

УДК 532.546

© 2004 г. Э. Н. БЕРЕСЛАВСКИЙ

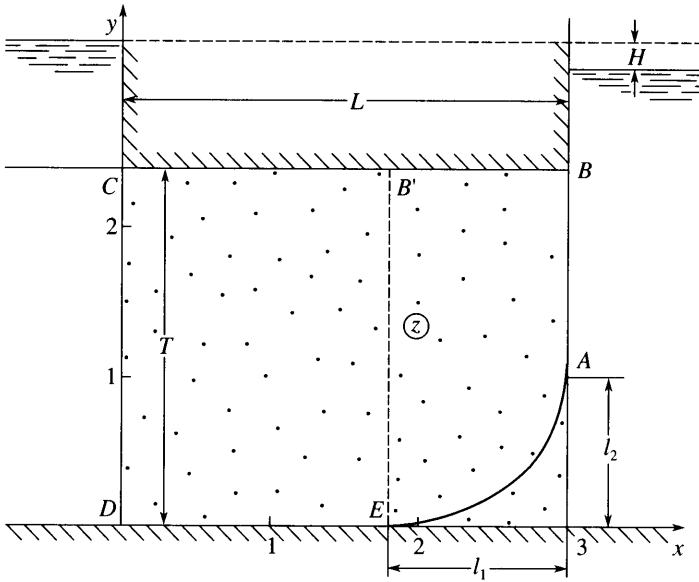
## О РАСЧЕТЕ ФИЛЬТРАЦИИ ГРУНТОВЫХ ВОД В ПРИБРЕЖНЫХ НАПОРНЫХ ПЛАСТАХ

В рамках двумерной теории установившейся фильтрации рассматривается модель течения пресных грунтовых вод в прямоугольном горизонтальном напорном пласте к морю (бассейну, резервуару, котловану и т.п.) с соленой водой. Для ее изучения формулируется и с применением метода Полубариновой-Кочиной решается смешанная многопараметрическая краевая задача теории аналитических функций. С помощью полученных аналитических зависимостей и численных расчетов проводится анализ структуры и характерных особенностей моделируемого процесса, а также влияния всех определяющих физических параметров модели на характер течения. Дается сопоставление приближенного гидравлического решения с построенным точным решением задачи.

*Ключевые слова:* фильтрация, пресные грунтовые воды, соленые воды, граница раздела, метод Полубариновой-Кочиной, конформные отображения.

Общепринято [1–3], что при расчете течений в прибрежных напорных водоносных горизонтах предполагается, что первоначально невозмущенная линия раздела между пресными и солеными водами всегда горизонтальна, вследствие чего потоки грунтовых вод поступают в море через его горизонтальное дно снизу (схема Бэра–Дагана [1]). Наряду с этим на необходимость и возможность рассмотрения также и вертикального контакта в задачах совместного движения двух жидкостей разной плотности впервые было обращено внимание в [4] (схема Полубариновой-Кочиной–Михайлова). В [5], где были рассмотрены обе указанные схемы, исследованы математические модели фильтрации пресных грунтовых вод в полубесконечном горизонтальном напорном пласте. Ниже изучается движение пресных грунтовых вод в прямоугольном горизонтальном напорном пласте конечных размеров к морю (бассейну, резервуару и т.п.) с соленой водой. По сравнению с [5] фильтрационная схема значительно усложняется из-за появления дополнительного граничного участка – эквипотенциали, соответствующей вертикальному откосу. Это приводит к увеличению общего числа неизвестных параметров, возникающих в процессе решения соответствующей краевой задачи: теперь число угловых особых точек достигает пяти и с вычислительной точки зрения трудности решения задачи вполне аналогичны классическому случаю фильтрации в прямоугольной перемычке [6].

Для решения задачи используется метод Полубариновой-Кочиной, который основан на применении аналитической теории линейных дифференциальных уравнений [7]. Сначала решение задачи преобразуется к виду, удобному для вычислений. При этом на основе соображений [6] доказывается сходимость всех полученных интегралов для геометрических размеров и физических величин, характеризующих рассматриваемый фильтрационный поток. Далее, с помощью преобразованных формул и числовых расчетов анализируется влияние каждого физического параметра модели на геометрические и фильтрационные характеристики, изучаются особенности течения, что в итоге и дает полную картину явления. Наконец, приводится сопоставление приближенного решения задачи, которое можно определить из гидравлических соображений [6], с полученным точным решением.



