^2 = E_U = \frac{H_0^2}{4\pi\rho_0}$$

$$p_U = \frac{H_0^2}{4\pi}, \quad t_U = \frac{L}{V_U}, \quad j_U = \frac{cH_0}{4\pi L}, \quad S_U = S(0)$$

где L – длина канала.

Задача содержит безразмерные параметры. Два из них традиционно участвуют в моделировании МГД-течений в ускорителях [4, 6, 7]

$$\beta = \frac{8\pi\rho_0}{H_0^2}; \quad \nu = \frac{c^2}{4\pi\sigma z_U V_U} = \frac{1}{\text{Re}_m}$$

Третьим является постоянное значение $H_z S$, т.е. отношение заданных на входе размерных значений продольной H_z и азимутальной $H_\varphi = H_0$ компонент магнитного поля. Граничные условия на входе в канал ($z = 0$):

$$\rho = 1, \quad T = 1, \quad H_\varphi = 1, \quad w = 0$$

при дозвуковом втекании и дополнительно значение $u(0)$ – при сверхзвуковом.

На выходе ($z = 1$) при $v \neq 0$ задано значение $H_\varphi(1)$ или производная $\partial H_\varphi / \partial z$, а при дозвуковом вытекании – дополнительно одна из газодинамических величин ρ, p, u .

Задача решается численно до установления стационарного режима течения.

2. Стационарные течения бесконечно проводящей плазмы. Стационарные течения описываются уравнениями (1.1) при $\partial/\partial t \equiv 0$, т.е. обыкновенными дифференциальными уравнениями. В случае бесконечной проводимости ($\sigma \equiv \infty, \nu \equiv 0$) они особенно просты:

$$\begin{aligned} u \frac{d\rho}{dz} + \rho \frac{du}{dz} &= -\frac{\rho u dS}{S} \\ \rho u \frac{du}{dz} + p_\rho \frac{d\rho}{dz} + p_s \frac{ds}{dz} + H_\varphi \frac{dH_\varphi}{dz} &= 0 \\ \rho u \frac{dw}{dz} - H_z \frac{dH_\varphi}{dz} &= 0; \quad \frac{ds}{dz} = 0 \\ u \frac{dH_\varphi}{dz} + H_\varphi \frac{du}{dz} - H_z \frac{dw}{dz} &= -\frac{H_\varphi u dS}{S}; \\ p_\rho = \frac{\partial p}{\partial \rho} = C_T^2 = \frac{\gamma p}{\rho}; \quad p_s &= \frac{\partial p}{\partial s} \end{aligned} \quad (2.1)$$

где C_T – газодинамическая (тепловая) скорость звука.

Система уравнений (2.1), разрешенная относительно производных, имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dz} &= \frac{C_T^2(u^2 - C_A^2) + H_\varphi^2/\rho u dS}{(u^2 - C_s^2)(u^2 - C_f^2) S dz}; \quad \frac{d\rho}{dz} = -\frac{(u^2 - C_A^2)}{(u^2 - C_s^2)(u^2 - C_f^2)} \frac{\rho u^2 dS}{S dz} \\ \frac{dH_\varphi}{dz} &= \frac{-H_\varphi u^4}{(u^2 - C_s^2)(u^2 - C_f^2) S dz}; \quad \frac{dw}{dz} = \frac{H_z dH_\varphi}{\rho u dz}; \quad \frac{ds}{dz} = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$C_{f,s}^2 = \frac{1}{2} \left(C_T^2 + \frac{H^2}{\rho} \right) \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(C_T^2 + \frac{H^2}{\rho} \right)^2 - 4C_T^2 C_A^2}; \quad C_A^2 = \frac{H_z^2}{\rho}; \quad H^2 = H_\varphi^2 + H_z^2$$

Здесь C_f, C_s – быстрая и медленная магнитнозвуковые скорости, C_A – альфвеновская скорость, соответствующая продольному магнитному полю [8].

