

УДК 532.517.013.2

© 2004 г. С. В. МАНУЙЛОВИЧ

**ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЭВОЛЮЦИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ
В ТЕЧЕНИИ ГАМЕЛЯ**

Исследуется распространение малых возмущений в течениях, неоднородных в продольном направлении. Процесс эволюции возмущений изучен на примере простейшего из неоднородных потоков – радиального течения вязкой несжимаемой жидкости между плоскими непараллельными стенками. С помощью обобщения метода вариации постоянных соответствующая краевая задача сводится к бесконечномерной эволюционной системе обыкновенных дифференциальных уравнений для комплексных амплитуд собственных решений локально-однородной задачи. Физическая интерпретация метода заключается в представлении процесса эволюции возмущений в виде сопутствующих процессов независимого усиления (ослабления) нормальных мод локально-однородной задачи и их перераспределения друг в друга на местной неоднородности основного течения. Проведенные расчеты показывают перспективность применения усеченных вариантов метода для описания линейной стадии ламинарно-турбулентного перехода в пограничном слое.

Ключевые слова: устойчивость, продольно-неоднородное течение.

Процесс ламинарно-турбулентного перехода в пограничном слое на крыле можно условно разделить на две основных стадии [1]. На первой, линейной стадии возмущения набегающего потока проникают в пристеночную область, преобразуясь во внутренние волны пограничного слоя (восприимчивость); затем эти волны подвергаются протяженной в продольном направлении фазе параметрического усиления (неустойчивость). При превышении интенсивностью пульсаций некоторого порогового уровня наступает вторая, сравнительная короткая стадия переходного процесса, характеризующаяся нелинейным взаимодействием возмущений, образованием турбулентных пятен и заканчивающаяся формированием развитого турбулентного движения. Таким образом, исследование наиболее сложных, нелинейных процессов существенно при описании течения в турбулентном пограничном слое. В то же время изучение линейной стадии развития возмущений является определяющим при решении важной инженерной проблемы предсказания положения ламинарно-турбулентного перехода. Линейные постановки встречаются также при исследовании различных способов управления возмущенным движением в ламинарном пограничном слое [2].

При решении проблемы определения положения перехода хронологически первым получил развитие метод, основанный на оценке коэффициента усиления возмущений с помощью допущения о квазиоднородном характере течения в невозмущенном пограничном слое (так называемый e^N -метод). В этом подходе пренебрегается продольной неоднородностью (и связанной с ней непараллельностью) основного течения. Скорость роста возмущений определяется инкрементом нарастания наиболее неустойчивой моды локально-однородной задачи (в простейшем случае являющейся собственным решением краевой задачи для уравнения Орра–Зоммерфельда [3]). Наиболее существенный недостаток этого метода – пренебрежение величиной начальной амплитуды неустойчивого возмущения. Кроме того, использование квазиоднородного приближения для вычисления коэффициента усиления корректно только в случае

очень малой продольной неоднородности, что не выполняется на ламинарном участке течения.

От этих недостатков свободны методы прямого численного моделирования (DNS), однако такой анализ явлений восприимчивости и устойчивости требует слишком больших вычислительных затрат [4]. Для уменьшения объема вычислений предпринимались попытки упростить полную систему уравнений путем замены ее системой параболического типа [5], но метод параболизированных уравнений устойчивости (PSE-метод), как и e^N -метод, оказался работоспособным только в случае слабонеоднородных течений.

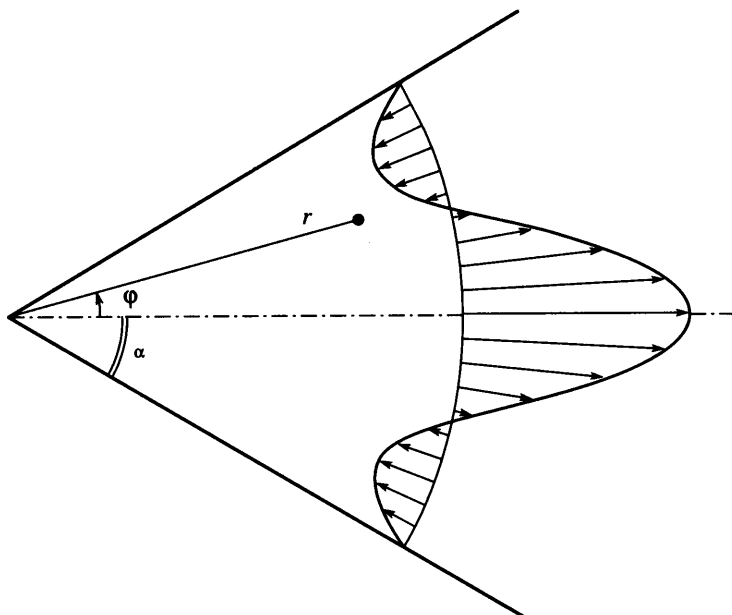
В данной работе для изучения эволюции возмущений в неоднородных течениях используется метод, аналогичный широко применяемому в квантовой механике при исследовании переходов, инициированных зависящим от времени потенциалом [6]. Этот метод обобщает известный из курса обыкновенных дифференциальных уравнений метод вариации постоянных на случай уравнений в частных производных. В соответствии с упомянутым подходом искомое решение линейной неоднородной задачи в каждом сечении по продольной переменной представляется в виде суперпозиции собственных функций локально-однородной задачи. В результате задача сводится к бесконечномерной системе обыкновенных дифференциальных уравнений для комплексных коэффициентов разложения.

Предлагаемый метод был протестирован в [7] на примере задачи о распространении возмущений плоского течения Пуазейля в канале, содержащем секцию со стенками переменной податливости. Удобство постановки [7] заключалось в том, что решение задачи могло быть получено независимо с помощью другого точного метода расчета (метода интегрального уравнения). Расчеты, проведенные последним методом, использовались затем в качестве “эталонных” при сравнении с результатами, вычисленными по предлагаемой здесь методике. Сопоставление результатов показало, что они совпадают с высокой точностью уже при сравнительно небольшом числе учитываемых мод локально-однородной задачи.