Фиг. 1. Форма течения, рассчитанная при  $T = 2.4$ ,  $L = 3.0$ ,  $H = 0.036$ ,  $\rho = 0.01$

**1. Постановка задачи.** Пресная вода плотности  $\rho_1$ , движущаяся в прямоугольном горизонтальном напорном пласте, который расположен на непроницаемом слое каменной соли, поступает в море с более тяжелой покоящейся соленой водой плотности  $\rho_2$  ( $\rho_2 > \rho_1$ ). При этом предполагается, что жидкости в пласте и море не смешиваются, так что в пласте у выхода в море образуется граница раздела в виде языка морской воды, отделяющая движущиеся пресные воды от покоящихся соленых. Через некоторое, достаточно большое время возможно установившееся движение [8, 9], когда рассол успокаивается, линия раздела оказывается линией тока для пресной воды, и возникает картина течения, представленная на фиг. 1. При интенсивной эксплуатации, когда может нарушиться динамическое равновесие между пресными и солеными водами, возникает угроза внедрения морской воды в водоносный пласт: язык соленой воды, двигаясь в сторону суши, может достигнуть водозабора.

Рассматриваемая задача, которая относится к напорно-безнапорной фильтрации, в случае выравнивания плотностей жидкостей, когда  $\rho_1 = \rho_2$  (т.е. в случае течения однородной жидкости), имеет весьма широкое распространение ([6], с. 392–393; [10], с. 56–57). Ситуация, подобная рассмотренной, возникает при фильтрации из водохранилища с вертикальными откосами (плотины, водоема, вертикальной скважины, земляного колодца, открытого карьера, котлована и т.п.).

Будем предполагать, что движение грунтовых вод подчиняется закону Дарси с известным коэффициентом фильтрации  $k = \text{const}$  и происходит в однородном изотропном грунте, который считается несжимаемым, как и фильтрующаяся через него жидкость. Мощность пласта  $T$  и его ширина  $L$ , действующий напор  $H$  и параметр  $\rho = \rho_2/\rho_1 - 1$  считаются заданными.

Введем комплексный потенциал течения  $\omega = \varphi + i\psi$  ( $\varphi$  – потенциал скорости,  $\psi$  – функция тока) и комплексную координату  $z = x + iy$ , отнесенные соответственно к  $kT$  и  $T$ . При указанном на фиг. 1 выборе осей координат и при совмещении плоскости сравнения потенциалов с плоскостью  $y = 0$  на границе области движения выполняются следующие краевые условия:

$$AB : x = l_1, \quad \varphi = \rho(y - T); \quad BC : y = T, \quad \psi = Q$$

$$CD : x = 0, \quad \varphi = -H; \quad DE : y = 0, \quad \phi = 0 \tag{1.1}$$

$$AE : \phi = 0, \quad \phi = \rho(y - T)$$

Здесь  $l_1$  и  $l_2$  – искомые ширина и высота языка соленой воды, вторгшегося в пресноводный пласт. Вторые условия на участках  $CD$  и  $AB$  означают, что левая вертикальная граница пласта принимается за эквипотенциаль, а вдоль его правой вертикальной границы происходит высачивание в море.

Толщину переходной зоны между пресной и соленой водой будем считать настолько незначительной, что при математическом моделировании ею можно пренебречь и полагать, как это обычно принято в подобных случаях [1, 4, 6, 8], что между обеими зонами существует резко выраженная граница раздела  $AE$ . Второе соотношение на ней – следствие предпосылок о непрерывном изменении давления при переходе через границу раздела и об отсутствии движения в зоне соленых вод ([6], с. 331–332).