Правые части уравнений (2.2) имеют особенности при $u^2 = C_s^2$ и $u^2 = C_f^2$. Это значит, что гладкие решения уравнений описывают либо дозвуковые, либо сверхзвуковые (по отношению к каждой из скоростей C_s и C_f) течения. Представляющие наибольший интерес трансзвуковые течения с монотонным изменением скорости вдоль канала и переходом через любую из звуковых скоростей существуют только в каналах-соплах, где любой из множителей в знаменателях уравнений может обратиться в нуль одновременно с производной $S'(z)$ в числителях в минимальном сечении сопла.

Альфвеновская скорость C_A связана с еще одним специфическим свойством уравнений (2.2). Легко проверить, что если разность $U^2 - C_A^2 = 0$ хоть в одной точке, то она равна нулю тождественно по z , так как ее производная пропорциональна ей самой. При этом плотность плазмы постоянна (см. второе уравнение (2.2)) и равна так называемому критическому значению $\rho_{cr} = H_z^2 / C_A^2$.

Решения уравнений (2.2) при $u \neq C_A$ описывают два существенно различных класса течений: докритические – при $\rho < \rho_{cr}$, $u > C_A$, и закритические при $\rho > \rho_{cr}$, $u < C_A$. Поскольку $C_s < C_A < C_f$ [8], докритические течения могут быть дозвуковыми, сверхзвуковыми или трансзвуковыми только по отношению к C_f , а закритические – по отношению C_s . В отсутствие продольного поля ($H_z = 0$) все течения – докритические.

Система уравнений (2.1) имеет полный набор первых интегралов – законов сохранения [3]:

$$\rho u S = C_1; \quad H_z S = C_2$$

$$S(\rho u w - H_z H_\phi) = C_3; \quad S(H_\phi u - H_z w) = C_4 \quad (2.3)$$

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \frac{E}{(\gamma - 1)\rho^{\gamma-1}} = C_5; \quad \frac{u^2 + w^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} + \frac{H_\phi^2}{\rho} - \frac{H_\phi H_z w}{\rho u} = C_6$$

Значения констант, кроме C_1 и C_2 , определяются граничными условиями на входе:

$$C_3 = -C_2; \quad C_4 = C_1; \quad C_5 = \frac{\beta}{2}; \quad C_6 = \frac{C_1^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\beta}{2} + 1 \quad (2.4)$$

Константа C_2 равна заданной величине продольного магнитного потока, а C_1 – значению скорости $u(0)$ на входе, которое либо задается, либо определяется в процессе решения задачи в зависимости от типа искомого решения и соответствующих ему граничных условий.

Выразив из уравнений (2.3) и (2.4) все неизвестные через плотность ρ :

$$u = \frac{C_1}{\rho S}, \quad H_\phi = \frac{k^2 - 1}{k^2 \rho - 1} \quad (2.5)$$

$$w = k(H_\phi - 1) = k \frac{1 - \rho}{k^2 \rho - 1}, \quad p = \frac{\beta}{2} \rho^\gamma, \quad k^2 = \frac{C_2^2}{C_1^2} = \frac{1}{\rho M_H^2}$$

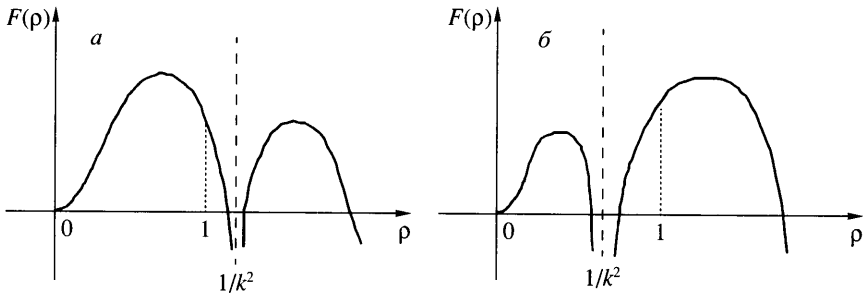
получим одно алгебраическое уравнение, определяющее ρ как функцию от z , C_1 и C_2 :

$$F(\rho) \equiv F_0(\rho) + F_1(\rho) = \frac{C_1^2}{2S^2(z)} \quad (2.6)$$

$$F_0(\rho) = \rho^2 \left(\frac{C_1^2}{2} + \frac{\beta \gamma}{2(\gamma - 1)} + 1 - \frac{\beta \gamma}{2(\gamma - 1)} \rho^{\gamma-1} - \rho \right)$$

$$F_1(\rho) = \frac{k^2 \rho^2 (1 - \rho)}{(1 - k^2 \rho)} \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \rho - k^2 \rho^2 \right)$$

Уравнение (2.6) обобщает аналогичное уравнение для задачи без продольного поля ($k = 0$, $F_1(\rho) \equiv 0$) [6]. Его решение вместе с формулами (2.5) полностью описывает



Фиг. 2. Графики функции $F(\rho)$, a – докритические, b – закритические течения

квазиодномерное стационарное МГД-течение в случае бесконечной проводимости плазмы.