В постановке [7] основное течение однородно в продольном направлении, а неоднородность задачи в целом обусловлена переменной упругостью стенок канала (зависимостью граничных условий на стенках от продольной переменной). В данной работе эффективность метода проиллюстрирована на примере задачи об эволюции возмущений в простейшем течении с неоднородным ядром – течении вязкой несжимаемой жидкости в расширяющемся канале с плоскими стенками.

1. Линеаризация краевой задачи. Будем изучать нестационарное двумерное возмущенное движение вязкой несжимаемой жидкости в канале с плоскими непараллельными границами, составляющими угол α с осью симметрии (фиг. 1). Будем предполагать, что течение мало отличается от стационарного движения, описываемого точным решением Гамеля [8]. В качестве независимых переменных будем использовать полярные координаты r , φ и время t . Радиальную и азимутальную компоненты скорости обозначим v_r и v_φ , давление – p . Независимые переменные и параметры возмущенного течения будем считать безразмерными, используя в качестве основных единиц плотность жидкости ρ° , а также масштабы длины l° и скорости v° , способ выбора которых обсуждается ниже.

Объемный расход жидкости в невозмущенном потоке характеризуется размерной величиной $m^\circ = v_{\max}^\circ(r^\circ)r^\circ = \text{const}$ (v_{\max}° – максимальное значение скорости при фиксированном r°), но основное течение не имеет выделенных масштабов длины и скорости. Чтобы сформировать их для случая возмущенного движения, заметим, что произвольное нестационарное возмущение представимо в виде суперпозиции гармонических по времени компонент, которые можно исследовать независимо (ввиду стационарности основного течения). В этой связи будем в дальнейшем рассматривать одну гармонику



Фиг. 1. Схема осредненного течения при $R = 100$, $\alpha = \pi/6$

возмущения, имеющую размерную частоту ω° . Это позволяет ввести искомые масштабы $l^\circ = \sqrt{m^\circ/\omega^\circ}$, $v^\circ = \sqrt{m^\circ\omega^\circ}$.

В переменных $\xi = \ln r$, φ система уравнений Навье–Стокса для функций $u = rv_r$, $v = rv_\varphi$, $f = r^2 p$ приобретает вид

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} = 0$$

$$e^{2\xi} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial \xi} + v \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial \xi} - u^2 - v^2 - 2f = \frac{\partial g}{\partial \varphi} \quad (1.1)$$

$$e^{2\xi} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial \xi} + v \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial \varphi} = -\frac{\partial g}{\partial \xi} + 2g$$

$$Rg = \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{\partial v}{\partial \xi}$$

Здесь $R = v^\circ l^\circ / \nu^\circ$ – число Рейнольдса (ν° – размерный кинематический коэффициент вязкости). Функция g имеет смысл нормированной на R завихренности течения; с ее введением уравнения Навье–Стокса приобретают вид системы, содержащей только первые производные от неизвестных функций.

Граничные условия для системы (1.1) следуют из условий прилипания

$$u(\xi, \pm\alpha) = v(\xi, \pm\alpha) = 0 \quad (1.2)$$

Форма уравнений (1.1) удобна при исследовании распространения возмущений в течениях рассматриваемого типа, поскольку “продольная” неоднородность (зависимость коэффициентов от переменной ξ) сохраняется только в нестационарных членах.

Решение краевой задачи (1.1), (1.2), описывающее класс слабозвучущих движений в плоском диффузоре, будем искать в виде

$$\mathbf{q} = \mathbf{Q}(\varphi) + [\varepsilon \mathbf{q}'(\xi, \varphi) \exp(-it) + \text{с.с.}] + \mathbf{O}(|\varepsilon|^2), \quad |\varepsilon| \ll 1 \quad (1.3)$$

Здесь \mathbf{q} – вектор с компонентами $q_{1,2,3,4} = v, u, f, g$. Главное приближение \mathbf{Q} в амплитудном разложении (1.3) ($Q_{1,2,3,4} = V, \dot{U}, F, G$) соответствует радиальному ($V \equiv 0$) течению Гамеля [8]. Функция U удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^3 U}{d\varphi^3} + 2RU \frac{dU}{d\varphi} + 4 \frac{dU}{d\varphi} = 0$$

а также условиям прилипания $U(\pm\alpha) = 0$ и нормировки $\max U = 1$. При анализе развития возмущений выражения для функций F и G не использованы и поэтому не приводятся.

В общем случае при заданных значениях параметров R, α решение краевой задачи, описывающей течение Гамеля, не единственное. В связи с этим подчеркнем, что все проиллюстрированные ниже расчеты выполнены для $R = 100, \alpha = \pi/6$, а единственность выбранного симметричного решения обеспечивается данными Коши, выставляемыми на оси канала

$$U(0) = 1, \quad \frac{dU}{d\varphi}(0) = 0, \quad \frac{d^2 U}{d\varphi^2}(0) = -75.561$$

Исследуемое основное течение показано на фиг. 1. В окрестности оси канала поток расходящийся; у стенок имеются области возвратного течения.

Комплексная амплитуда \mathbf{q}' возмущения ($q'_{1,2,3,4} = v', u', f', g'$) удовлетворяет линейаризованной системе (1.1), для удобства изложения записываемой в векторной форме

$$\frac{\partial \mathbf{q}'}{\partial \varphi} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{q}'}{\partial \xi} + \mathbf{B} \mathbf{q}' = \mathbf{0} \quad (1.4)$$

Не равные 0 элементы матриц \mathbf{A} и \mathbf{B} определяются равенствами:

$$A_{12} = A_{34} = -A_{21} = -A_{43} = 1, \quad A_{31} = -A_{42} = U; \quad B_{24} = -R, \\ B_{31} = -ie^{2\xi}, \quad B_{43} = -B_{34} = 2, \quad B_{41} = -dU/d\varphi, \quad B_{42} = ie^{2\xi} + 2U$$

На стенках канала возмущения удовлетворяют условиям прилипания

$$q'_1(\xi, \pm\alpha) = q'_2(\xi, \pm\alpha) = 0 \quad (1.5)$$

Краевая задача (1.4), (1.5) описывает наиболее широкий класс нестационарных возмущений течения Гамеля. Вопрос о более детальной классификации собственных решений (в частности, по типу симметрии и по характеру асимптотических условий, задаваемых при $\xi \rightarrow \pm\infty$) будет подробно исследован в разд. 3.