**2. Построение решения.** Для решения задачи используем метод Полубариновой-Кочинной. Вводится вспомогательная переменная  $\zeta$  и функции:  $z(\zeta)$ , конформно отображающая верхнюю полуплоскость  $\zeta$  на область  $z$  (соответствие точек указано на фиг. 2,а) и производные

$$Z = \frac{dz}{d\zeta}, \quad F = \frac{d\omega}{d\zeta} \tag{2.1}$$

Определяя показатели функций  $Z$  и  $F$  около особых точек [6], найдем, что в данном случае они являются линейными комбинациями двух ветвей следующей функции Римана [7]:

$$P \left\{ \begin{matrix} 0 & 1 & c & d & \infty \\ 0 & -1/2 & -1/2 & -1/2 & 2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 & 2 \end{matrix} \zeta \right\} = \frac{1}{\sqrt{(1-\zeta)(c-\zeta)(d-\zeta)}} P \left\{ \begin{matrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{matrix} \zeta \right\} = \tag{2.2}$$

$$= \frac{Y}{\sqrt{(1-\zeta)(c-\zeta)(d-\zeta)}}$$

Из соотношения (2.2) видно, что точки  $\zeta = c$  и  $\zeta = d$  – обыкновенные точки для функции  $Y$ . Поэтому соответствующее символу Римана (2.2) линейное дифференциальное уравнение класса Фукса принимает вид

$$\zeta(1-\zeta)Y'' + (1-2\zeta)Y' - \frac{1}{4}Y = 0 \tag{2.3}$$

Уравнение (2.3) имеет два линейно-независимых интеграла [7], образующих фундаментальную систему решений в окрестности  $\zeta = 0$  [6, 7]

$$Y_1 = K(\zeta), \quad Y_2 = K'(\zeta) \tag{2.4}$$

Здесь  $K(\zeta)$  – полный эллиптический интеграл первого рода при модуле  $k = \sqrt{\zeta}$ ,  $k' = \sqrt{1-\zeta}$ ,  $K'(\zeta) = K(1-\zeta)$ . Функция  $K'(\zeta)$  является решением, содержащим логарифмическую особенность в точке  $\zeta = 0$ , вблизи которой асимптотическое представление имеет вид [11]

$$K'(\zeta) = -1/2 \ln \zeta \tag{2.5}$$

Обратимся к области комплексной скорости  $w$ , соответствующей граничным условиям (1.1), которая изображена на фиг. 2,б. Она совпадает с таковой для случая [5],



Контролем счета являются другие выражения для величин  $l_1, l_2$  и  $Q$

$$l_1 = L - A \int_d^{\infty} \frac{K(\zeta - 1/\zeta) d\zeta}{\Delta_4(\zeta)}, \quad \Delta_4 = \sqrt{\zeta(\zeta - 1)(\zeta - c)(\zeta - d)} \quad (2.12)$$

$$l_2 = T - A \int_0^1 \frac{K(1 - \zeta) d\zeta}{\Delta(\zeta)}, \quad Q = A\rho \int_0^1 \frac{K(\zeta) d\zeta}{\Delta(\zeta)} \quad (2.13)$$

**3. Преобразование формул к виду, удобному для вычислений.** Представления (2.8)–(2.13) содержат три неизвестные постоянные  $A, c$  и  $d$  ( $1 < c < d < \infty$ ). Для определения параметров отображения  $c$  и  $d$  служат уравнения (2.8) для  $L$  и  $H$ , постоянная  $A$  при этом предварительно находится из уравнения (2.9), фиксирующего мощность пласта  $T$ .

Основная вычислительная сложность задачи заключается в том, что подынтегральные функции, входящие в (2.8)–(2.13), имеют логарифмические особенности в окрестности точки  $\zeta = 0$  и, кроме того, они бесконечны на пределах интегрирования. Аналогично тому, как это сделано в [5], можно показать, что в точках  $\zeta = c$  и  $\zeta = d$  все интегралы являются сходящимися, а также конечность значений  $l_1, l_2$  и  $Q$ .

Для удобства вычислений введем обозначения  $\alpha = 1/c$  и  $\gamma = 1/d$  ( $0 < \gamma \leq \alpha < 1$ ) и, следуя [6] (с. 278), заменим  $\zeta$  соответствующими выражениями для различных интервалов, делающими подынтегральные функции в выражениях (2.8)–(2.13) конечными на пределах интегрирования. А именно, положим

$$\zeta = \tau (0 < \zeta < 1); \quad \zeta = 1 - 1/\tau (-\infty < \zeta < 0) \tau = \sin^2 t$$

$$\zeta = 1/\tau (1 < \zeta < c) \tau = \alpha + (1 - \alpha) \sin^2 t; \quad (c < \zeta < d)$$

$$\tau = \gamma + (1 - \gamma) \sin^2 t; \quad (d < \zeta < \infty) \tau = \gamma \sin^2 t$$