Функция $F(\rho)$ имеет полюс второго порядка при $\rho = 1/k^2$, соответствующий критическому значению плотности ρ_{cr} . В силу граничных условий на входе и выбранных единиц измерения искомое решение уравнения (2.6) начинается со значения $\rho = 1$ при $z = 0$ и находится по одну сторону от полюса (фиг. 2).

Возможные типы решений задачи схематически представлены на фиг. 3 графиками величины

$$U = \frac{u^2(z)}{C_2^2} = \frac{1}{k^2} \frac{u^2(z)}{u^2(0)}$$

Течения типа 1 – сверхзвуковые (относительно C_p), докритические. Течение 2 – трансзвуковое с монотонным убыванием скорости. Здесь кинетическая энергия втекающей плазмы превращается в электромагнитную и частично в тепловую, что соответствует МГД-генератору. Течение 3 – трансзвуковое с ускорением, в котором электромагнитная и тепловая энергия переходят в кинетическую. Оно представляет интерес в теории плазменных ускорителей. Течения типа 4 – дозвуковые докритические. Графики 6–9 описывают закритические течения, которые аналогичным образом соотносятся со скоростью медленного магнитного звука C_s .

3. Докритические течения. Механизм построения решения и обстоятельства, определяющие его в канале типа сопла, рассмотрим, следуя [6]. Решения начинаются при $z = 0$, $\rho = 1$. Во входной части канала $S(z)$ убывает, т.е. правая часть уравнения (2.6) возрастает. В докритических течениях типа 1 и 2 скорость в этой части убывает, а плотность растет. Значит, необходимо, чтобы $F(\rho)$ тоже возрастала:

$$\frac{\partial F}{\partial \rho}(\rho = 1) > 0, \quad k^2 < \frac{C_1^2 - \gamma\beta/2 - 1}{C_1^2 - \gamma\beta/2} \quad (3.1)$$

Непрерывное решение уравнения (2.6) существует при всех $0 \leq z \leq 1$, если

$$\frac{C_1^2}{2 \min S^2(z)} \leq \max F(\rho) \quad (3.2)$$

где в правой части имеется в виду максимум ветви функции $F(\rho)$ слева от полюса ($\rho < 1/k^2$, фиг. 2, a). В случае строгого неравенства (3.2) значение $\rho(z)$, достигнув максимума при $\min S(z)$, убывает, а скорость возрастает, что соответствует сверхзвуковому течению

типа 1. В случае равенства (3.2) непрерывное решение с возрастанием плотности продолжается за минимальным сечением канала. При этом $\rho(z)$ находится из (2.6) обращением функции $F(\rho)$ на нисходящем участке ее графика. При дальнейшем возрастании параметра k^2 неравенство (3.2) не выполнено, и решений уравнения (2.6) не существует в диапазоне значений k^2 , соответствующем отрезку оси ординат между началами кривых 2 и 3 на фиг. 3. Они появляются при дозвуковом ($u < C_f$) втекании, когда равенство (3.2) вновь выполнено. Здесь оно неявно определяет начальное значение $u(0) = C_1$ (или параметра k), т.е. заменяет недостающее граничное условие для скорости. При этом неравенство (3.1) изменилось на противоположное: функция $F(\rho)$ возрастает при убывании ρ , и решение строится слева от точки $\rho = 1$.