2. Обоснование метода расчета. Физическая интерпретация процесса распространения возмущений. Основным обстоятельством, усложняющим теоретический и численный анализ пространственной эволюции возмущений в течении Гамеля, является продольная неоднородность основного течения – зависимость коэффициентов линейаризованной системы уравнений Навье–Стокса (системы (1.4)) от переменной ξ . Если продольная неоднородность осредненного течения мала (как в пограничном слое на крыле при достаточном удалении от передней кромки), эта трудность обычно преодолевалась следующим образом. Рассматриваемая область изменения продольной

переменной разбивалась на участки, на каждом из которых продольно-неоднородное основное течение аппроксимировалось однородным путем замены профилей осредненного течения фиксированными, вычисленными в некоторой внутренней точке промежутка. После этого скорость роста возмущений вниз по потоку на каждом участке вычислялась в рамках классической теории устойчивости [3].

Несмотря на то что рассматриваемое в данной работе течение Гамеля не может считаться слабо неоднородным, анализ процесса распространения возмущений в нем будем строить на базе решения локально-однородной задачи. Для формулировки последней зафиксируем коэффициенты системы (1.4) в некоторой точке $\xi = \xi_0$. Краевую задачу для полученной системы с условиями (1.5) будем называть ξ_0 -однородной; ее решение будем искать в классе нормальных мод

$$\mathbf{q}' = \mathbf{q}_n(\varphi; \xi_0) \exp[ik_n(\xi_0)\xi]$$

Комплексное волновое число $k_n(\xi)$ и соответствующая ему комплексная функция $\mathbf{q}_n(\varphi; \xi)$ удовлетворяют задаче на собственные значения

$$\mathbf{L}\mathbf{q}_n = \mathbf{0}, \quad \mathbf{L}(k_n, \xi) = \frac{d}{d\varphi} + ik_n\mathbf{A} + \mathbf{B}(\xi) \quad (2.1)$$

$$q_{n1}(\pm\alpha) = q_{n2}(\pm\alpha) = 0, \quad q_{n3}(\alpha) = 1$$

Однородные краевые условия следуют из условий прилипания (1.5); они являются основными в постановке задачи на собственные значения. Последнее равенство (2.1) нормирует собственную функцию и обеспечивает единственность решения краевой задачи. Как и в случае плоского течения Пуазейля [9], задача на собственные значения сформулирована в ограниченной области $(-\alpha \leq \varphi \leq \alpha)$, поэтому спектр ξ -однородной задачи (2.1) является бесконечным и дискретным: $n = 1, \dots, \infty$. В дальнейшем собственные значения и собственные функции, отнесенные к точке $\xi = \xi_j$, будем для краткости обозначать $k_n^{(j)}$ и $\mathbf{q}_n^{(j)}(\varphi)$.

Для описания физического механизма эволюции возмущений в неоднородных течениях рассмотрим модельную задачу. Предположим, что неоднородность имеет скачкообразный вид, так что параметры основного течения не зависят от продольной переменной как при $\xi < 0$, так и при $\xi > 0$, а при $\xi = 0$ испытывают разрыв. Этим допущением удовлетворяет линейная краевая задача для системы

$$\frac{\partial \mathbf{q}'}{\partial \varphi} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{q}'}{\partial \xi} + [\theta(-\xi)\mathbf{B}(\xi_1) + \theta(\xi)\mathbf{B}(\xi_2)]\mathbf{q}' = \mathbf{0} \quad (2.2)$$

с граничными условиями (1.5). В этой системе введены действительные параметры $\xi_{1,2}$, так что при $\xi < 0$ и при $\xi > 0$ она совпадает с системой (1.4), коэффициенты которой "заморожены" в точках $\xi = \xi_1$ и $\xi = \xi_2$ соответственно. Таким образом, при $\xi < 0$ краевая задача для системы уравнений (2.2) является ξ_1 -однородной, а при $\xi > 0$ – ξ_2 -однородной (θ – функция Хевисайда).

Будем считать заданной структуру возмущенного движения вверх по потоку от разрыва

$$\mathbf{q}' = \mathbf{q}^{(1)}(\xi, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(1)} \mathbf{q}_n^{(1)}(\varphi) \exp(ik_n^{(1)}\xi), \quad \xi < 0 \quad (2.3)$$

и определим вид возмущения вниз по потоку. Перепишем систему (2.2) в эквивалентной форме

$$\frac{\partial \mathbf{q}'}{\partial \varphi} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{q}'}{\partial \xi} + \mathbf{B}(\xi_2)\mathbf{q}' = -\theta(-\xi)[\mathbf{B}(\xi_1) - \mathbf{B}(\xi_2)]\mathbf{q}^{(1)} \quad (2.4)$$

В новой формулировке задача сводится к нахождению возмущения для всех ξ . В левой части системы (2.4) на функцию \mathbf{q}' действует ξ_2 -однородный оператор, правая часть представляет собой известную функцию переменных ξ, φ , имеющую разрыв в точке $\xi = 0$. В такой форме задача оказывается математически эквивалентной задаче о вынужденных колебаниях плоского течения Пуазейля [9], ее решение определяет кусочно-гладкую функцию, для вычисления которой применим аппарат преобразования Фурье по переменной ξ .