В результате приходим к следующим расчетным зависимостям:

$$(C = 2A\sqrt{\alpha\gamma}, \alpha_1 = 1 - \alpha, \gamma_1 = 1 - \gamma)$$

$$L = C \int_0^{\pi/2} \frac{K(\alpha_1 \cos^2 t) dt}{\Delta_1(t)}, \quad H = C\rho \int_0^{\pi/2} \frac{K(\alpha + \alpha_1 \sin^2 t) dt}{\Delta_1(t)}, \quad \Delta_1 = \sqrt{\alpha - \gamma + \alpha_1 \sin^2 t} \quad (3.1)$$

$$T = C \int_0^{\pi/2} \frac{K(\gamma_1 - (\alpha - \gamma) \sin^2 t) dt}{\Delta_2(t)}, \quad \Delta_2 = \sqrt{\gamma_1 - (\alpha - \gamma) \sin^2 t} \quad (3.2)$$

$$l_1 = C \int_0^{\pi/2} \frac{K(\sin^2 t) \sin t \cos t dt}{\Delta_3(t)}, \quad l_2 = C \int_0^{\pi/2} \frac{K(\cos^2 t) \sin t \cos t dt}{\Delta_3(t)} \quad (3.3)$$

$$\Delta_3 = \sqrt{(1 - \alpha_1 \sin^2 t)(1 - \gamma_1 \sin^2 t)} \quad (3.4)$$

$$Q = C\rho \int_0^{\pi/2} \frac{K(\gamma + (\alpha - \gamma) \sin^2 t) dt}{\Delta_2(t)} \quad (3.4)$$

$$l_1 = L - C\sqrt{\gamma} \int_0^{\pi/2} \frac{K(1 - \gamma \sin^2 t) dt}{\Delta_4(t)}, \quad \Delta_4 = \sqrt{(1 - \gamma \sin^2 t)(\alpha - \gamma \sin^2 t)} \quad (3.5)$$

$$l_2 = T - C \int_0^{\pi/2} \frac{K(\cos^2 t) \sin t dt}{\Delta(t)}, \quad Q = C\rho \int_0^{\pi/2} \frac{K(\sin^2 t) \sin t dt}{\Delta(t)} \quad (3.6)$$

$$\Delta = \sqrt{(1 - \alpha \sin^2 t)(1 - \gamma \sin^2 t)}$$

**4. Расчет схемы течения и анализ численных результатов.** На фиг. 1 изображена картина течения, рассчитанная при  $T = 2.4$ ,  $L = 3.0$ ,  $H = 0.036$  и  $\rho = 0.01$ . Результаты расчетов влияния определяющих физических параметров  $T$ ,  $L$ ,  $\rho$  и  $H$  на размеры языка  $l_1$  и  $l_2$  и расход  $Q$  приведены в табл. 1 и 2. В каждом из двух блоков таблиц (они разделены вертикальными линиями) варьируется (в допустимом диапазоне, причем так, чтобы выполнялось условие  $H - \rho T > 0$ , которое непосредственно вытекает из физических предпосылок) один из указанных параметров, а значения остальных фиксируются  $T = 2.4$ ,  $L = 3.0$ ,  $\rho = 0.01$  и  $H = 0.036$ . На фиг. 3–6 представлены зависимости  $l_1$  и  $l_2$  от  $T$ ,  $L$ ,  $\rho$  и  $H$ .

Анализ таблиц и графиков приводит к следующим выводам.

Увеличение размеров пласта и плотности соленых вод и уменьшение напора увеличивают размеры языка.

Обращает на себя внимание одинаковый качественный характер зависимостей величин  $l_1$  и  $l_2$  от параметров  $T$ ,  $L$  и  $\rho$ : увеличение толщины и ширины пласта и плотности соленых вод приводит к росту размеров языка соленой воды. Так, при увеличении мощности  $T$  в 3 раза величины  $l_1$  и  $l_2$  возрастают в 5.7 и 4.9 раза соответственно, подобные измерения прослеживаются и при варьировании ширины  $L$ . При этом размеры языка могут быть весьма значительными: из табл. 1 следует, что при  $L = 6$ ,  $T = 2/4$  имеем  $l_2 = 1.6962$ , а при  $T = 3.0$ ,  $L = 3.0$  получаем  $l_1 = 1.9072$ , т.е. высота и ширина языка могут достигать соответственно 70.6 и 63.6% от мощности и ширины пласта.