Решение типа 3 описывает трансзвуковое течение с ускорением, пример которого представлен на фиг. 4, а. Давление p и скорость вращения w определяются формулами (2.5). Убывание $H_\phi(z)$ соответствует положительному току $j_r = -\partial H_\phi / \partial z$, который ускоряет плазму силой $j_r H_\phi > 0$, и отрицательной скорости вращения. Сравнение с вариантом $H_z \equiv 0$ (штриховая линия) показывает, что при том же значении полного тока ($H_\phi(0) = 1$) продольное поле незначительно снижает характеристики ускорения плазмы вдоль канала, уменьшает величину тока, выносимого из канала ($H_\phi(1)$), увеличивает плотность. Эти тенденции можно объяснить тем, что часть энергии расходуется на вращение плазмы.

В диапазоне значений k^2 между началами кривых 3 и 5 на фиг. 3 имеет место строгое неравенство (3.2), и решения описывают дозвуковые докритические течения: плотность ρ убывает вместе с $S(z)$ в сужающейся части сопла и возрастает в расширяющейся.

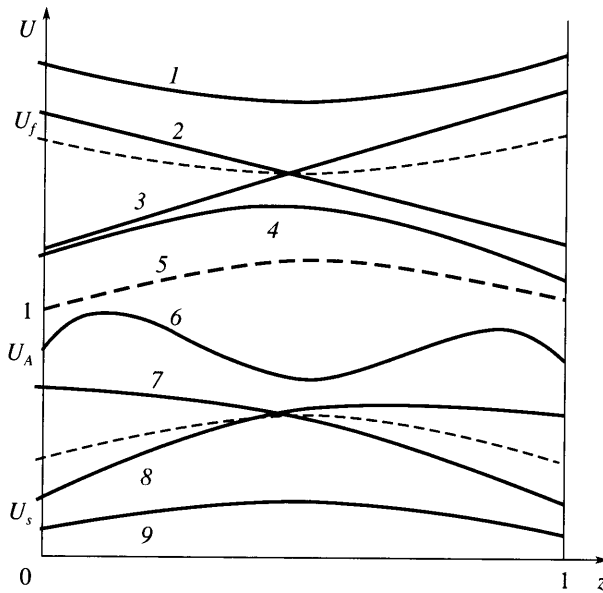
Согласно (2.2) в случае $u^2 > C_A^2$ производные $H'_\phi(z)$ и $\rho'(z)$ – одного знака (при $H_\phi > 0$). Следовательно, в дозвуковых течениях типа 4 плазма ускоряется в сужающейся части канала положительным током j_r , а в расширяющейся части при торможении генерируется электрический ток $j_r < 0$. В сверхзвуковых течениях типа 1, наоборот, плазма сначала тормозится, создавая ток $j_r < 0$, затем ускоряется, поглощая энергию положительного тока.

4. Закритические течения. В решении уравнения (2.6) в случае закритических течений ($k^2 > 1$) участвует ветвь функции $F(\rho)$ справа от полюса (фиг. 2, б). В диапазоне значений k^2 , при которых $C_s^2(0) < C_1^2 < C_2^2$, всегда выполнены неравенства (3.1), поэтому значения $\rho(z)$ возрастают при $S'(z) < 0$ и убывают при $S'(z) > 0$. Сверхзвуковые течения типа б (фиг. 3) имеют место при строгом неравенстве (3.2) с $\max F(\rho)$ при $\rho > 1/k^2$. Производные $H'_\phi(z)$ и $\rho'(z)$ разных знаков (2.2), следовательно, ток j_r и сила $j_r H_\phi$ положительны при сужении и отрицательны при расширении канала.

Сверхзвуковая закритическая скорость u в непосредственной близости от значения $u^2 = C_A^2$ ведет себя аналогично дозвуковой докритической (тип 4), так как правая часть первого уравнения (2.2) непрерывно переходит через это значение без изменения знака. Однако при возрастании k^2 отрицательное слагаемое $u^2 - C_A^2$ в ее числителе может сравниться с положительным, и в некоторых точках имеем

$$C_T^2(u^2 - C_A^2) + \frac{H_\phi^2}{\rho} u^2 = 0, \quad \frac{du}{dz} = 0$$

Скорость становится немонотонной, что схематически изображено на фиг. 3. Пример решения типа б приведен на фиг. 4, б.