Будем искать решение краевой задачи (2.4), (1.5) в виде интеграла

$$\mathbf{q}' = (2\pi i)^{-1} \sum_{m=1}^{\infty} c_m^{(1)} \int_C \frac{\mathbf{q}_k(\varphi; m)}{k_m^{(1)} - k} \exp(ik\xi) dk \quad (2.5)$$

Полюса подынтегрального выражения в (2.5) разделяются на два класса. Первый формируют нули знаменателей в (2.5), второй составляют полюса фурье-амплитуды \mathbf{q}_k , удовлетворяющей неоднородной краевой задаче

$$\begin{aligned} L(k, \xi_2) \mathbf{q}_k &= L(k_m^{(1)}, \xi_2) \mathbf{q}_m^{(1)} \\ q_{k1}(\pm\alpha) &= q_{k2}(\pm\alpha) = 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Таким образом, полюса первого и второго типов являются собственными значениями ξ_1 -однородной и ξ_2 -однородной задач соответственно. Интегрирование в (2.5) производится вдоль контура C , начинающегося и заканчивающегося в бесконечности и обходящего все полюса $k = k_m^{(1)}$ сверху, а все полюса $k = k_n^{(2)}$ – снизу.

Для вычисления интеграла (2.5) воспользуемся теоремой Коши о вычетах. При $\xi < 0$ получаем выражение, совпадающее с формулой (2.3) (именно этим обстоятельством обусловлен выбор контура C). Вниз по потоку от точки разрыва имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{q}' &= \mathbf{q}^{(2)}(\xi, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(2)} \mathbf{q}_n^{(2)}(\varphi) \exp(ik_n^{(2)}\xi), \quad \xi > 0 \\ c_n^{(2)} &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_{nm}}{k_m^{(1)} - k_n^{(2)}} c_m^{(1)}, \quad C_{nm} = \operatorname{res}_{k=k_n^{(2)}} q_{k3}(\alpha; m) \end{aligned} \quad (2.7)$$

т.е. возмущение представляет собой суперпозицию собственных решений ξ_2 -однородной задачи. Величины вычетов могут быть получены непосредственно с помощью численного решения задачи (2.6) подобно тому, как это сделано в [9] при расчете коэффициентов восприимчивости течения Пуазейля к вибрации стенок канала. В данной работе с целью прояснения физического механизма распространения возмущений в неоднородных течениях для вычисления коэффициентов C_{nm} будем использовать другой метод, основанный на свойствах ортогональности собственных функций.

В связи с тем что оператор L – несамосопряженный, для формулировки свойств ортогональности необходимо ввести комплексные функции $\mathbf{q}_n^+(\varphi; \xi)$ – решения сопряженной задачи на собственные значения

$$\begin{aligned} L^+ \mathbf{q}_n^+ &= \mathbf{0}, \quad L^+(k_n, \xi) = -\frac{d}{d\varphi} - ik_n^* \mathbf{A}^{*T} + \mathbf{B}^{*T}(\xi) \\ q_{n3}^+(\pm\alpha) &= q_{n4}^+(\pm\alpha) = 0, \quad q_{n1}^+(\alpha) = 1 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Здесь звездочкой обозначены комплексно-сопряженные величины; последнее равенство (2.8) – условие нормировки.

Спектры основной (2.1) и сопряженной (2.8) задач совпадают, а собственные функции обладают свойством ортогональности

$$\{\mathbf{q}_n, \mathbf{q}_m\} = \delta_{nm}$$

$$\{y, x\} = \frac{(y^+, \mathbf{A}x)}{(y^+, \mathbf{A}y)}, \quad (y, x) = \sum_{j=1-\alpha}^4 \int y_j^*(\varphi) x_j(\varphi) d\varphi \quad (2.9)$$

где δ_{nm} – символ Кронеккера.

Преобразуем систему уравнений (2.6) к эквивалентному виду

$$i(k - k_n^{(2)})\mathbf{A}\mathbf{q}_k + \mathbf{L}(k_n^{(2)}, \xi_2)\mathbf{q}_k = i(k_n^{(1)} - k_m^{(2)})\mathbf{A}\mathbf{q}_m^{(1)} + \mathbf{L}(k_n^{(2)}, \xi_2)\mathbf{q}_m^{(1)}$$

скалярно умножим полученное равенство слева на $\mathbf{q}_n^{(2)+}$, затем проинтегрируем результат по φ от $-\alpha$ до α и совершим предельный переход $k \rightarrow k_n^{(2)}$. В результате получим

$$C_{nm} = (k_m^{(1)} - k_n^{(2)})\{\mathbf{q}_n^{(2)}, \mathbf{q}_m^{(1)}\}$$

Здесь используется равенство $(\mathbf{q}^+, \mathbf{L}x) = 0$, выполненное для любой гладкой функции $x(\varphi)$, удовлетворяющей условиям $x_1(\pm\alpha) = x_2(\pm\alpha) = 0$, а также тот факт, что при $k \rightarrow k_n^{(2)}$ для фурье-амплитуды справедливо разложение

$$\mathbf{q}_k(\varphi; m) = \frac{C_{nm}}{k - k_n^{(2)}}\mathbf{q}_n^{(2)}(\varphi) + O(1)$$

Таким образом, бесконечномерные векторы $\mathbf{c}^{(1)}, \mathbf{c}^{(2)}$, составленные из коэффициентов $c_n^{(1)}, c_n^{(2)}$ разложений (2.3), (2.7), связаны между собой посредством бесконечномерной комплексной матрицы рассеяния $\mathbf{S}(\xi_2, \xi_1)$:

$$\mathbf{c}^{(2)} = \mathbf{S}\mathbf{c}^{(1)}, \quad S_{nm} = \{\mathbf{q}_n^{(2)}, \mathbf{q}_m^{(1)}\} \quad (2.10)$$

Подчеркнем, что решение (2.10) задачи о рассеянии возмущений на модельной неоднородности построено методом Фурье. Этот же результат может быть получен на основе предположения о непрерывности возмущения при $\xi = 0$

$$\mathbf{q}^{(1)}(-0, \varphi) = \mathbf{q}^{(2)}(+0, \varphi)$$

и допущения о полноте системы собственных функций, поскольку элементы матрицы рассеяния (2.10) в силу (2.9) совпадают с коэффициентами формального разложения собственных функций ξ_1 -однородной задачи по собственным функциям ξ_2 -однородной задачи:

$$\mathbf{q}_m^{(1)}(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} S_{nm}\mathbf{q}_n^{(2)}(\varphi) \quad (2.11)$$

Это замечание косвенно свидетельствует о полноте системы собственных функций ξ -однородной задачи (2.1). Процесс рассеяния мод может трактоваться как переразложение возмущения в точке $\xi = 0$ по новой системе собственных функций.