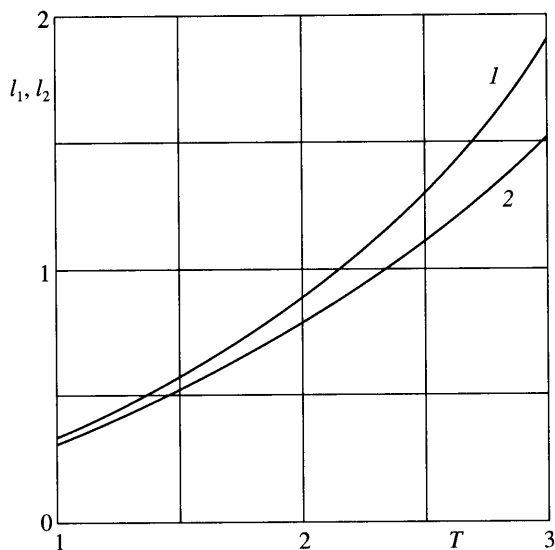
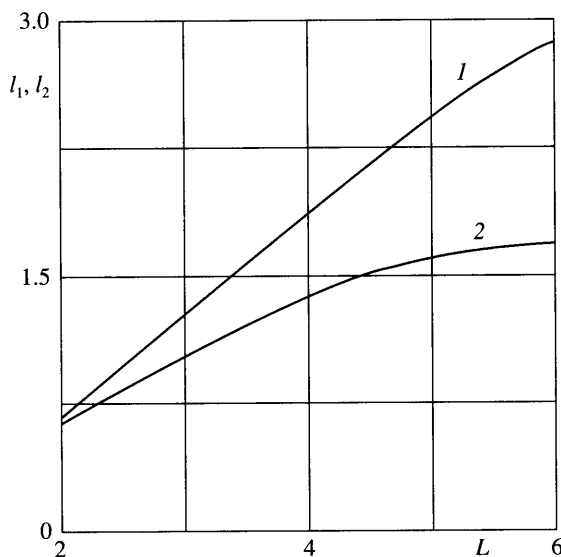
В то же время наблюдается совершенно противоположный характер изменений размеров языка и расхода при варьировании параметров  $\rho$  и  $H$ . Разделы табл. 2, относящиеся к этим параметрам, отражают закономерность, которая является естественной с физической точки зрения: уменьшение напора  $H$  и увеличение параметра  $\rho$  –

Таблица 1

$T \cdot 10$	$l_1$	$l_2$	$Q \cdot 10^4$	$L$	$l_1$	$l_2$	$Q \cdot 10^4$
10	0.3333	0.3108	103	2	0.6840	0.6430	276
16	0.6320	0.5743	149	3	1.1985	1.0354	192
20	0.8851	0.7869	173	4	1.7795	1.3502	143
24	1.1985	1.0354	192	5	2.3814	1.5694	112
30	1.9072	0.5166	205	6	2.8781	1.6962	95

Таблица 2

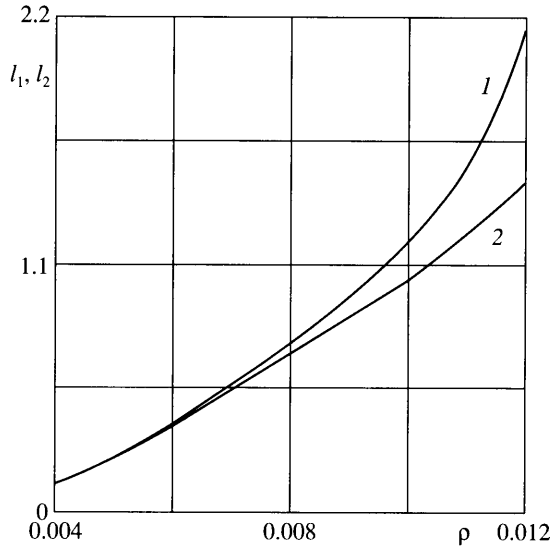
$\rho \cdot 10^3$	$l_1$	$l_2$	$Q \cdot 10^4$	$H \cdot 10^3$	$l_1$	$l_2$	$Q \cdot 10^4$
4	0.1237	0.1234	215	32	1.6816	1.2991	151
6	0.3925	0.3852	212	36	1.1985	1.0354	192
8	0.7550	0.7084	205	56	0.4816	0.4683	323
10	1.1985	1.0354	192	78	0.1809	0.1801	473
12	2.1462	1.4697	152	100	0.051	0.051	660