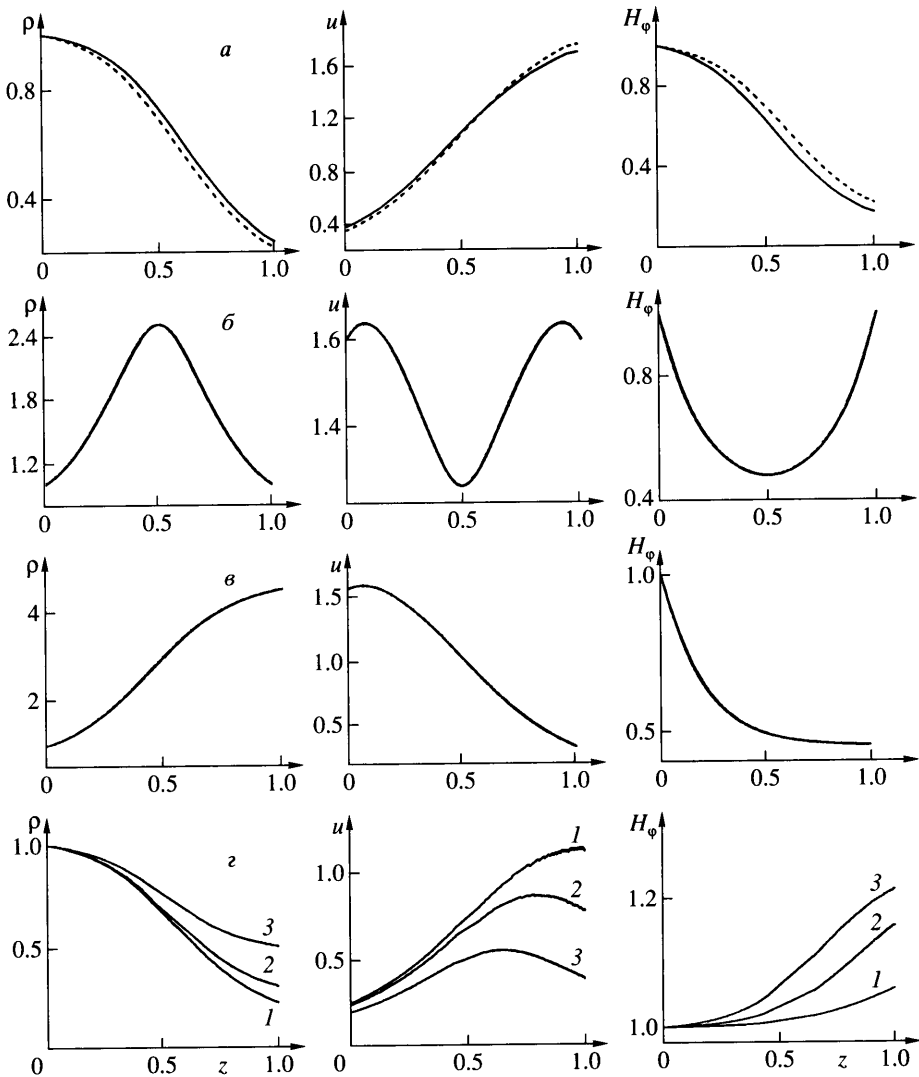
Фиг. 3. Схематические графики $U = u^2/C_2^2$ для различных типов стационарных течений. Штриховыми – проведены $U_{f,A,s} = C_{f,A,s}^2/C_2^2$. Кривые 1–4 соответствуют докритическим, 5 – критическому, 6–9 – закритическим течениям

Равенство (3.2) выделяет трансзвуковой режим течения, в котором плотность монотонно возрастает, а скорость незначительно растет до локального максимума во входной части канала, а затем убывает и переходит к дозвуковым относительно C_s значениям (фиг. 4, в). Электрический ток j_r положителен, но его энергия не ускоряет плазму, а вместе с кинетической расходуется на сжатие и, следовательно, нагревание плазмы.

В интервале значений k^2 между кривыми 7 и 8 на фиг. 3 решение задачи не существует. Кривая 8 соответствует трансзвуковому течению, для которого неравенство (3.1) меняется на обратное. Плотность убывает вдоль канала, поле H_ϕ незначительно возрастает, создавая небольшой по величине ток $j_r < 0$. Скорость в приведенных на фиг. 4, г. вариантах расчета монотонно возрастает при сильном продольном поле или, достигнув максимума, незначительно убывает – при слабом. Таким образом, в трансзвуковом режиме течения типа 8 кинетическая и электромагнитная энергия возрастают за счет тепловой (температура убывает вдоль канала вместе с плотностью).