Опишем свойства матрицы рассеяния. Из (2.11) следует свойство мультипликативности:

$$\mathbf{S}(\xi_1, \xi_2)\mathbf{S}(\xi_2, \xi_3) = \mathbf{S}(\xi_1, \xi_3) \quad (2.12)$$

для любых ξ_1, ξ_2, ξ_3 . В частности, $\mathbf{S}^{-1}(\xi_1, \xi_2) = \mathbf{S}(\xi_2, \xi_1)$, так как $\mathbf{S}(\xi, \xi) = \mathbf{E}$.

Полученное решение модельной задачи о рассеянии возмущения произвольного вида на неоднородности типа θ -функции дает ключ к построению метода решения общей задачи (1.4), (1.5). Для формулировки метода проведем разбиение $\{\xi_j\}$ области течения по переменной ξ . Задачу эволюции возмущения в продольно-неоднородном течении будем аппроксимировать задачей со ступенчатым распределением неоднородности путем замены в системе (1.4) переменной матрицы $\mathbf{B}(\xi)$ на постоянную матрицу $\mathbf{B}(\xi_j)$ на промежутках $[\xi_j, \xi_{j+1}]$ произведенного разбиения.

Методом индукции (по числу промежутков разбиения) с помощью преобразования Фурье и с учетом свойства (2.12) можно показать, что на каждом из промежутков решение имеет вид суперпозиции собственных функций соответствующих ξ_j -однородных задач

$$\mathbf{q}' = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(j)} \mathbf{q}_n^{(j)}(\varphi) \exp[ik_n^{(j)}(\xi - \xi_j)], \quad \xi_j < \xi < \xi_{j+1} \quad (2.13)$$

т.е. возмущение модельного основного течения представляет собой совокупность нормальных мод локально-однородной задачи, распространяющихся независимо. На стыках соседних промежутков происходит перераспределение мод друг в друга по закону (2.10), поэтому векторы комплексных амплитуд $\mathbf{c}^{(j)}$ и $\mathbf{c}^{(j+1)}$ связаны между собой матрицами перехода \mathbf{P}_j :

$$\mathbf{c}^{(j+1)} = \mathbf{P}_j \mathbf{c}^{(j)}, \quad \mathbf{P}_j = \mathbf{S}(\xi_{j+1}, \xi_j) \mathbf{T}(\xi_{j+1}, \xi_j) \quad (2.14)$$

Здесь \mathbf{T} – диагональная матрица, характеризующая изменение комплексной амплитуды мод на участках ξ_j -однородного течения

$$T_{nm} = \exp[ik_n^{(j)}(\xi_{j+1} - \xi_j)] \delta_{nm}$$

Итак, эволюция произвольного возмущения в модельном течении со ступенчатой продольной неоднородностью представляет собой цепь последовательных независимых усилений (ослаблений) нормальных мод на участках продольной однородности и рассеяний этих мод друг в друга на стыках соседних участков. Описанная дискретизация служит основой численного метода, используемого в данной работе для исследования процесса распространения возмущений в течении Гамеля.

Для описания процесса распространения возмущений по течению с естественным непрерывным распределением неоднородности выполним предельный переход $\max_j (\xi_{j+1} - \xi_j) \rightarrow 0$. В результате совокупность равенств (2.13) перейдет в разложение

$$\mathbf{q}' = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(\xi) \mathbf{q}_n(\varphi; \xi), \quad -\infty < \xi < \infty \quad (2.15)$$

Эволюционная система уравнений для бесконечномерной комплексной вектор-функции $\mathbf{c}(\xi)$ (непрерывного аналога набора $\mathbf{c}^{(j)}$) может быть выведена двумя способами: посредством упомянутого выше предельного перехода, выполненного для соотношений (2.14), и с помощью непосредственной подстановки равенства (2.15) в систему (1.4) с последующим использованием свойства ортогональности (2.9). Оба способа приводят к бесконечномерной системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для коэффициентов разложения (2.15)

$$\frac{d\mathbf{c}}{d\xi} = \mathbf{P}' \cdot \mathbf{c}, \quad P'_{nm}(\xi) = ik_n(\xi) \delta_{nm} - \{\mathbf{q}_n(\varphi; \xi), \mathbf{q}_m(\varphi; \xi)\} \quad (2.16)$$

В этих соотношениях использовано обозначение $(\dot{\cdot}) = \partial/\partial\xi$. Для вычисления входящих в коэффициенты системы (2.16) функций $\dot{\mathbf{q}}_n$ продифференцируем задачу на собственные значения (2.1) по параметру ξ . В результате получим неоднородную краевую задачу

$$\mathbf{L}(k_n, \xi)\dot{\mathbf{q}}_n = -(ik_n\dot{\mathbf{A}} + \dot{\mathbf{B}})\mathbf{q}_n, \quad k_n = i \frac{(\mathbf{q}_n^+, \dot{\mathbf{B}}\mathbf{q}_n)}{(\mathbf{q}_n^+, \mathbf{A}\mathbf{q}_n)} \quad (2.17)$$

$$\dot{q}_{n1}(\pm\alpha) = \dot{q}_{n3}(\pm\alpha) = 0$$

Заметим, что решение задачи (2.17) автоматически удовлетворяет условиям $\dot{q}_{n2}(\pm\alpha) = 0$.

Эволюционная система (2.16) математически эквивалентна краевой задаче (1.4), (1.5) для линеаризованной системы уравнений Навье–Стокса. Разложение (2.15) является общим решением, охватывающим всю совокупность линейно независимых решений задачи (1.4), (1.5). Ниже предлагается классификация этих решений и приводятся результаты расчета одного из них.