Фиг. 3. Зависимость  $l_1$  и  $l_2$  от  $T$  при  $L = 3.0$ ,  $H = 0.036$ ,  $\rho = 0.01$ Фиг. 4. Зависимость  $l_1$  и  $l_2$  от  $L$  при  $T = 2.4$ ,  $H = 0.036$ ,  $\rho = 0.01$ 

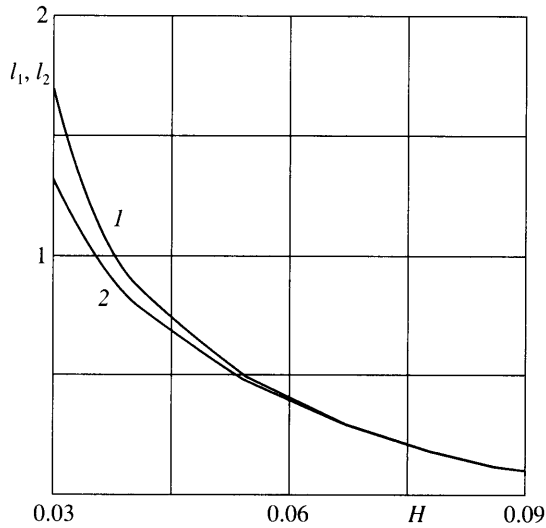
оба эти фактора, способствуя как бы усилению подпора со стороны соленых вод, приводят к увеличению размеров языка и расхода.

Весьма существенное влияние на размеры языка оказывает плотность соленых вод: при возрастании параметра  $\rho$  в 3 раза величины  $l_1$  и  $l_2$  возрастают соответственно на 1635 и 1091%.

Однако наиболее значительное влияние на размеры языка  $l_1$  и  $l_2$  оказывает действующий напор  $H$ . Так, при возрастании параметра  $H$  в 3.1 раза величины  $l_1$  и  $l_2$  изме-



Фиг. 5. Зависимость  $l_1$  и  $l_2$  от  $\rho$  при  $T = 2.4$ ,  $L = 3.0$ ,  $H = 0.036$



Фиг. 6. Зависимость  $l_1$  и  $l_2$  от  $H$  при  $T = 2.4$ ,  $L = 3.0$ ,  $\rho = 0.01$

няются соответственно в 36.4 и 28.1 раз; расход при этом также претерпевает наибольшие изменения: параметр  $Q$  увеличивается почти на 350%.

Для всех блоков таблиц примечательно, что в случае малых значений параметров  $T$ ,  $L$  и  $\rho$  и больших значений  $H$  выполняется приближенное равенство  $l_1 \approx l_2$ . И наоборот, для больших значений  $T$ ,  $L$  и  $\rho$  и малых  $H$  имеем  $l_1 \approx ml_2$ , где  $1.26 \leq m \leq 1.69$ .

При слиянии точек  $C$  и  $D$  в плоскостях  $z$  и  $\zeta$ , что соответствует значениям параметров  $L = \infty$  и  $c = d$ , имеем схему течения в полубесконечном напорном водоносном



слое. Результаты для этого случая получаются из формул (3.1)–(3.6) при  $\alpha = \gamma$ . При этом из уравнений (3.2) и (3.4) вытекают выражения

$$T = C \int_0^{\pi/2} \frac{K(\alpha_1) dt}{\sqrt{\alpha_1}} = \frac{A\alpha K(\alpha_1)\pi}{\sqrt{\alpha_1}} = \frac{A\pi K(1/c)}{\sqrt{c(c-1)}} \quad (4.1)$$

$$Q = C\rho \int_0^{\pi/2} \frac{K(\alpha) dt}{\sqrt{\alpha_1}} = \frac{A\rho K(\alpha)}{\sqrt{\alpha_1}} = \frac{A\rho K(1/c)}{\sqrt{c(c-1)}}$$

Формулы (4.1) совпадают с (2.8) [5] и служат для определения неизвестных параметров  $A$  и  $c$  по заданным значениям  $T$  и  $Q$ .