Большим значениям k^2 отвечают решения типа 9, описывающие дозвуковые закритические течения ($u < C_s$). В минимальном сечении сопла плотность ρ достигает минимума, а скорость u и поле H_ϕ – максимума. Ток $j_r < 0$ генерируется во входной части и расходуется $j_r > 0$ – в выходной.

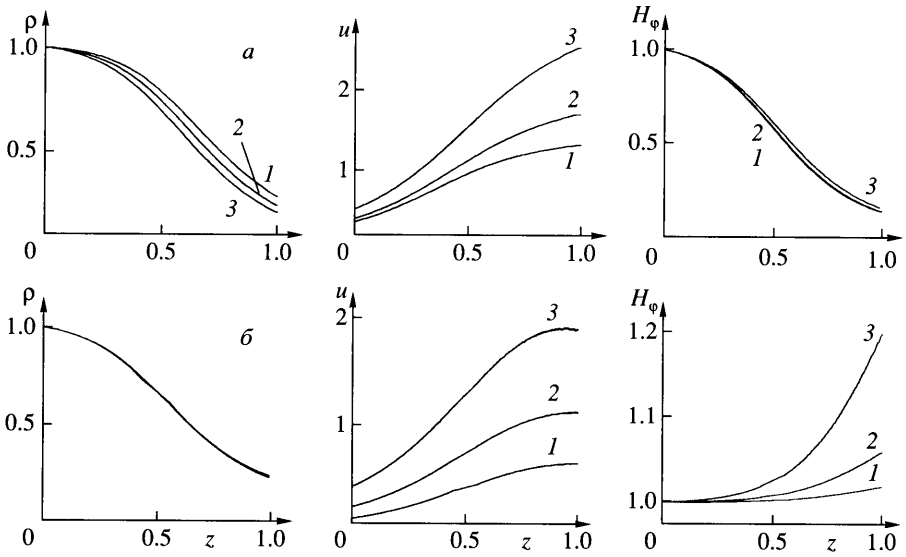
5. Зависимость результатов от параметров задачи. Изложенные выше результаты получены при фиксированных значениях параметров задачи. Бесконечная проводимость плазмы, т.е. отсутствие магнитной вязкости ($\nu = 0$) обеспечило максимальную простоту и наглядность математического аппарата исследований. Значение $\beta = 1$ выбрано для того, чтобы газодинамические и электромагнитные факторы задачи были соизмеримы между собой. Параметр $C_2 = H_z S$ имеет немалые значения, чтобы эффекты, обязанные продольному полю, проявились достаточно заметно. Так, в случае докритических трансзвуковых течений с ускорением параметр $C_1 = u(0)$, определяе-



Фиг. 4. Решение задачи о стационарных течениях при $\beta = 1$: *a* – тип течения 3; $H_z S = 0.3$ (сплошная) и $H_z S = 0$ (штриховая); *б* – тип 4; $H_z S = 2$; $C_1 = 1.6$; *в* – тип 7; $H_z S = 2$; *г* – тип 8; $H_z S = 2$; 1; 0.5 (кривые 1–3)

мый в процессе решения, оказался близким к 0.4 для рассмотренного диапазона значений C_2 . Поэтому вариант расчета при $C_2 = 0.3$ на фиг. 4, *a* уже близок к критическому. Характеристические течения иллюстрированы расчетами при значении $C_2 = 2$.

Характеристики докритического течения монотонно зависят от параметра C_2 в диапазоне $0 \leq C_2 \leq 0.3$, причем эта зависимость очень слабая (фиг. 4, *a*). Зависимость закритических течений от C_2 представлена на фиг. 4, *г*. Более сильному продольному полю отвечает большее разрежение и, следовательно, охлаждение (адиабатическое при $v = 0$) плазмы, большее ускорение, но меньший рост поля H_ϕ , т.е. меньшее количество генерируемого электрического тока j_r . При небольшой величине продольного



Фиг. 5. Решения задачи при значениях параметра $\beta = 1/3; 1; 3$ (кривые 1–3): а – докритическое течение типа 3; $H_z S = 0.3$; б – закритическое течение типа 8; $H_z S = 2$

поля скорость и ускорение невелики и скорость немонотонна по z с ярко выраженным максимумом, который смещается внутрь канала при убывании C_2 .