3. Краевые условия при $\xi \rightarrow \pm\infty$. Пример расчета эволюции возмущения. Изучим сначала поведение решений задачи (1.4), (1.5) при $\xi \rightarrow -\infty$ ($r \rightarrow 0$). Проведенный выбор независимых переменных и неизвестных функций, характеризующих параметры возмущенного течения, сводит к минимуму количество членов краевой задачи, содержащих продольную неоднородность. Эта неоднородность сохраняется только в нестационарных членах системы (1.1); она проявляется в виде множителя $\omega = e^{2\xi}$, имеющего смысл безразмерной частоты, вычисленной с использованием местных масштабов длины и скорости. При $\xi \rightarrow -\infty$ нестационарные члены экспоненциально затухают, краевая задача (1.4), (1.5) становится однородной по ξ , а возмущение – квазистационарным, приобретая вид суперпозиции стационарных мод течения Гамеля [10]:

$$\mathbf{q}' \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_{n0} r^{-k_{nr}} [\cos(k_{nr} \ln r) + i \sin(k_{nr} \ln r)] \mathbf{q}_n(\varphi; -\infty), \quad r \rightarrow 0$$

Спектр стационарных возмущений $\{k_n(-\infty) = k_{nr} + ik_{ni}, n = 1, \dots, \infty\}$ симметричен относительно мнимой оси комплексной плоскости. При $k_{nr} \neq 0$ эти возмущения имеют форму колебаний с амплитудой, меняющейся по степенному закону, и длиной волны, уменьшающейся пропорционально r . Алгебраический характер зависимости стационарных возмущений от переменной r обусловлен тем, что в случае $\omega^0 = 0$ не существует выделенного масштаба длины (см. разд. 1).

Классификация нестационарных свободных возмущений течения Гамеля может быть проведена разными способами. На первый взгляд, представляется удобным выбрать в качестве базиса множество собственных решений задачи (1.4), (1.5), каждое из которых при $\xi \rightarrow -\infty$ имеет одночленную асимптотику, т.е. переходит в одну стационарную моду. Однако процесс рассеяния каждого из таких решений на неоднородности основного течения приводит к возбуждению в возмущенном движении всех мод локально-однородной задачи. С увеличением ξ возрастают роли мод, имеющих все большие инкременты нарастания, и при $\xi \gg 1$ базисные решения становятся практически линейно зависимыми, приобретая универсальный вид.

В этой связи будем использовать другой способ отбора линейно независимых решений, при котором базисные решения сохраняют свою “индивидуальность” при любых ξ . Базисному решению с номером m из нового класса будем по-прежнему ставить в соответствие одно из собственных решений стационарной задачи, налагая из коэффициента c_m разложения (2.15) асимптотическое условие

$$c_m(\xi) \exp[-ik_m(\xi)\xi] \rightarrow 1, \quad \xi \rightarrow -\infty \quad (3.1)$$

Неоднородное условие (3.1) несет двойную смысловую нагрузку – оно идентифицирует соответствующее базисное решение задачи (1.4), (1.5) и нормирует его, обеспечивая единственность. На остальные коэффициенты c_n , $n \neq m$, будем накладывать однородные асимптотические условия двух типов в зависимости от того, как ведет себя соответствующее коэффициенту квазистационарное решение:

$$k_{ni} > 0: c_n(\xi) \rightarrow 0, \quad \xi \rightarrow -\infty; \quad k_{ni} < 0: c_n(\xi) \rightarrow 0, \quad \xi \rightarrow \infty \quad (3.2)$$

Все способы построения системы линейно независимых решений задачи (1.4), (1.5) математически равноправны. Физическая же трактовка выбранного способа заключается в том, что при распространении m -го свободного возмущения по неоднородному течению нормальные моды рассеиваются в том направлении, в котором затухают (за исключением базовой моды с номером m). С этой точки зрения, условия (3.1), (3.2) аналогичны асимптотическим условиям, налагаемым на решение линейной задачи о вибраторе в плоском течении Пуазейля [9].

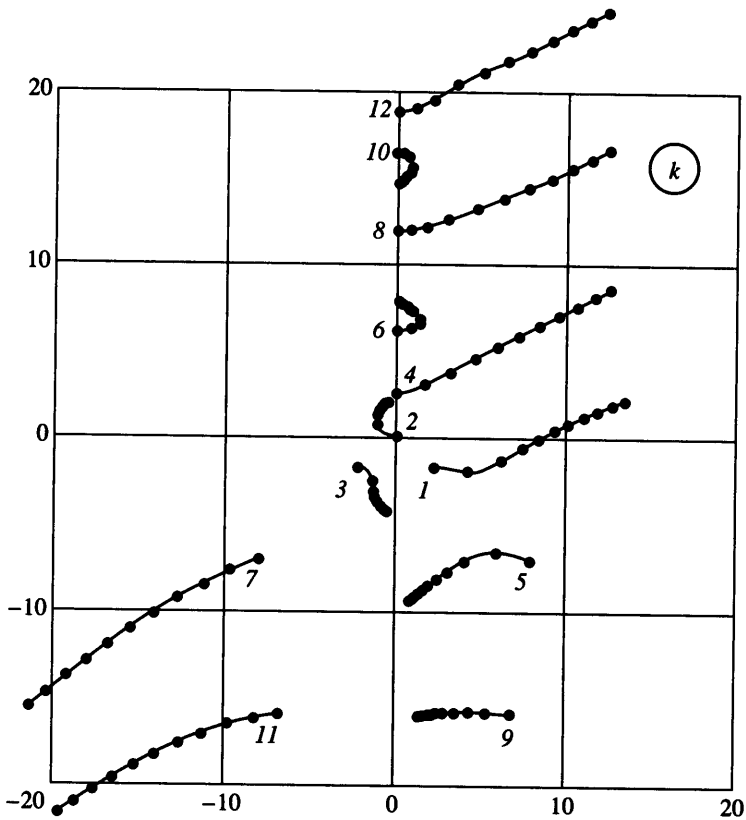
Проведенные выше рассуждения о структуре нестационарных возмущений справедливы для любого ядра течения. Для симметричного основного течения, конфигурация которого показана на фиг. 1, произвольное возмущение распадается на симметричную $q'_s(\xi, \varphi)$ и антисимметричную $q'_a(\xi, \varphi)$ части, удовлетворяющие условиям

$$q'_{s1}(\xi, 0) = q'_{a2}(\xi, 0) = q'_{a3}(\xi, 0) = q'_{s4}(\xi, 0) = 0$$

на оси диффузора. В дальнейшем ограничимся рассмотрением наиболее интересного случая антисимметричных возмущений (индекс a опускаем).