Поскольку имеется точное решение задачи, то можно оценить погрешность приближенного решения, полученного исходя из гидравлических предпосылок [12]. В гидравлической постановке (при осреднении горизонтальных составляющих скорости по вертикали и учете модели предельно анизотропных грунтов [13]) из рассмотрения фрагментов  $B'CDE$  и  $ABB'E$  ([4]; [6, с. 392–393]; [10, с. 56–57]) можно получить выражения

$$l_1 = \frac{\rho LT}{2H - \rho T}, \quad Q = \frac{T(2H - \rho T)}{2L} \quad (4.2)$$

Формулы (4.2) могут быть получены также непосредственно из интегральной формулы [14].

Сравнение формул (4.2) с результатами табл. 1 и 2 показывает, что если относительная погрешность формулы для  $Q$  лежит в пределах 1–4% и доходит до 21.8% лишь при малых значениях  $\rho$ , то расхождения формулы для  $l_1$  с результатами точного решения весьма значительны. Так, при малых значениях  $\rho$ , а также больших значениях напора  $H$  разница между приближенными значениями  $l_1$  и соответствующими точными значениями достигает 169–3823%.

**Заключение.** Найдено новое точное аналитическое решение задачи о фильтрации пресных грунтовых вод в прямоугольном горизонтальном напорном пласте к морю с соленой водой (по схеме Полубариновой-Кочиной – Михайлова). Посредством числовых расчетов установлено, что увеличение размеров пласта и плотности соленых вод и уменьшение напора приводит к росту размеров языка морской воды, вторгшегося в пресноводный пласт. Найдено значительное расхождение результатов точного решения с приближенным гидравлическим решением задачи.

Автор признателен А.В. Костерину и М.Г. Хубляряну за критические замечания и внимание к работе.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бэр Я., Заславски Д., Ирмей С. Физико-математические основы фильтрации воды. М.: Мир, 1971. 452 с.
2. Хублярян М.Г., Фролов А.П. Моделирование процессов интрузии в эстуариях и подземных водоносных горизонтах. М.: Наука, 1988. 143 с.
3. Фролов А.П., Хублярян М.Г. Проникновение соленой воды в пресноводные прибрежные горизонты // Водные ресурсы. 1986. № 2. С. 58–63.
4. Михайлов Г.К. Строгое решение задачи об истечении грунтовых вод из горизонтального пласта в бассейн с более тяжелой жидкостью // Докл. АН СССР. 1956. Т. 110. № 6. С. 945–948.
5. Береславский Э.Н. Гидродинамическое исследование некоторых течений грунтовых вод в прибрежных напорных водоносных слоях // Изв. РАН. МЖГ. 2003. № 3. С. 96–106.
6. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Гостехиздат, 1952. 676 с.; 2-е изд. М.: Наука, 1977. 664 с.

7. Голубев В.В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 436 с.
8. Полубаринова-Кочина П.Я. Некоторые задачи плоского движения грунтовых вод. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1942. 143 с.
9. Полубаринова-Кочина П.Я. О фильтрации в анизотропном грунте // ПММ. 1940. Т. 4. Вып. 2. С. 101–104.
10. Аравин В.И., Нумеров С.Н. Фильтрационные расчеты гидротехнических сооружений. М.; Л.: Гостехиздат, 1955. 291 с.
11. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
12. Форхгеймер Ф. Гидравлика, М.; Л.: ОНТИ, Глав. ред. энерг. лит., 1935. 615 с.
13. Михайлов Г.К. Применение модели предельно-анизотропных грунтов для оценки решений некоторых краевых задач о движении потока грунтовых вод по водоупору // Инж. сб. 1953. Т. 15. С. 159–168.
14. Чарный И.А. Об одном интегральном соотношении и его приложениях к решению некоторых задач безнапорной фильтрации // Докл. АН СССР. 1953. Т. 92. № 2. С. 251–254.

Санкт-Петербург  
E-mail: beres@nwgs.m.ru

Поступила в редакцию  
9.IX.2003