Зависимость докритических трансзвуковых течений с ускорением от параметра β иллюстрирована фиг. 5, а. С ростом β усиливается разрежение плазмы вдоль канала и связанное с ним относительное ускорение – отношение скоростей на выходе из канала и на входе в него. Этот результат обязан продольному магнитному полю: в аналогичных вариантах расчета при $H_z \equiv 0$ то же отношение почти не зависит от β и в рассмотренном диапазоне его значений равно приблизительно 5. Распределение азимутального поля H_ϕ и электрического тока в канале практически не зависит от β при любом значении H_z .

Физическая интерпретация сравнения графиков на фиг. 5, а и количественные выводы из них должны иметь в виду выбранную здесь магнитную единицу скорости V_U . Если рост β связан с повышением температуры T_0 и, следовательно, давления p_0 втекающей плазмы, а плотность ρ_0 и магнитное поле H_0 остаются неизменными, то неизменна и единица V_U . Скорость плазмы растет вместе с температурой (фиг. 5, а). Если предполагать неизменными параметрами ρ_0 , T_0 , p_0 и связать рост β с убыванием H_0 (разрядного тока), то единица скорости V_U также убывает обратно пропорционально $\sqrt{\beta}$. Расчеты показали, что при возрастании β в 9 раз безразмерная скорость увеличилась приблизительно вдвое, а единица V_U уменьшилась в 3 раза. Значит, физическая (размерная) скорость при $\beta = 3$ составляет лишь $2/3$ таковой при $\beta = 1/3$, т.е. более слабому разрядному току соответствует меньшая скорость плазмы.

Результаты расчета закритических течений с ускорением при разных значениях параметра β приведены на фиг. 5, б. Возрастание β здесь также сопровождается ростом скорости (безразмерной), причем в отличие от докритических течений скорость растет быстрее, чем $\sqrt{\beta}$. Также увеличивается приращение $H_\phi(1) - H_\phi(0)$ азимутального поля H_ϕ в канале, т.е. генерируемый ток. При фиксированных значениях раз-

рядного тока и плотности втекающей плазмы течения более горячей плазмы отдают больше тепла, за счет которого соответственно возрастают кинетическая энергия и электрический ток. При фиксированных плотности и температуре на входе то же перераспределение энергии имеет место в меньших по абсолютной величине количествах.

В научной литературе МГД-течениям в поперечных скрещенных магнитном и электрическом полях с учетом магнитной вязкости уделено много внимания. В одном из ранних интересных исследований на эту тему [11, 12] показано, что именно при конечной проводимости, задавая различные параметры полей, можно нетривиальным образом влиять на механизм ускорения или замедления течения в каналах и узких трубках (см. также [8, 9] и библиографию в них).

Влияние конечной проводимости на процессы в плазменных ускорителях исследовано в [4], где установлено, что МГД-течения в самосогласованных поперечных полях существенно зависят от нее только при значениях $Re_m \leq 1$, т.е. $v \geq 1$. В обсуждаемых вопросах представляют интерес значения $Re_m \geq 10^3$, поэтому многие работы по численному моделированию ограничиваются бездиссипативным приближением ($v \equiv 0$).

Аналогичные результаты получены в расчетах МГД-течений в каналах в присутствии внешнего продольного магнитного поля. Распределения плотности, скорости и продольного поля вдоль канала, рассчитанные для докритического трансзвукового течения при $v = 0$ (фиг. 4, а), практически не изменились при $v \leq 0.01$. Незначительное снижение ускорения в результате диффузии магнитного поля наблюдается при $v = 0.1$. И лишь при искусственно завышенном значении $v = 1$ ускорение возрастает, а плотность плазмы падает в результате сильного джоулева нагрева: температура на выходе из канала на порядок превосходит таковую в адиабатическом течении.