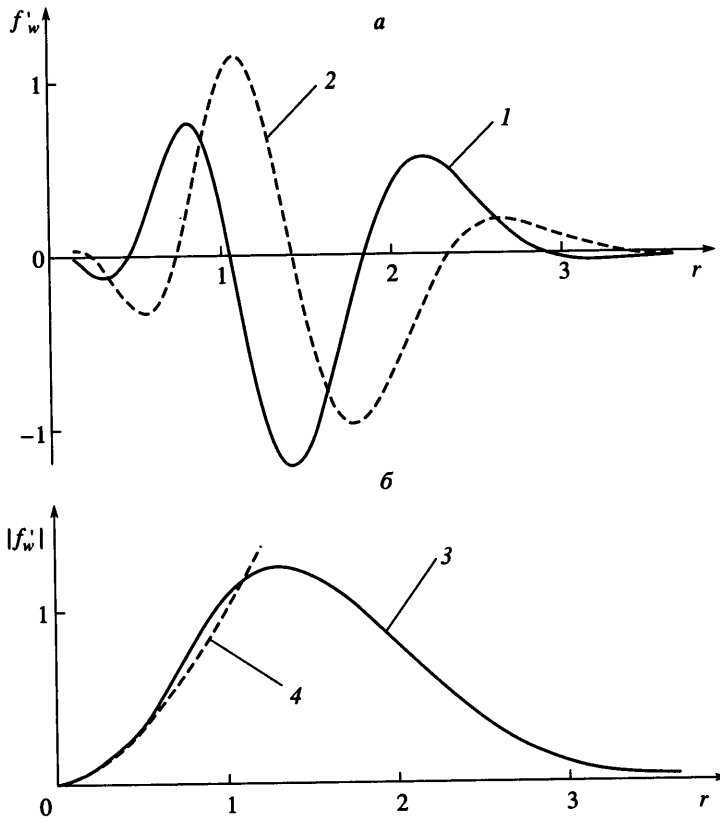
На фиг. 2 показаны результаты расчета спектра антисимметричных возмущений при изменении частотного параметра ω от 0 до 10. Расчет проводился методом, описанным в [9]. Номера мод проставлены около точек, соответствующих случаю $\omega = 0$. Наибольший интерес представляет поведение моды 1. Значению $\omega = 0$ ($\xi \rightarrow -\infty$) соответствует $k_1 = 2.244 - i1.666$. При $\xi = 0.698$ траектория моды k_1 пересекает действительную ось комплексной плоскости. При дальнейшем увеличении ξ декремент затухания рассматриваемой моды продолжает расти. Описанные особенности поведения первой антисимметричной моды указывают на возможное затухание при $\xi \rightarrow \pm\infty$ порождаемого ею нестационарного антисимметричного свободного возмущения течения Гамеля (решения (2.15) задачи (1.4), (1.5), (3.1), (3.2), соответствующего $m = 1$).

Для расчета этого возмущения применялся метод, основанный на дискретном представлении решения, аналогичном (2.14). Проводилось неравномерное разбиение области течения по продольной переменной, соответствующее равномерному разбиению на N шагов промежутка $[0, \omega_{\max}]$ изменения частотного параметра ω . При тестирования метода величина ω_{\max} варьировалась в пределах от 10 до 30, а число шагов N для заданного ω_{\max} изменялось в 2 раза (все расчеты, результаты которых приведены ниже, выполнены для $\omega_{\max} = 30$, $N = 600$). Для повышения точности расчета частотные параметры в аппроксимирующих продольно-однородных краевых задачах выбирались из середины каждого шага (а не с левого конца, как в (2.4)). Решения прямой (2.1) и сопряженной (2.8) задач вычислялись методом Рунге–Кутты с применением процесса ортогонализации [11]; постоянный шаг интегрирования выбирался равным $\alpha/400$. При расчетах эволюции нестационарного возмущения использовалось конечномерное приближение, учитывающее динамику конечного числа мод (число учитываемых мод в дальнейшем обозначаем M). Таким образом, дискретная задача состояла в определении N наборов $\{c_n^{(j)}, n = 1, \dots, M\}$, удовлетворяющих “обрезанным” ($1 \leq n, m \leq M$) соотношениям (2.14) и условиям типа (3.1), (3.2), налагаемым на $c_n^{(1)}$ и $c_n^{(N)}$. При построении численного решения сформулированной дискретной задачи, аппроксимирующей продольную эволюцию возмущения, также применялся метод ортогонализации Годунова [11].



Фиг. 2. Зависимость собственных значений k_n от частотного параметра $\omega = r^2$; точками отмечены положения антисимметричных мод при $\omega = 0, 1, \dots, 10$; номер кривой соответствует номеру моды

На фиг. 3 проиллюстрирован процесс эволюции нестационарного возмущения, порожденного первой квазистационарной модой ($m = 1$). Расчет выполнен с учетом динамики всех мод, показанных на фиг. 2 ($M = 12$). В качестве меры комплексной амплитуды возмущения (фиг. 3, а) использована функция $f_w^i = f^i(\ln r, \alpha)$, характеризующая нестационарное распределение возмущенного давления на стенке канала: с точностью до мультипликативной постоянной эта функция равна комплексной амплитуде возмущенного давления, нормированной на местное давление в невозмущенном потоке. Распределение действительной амплитуды пульсаций изображено на фиг. 3, б сплошной линией; здесь же штриховой линией показан рост амплитуды стационарного решения, порождающего исследуемое нестационарное возмущение. Фигура 3, а демонстрирует ярко выраженный волновой характер возмущенного движения. С увеличением r монотонное возрастание амплитуды колебаний сменяется монотонным затуханием (фиг. 3, б); максимум амплитуды $|f_w^i| = 1.23$ достигается при $r = r_m = 1.29$ ($\xi = 0.26$). Построенное нестационарное решение линеаризованной задачи является равномерно пригодным, поскольку параметры возмущенного движения остаются малыми по сравнению с соответствующими параметрами основного течения при любых r и ϕ (в отличие от стационарных возмущений, испытывающих алгебраический рост либо вверх, либо вниз по потоку).