Влияние проводимости на свойства закритических течений практически незаметно, поскольку в этом случае плотность электрического тока (как расходуемого, так и генерируемого) невелика, и связанный с ней джоулев нагрев проявляется слабо.

Заключение. Исследованы стационарные МГД-течения в коаксиальных каналах-соплах при наличии внешнего продольного магнитного поля. Исследование проведено в квазиодномерном приближении. Дана классификация течений бесконечно проводящей плазмы в терминах отношения скорости течения к альфвеновской, а также быстрой и медленной магнитозвуковым скоростям.

При небольшой величине продольного поля течения имеют докритический тип и по своим свойствам несущественно отличаются от течений в поперечном поле. Характер до-, сверх- и трансзвуковых течений не меняется, параметры ускорения вдоль оси в трансзвуковом режиме несколько уменьшаются за счет вращения плазмы в азимутальном направлении.

В относительно сильном внешнем магнитном поле имеют место закритические течения, характер которых существенно изменяется. Основное отличие от докритических течений – в переходах разных видов энергии друг в друга. В трансзвуковом течении с замедлением кинетическая энергия преобразуется не в электрическую, а вместе с вложенной электрической – в тепловую. В течениях с ускорением происходит обратный переход: тепловая энергия превращается в кинетическую и частично в электрическую. Таким образом, закритические течения в соплах не могут быть рабочим механизмом МГД-ускорителей или МГД-генераторов.

Различие докритических и закритических трансзвуковых течений проявляется также в их зависимости от величины разрядного тока. При возрастании тока скорость докритического течения растет и энергия перераспределения в сторону кинетической, а в закритическом – плазма отдает меньше тепла, уменьшая при этом параметры ускорения и генерируемого тока.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (№ 03-01-00063).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Морозов А.И.* Физические основы космических электрореактивных двигателей. Т. 1. М.: Атомиздат, 1978. 326 с.
2. *Морозов А.И.* Принципы коаксиальных стационарных плазменных ускорителей (КСПУ) // Физика плазмы. 1990. Т. 16. Вып. 2. С. 131–146.
3. *Морозов А.И., Соловьев Л.С.* Стационарные течения плазмы в магнитном поле // Вопросы теории плазмы / Под ред. М.А. Леонтовича. М.: Атомиздат, 1974. Вып. 8. С. 3–87.
4. *Брушлинский К.В., Морозов А.И.* Расчет двумерных течений плазмы в каналах // Вопросы теории плазмы / Под ред. М.А. Леонтовича. М.: Атомиздат, 1974. Вып. 8. С. 88–163.
5. *Брушлинский К.В., Заборов А.М., Козлов А.Н., Морозов А.И., Савельев В.В.* Численное моделирование течений плазмы в КСПУ // Физика плазмы. 1990. Т. 16. Вып. 2. С. 147–157.
6. *Брушлинский К.В., Горшенин К.П., Сыцько Ю.И.* Математические модели стационарных МГД-течений в каналах плазменных ускорителей // Мат. моделирование. 1991. Т. 3. № 10. С. 3–19.
7. *Брушлинский К.В., Горшенин К.П.* Расчеты МГД-течений в каналах и их соотношение с экспериментальными исследованиями плазменных ускорителей // Физика плазмы. 1993. Т. 19. Вып. 5. С. 682–698.
8. *Куликовский А.Г., Любимов Г.А.* Магнитная гидродинамика. М.: Физматгиз, 1962. 246 с.
9. *Ватажин А.Б., Любимов Г.А., Регирер С.А.* Магнитогидродинамические течения в каналах. М.: Наука, 1970. 672 с.
10. *Козлов А.Н.* Влияние продольного магнитного поля на эффект Холла в канале плазменного ускорителя // Изв. АН. МЖГ. 2003. № 4. С. 165–175.
11. *Resler E.L., Sears W.R.* The prospects for magnetoaerodynamics // J. Aeronaut. Sci. 1958. V. 25. № 4. P. 235–245.
12. *Resler E.L., Sears W.R.* Magneto-gasdynamics channel flow // ZAMP. 1958. V. 9b. № 5/6. S. 509–518.

Москва

Поступила в редакцию
26.VI.2003