Фиг. 3. Радиальная эволюция одного из свободных возмущений течения Гамеля: a – продольное распределение комплексной амплитуды $f'_w = r^2 p'(r, \alpha) (1 - \text{Re } f'_w, 2 - \text{Im } f'_w)$; b – распределение действительных амплитуд нестационарного возмущения (3) и порождающего его стационарного собственного решения (4)

Расчет собственных значений и собственных функций локально-однородных задач (2.1), (2.8) с помощью дискретизации по переменной φ может быть сведен к задаче нахождения собственных чисел и собственных векторов матриц. Этот метод облегчает поиск нормальных мод, но делает расчет менее точным. И наоборот, построенное в данной работе решение может быть уточнено путем использования непрерывного представления (2.15) с последующим применением метода Рунге-Кутты к задаче интегрирования системы (2.16).

При оценке точности построенного решения принципиальна его зависимость от числа учитываемых мод. На фиг. 4 показаны кривые нарастания амплитуды исследуемого возмущения, рассчитанные для различных M . Точками отмечены результаты описанного выше расчета ($M = 12$). Расчет, выполненный для $M = 7$ (с учетом мод, траектории которых начинаются внутри квадрата $|\text{Re}k| < 10, |\text{Im}k| < 10$), показан сплошной линией. Проведенное уменьшение числа используемых в расчете мод не приводит к существенной потере точности. Более того, даже применение одномодового ($M = 1$) приближения

$$q' \approx q_1(\varphi; \xi) \exp \int_{-\infty}^{\xi} ik_{1*}(\eta) d\eta, \quad k_{1*} = k_1 + i\{q_1, q_1^*\} \quad (3.3)$$

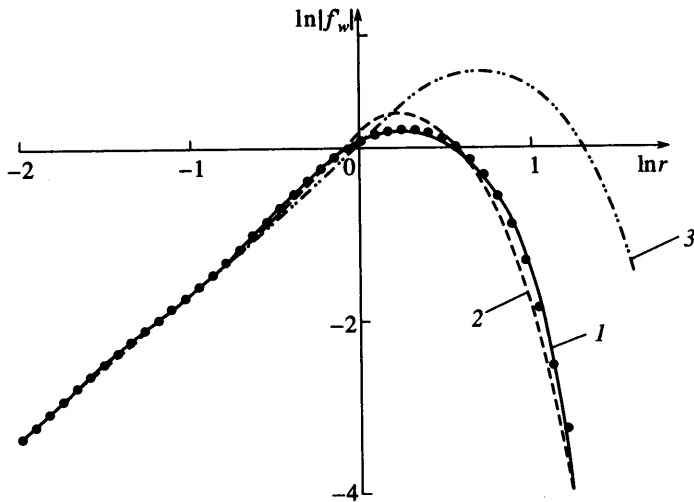
обеспечивает относительную точность порядка 20%, вполне приемлемую при проведении инженерных расчетов (штриховая линия). В формуле (3.3) введено понятие обобщенного волнового числа $k_{1*}(\xi)$, определяемого соотношением $ik_{1*} = P_{11}'$. В рамках одномодового приближения положение максимума интенсивности пульсаций на стенке r_1 определяется соотношением $|\text{Im} k_{1*}| = 0$; вычисление дает $r_1 = 1.25$ ($\xi = 0.22$), что находится в еще лучшем согласии с точным значением r_m .

Таким образом, использование одномодового приближения для расчета эволюции нестационарного возмущения приводит к результатам, удовлетворительным не только в качественном, но и в количественном отношении. Физическая интерпретация такого упрощенного процесса распространения волны включает эволюцию возмущения по локально-однородному течению и рассеяние волны в себя на локальной неоднородности. Учет процесса рассеяния обеспечивается наличием второго слагаемого в выражении (3.3) для обобщенного волнового числа.

Пренебрежение явлением рассеяния мод на неоднородности течения Гамеля (квази-однородное приближение, соответствующее замене $k_{1*} \rightarrow k_1$ в первом равенстве (3.3)) приводит к неадекватному описанию процесса распространения нестационарного возмущения: для положения максимума пульсаций этот метод дает $r = r_0 = 2.01$, а амплитуда максимума в 2 раза превышает точное значение. Кривая нарастания, вычисленная по методу квазиоднородного приближения, отмечена на фиг. 4 штрихпунктирной линией.

На этом завершим анализ поведения нестационарных возмущений в течении Гамеля и перейдем к общему описанию особенностей предложенного метода, а также обсудим перспективы применения данного подхода к исследованию устойчивости и восприимчивости течения в ламинарном пограничном слое. Как отмечено выше, описанный метод исследования эволюции возмущений в неоднородных течениях представляет собой обобщение метода вариации постоянных на случай линейной системы уравнений в частных производных. Метод удобен тем, что фактически приводит к разделению переменных: сначала проводится интегрирование по "поперечной" переменной ϕ (решение задач (2.1), (2.8)), а затем решается эволюционная краевая задача (а не задача Коши!) по продольной переменной r . В каждом поперечном сечении решение ищется в виде галеркинского разложения по системе собственных функций локально-однородной задачи. По сравнению с обычной практикой использования в качестве базиса полиномов Чебышева [12] (или тригонометрических функций), предлагаемый метод имеет один недостаток: базисные функции зависят от выбранного сечения. Тем не менее затраты на вычисление базисных функций оправдываются уже тем, что попутно происходит интегрирование краевой задачи по поперечной переменной.

К достоинствам метода можно отнести два обстоятельства. Во-первых, собственные решения локально-однородной задачи имеют сильно различающиеся скорости изменения по продольной переменной, поэтому при расчете продольной эволюции возмущений в неоднородном потоке удается обойтись сравнительно небольшим количеством членов галеркинского разложения по поперечной переменной. Расчеты, проведенные в данной работе, показывают, что даже одночленное разложение может обеспечить приемлемую точность, однако правомерность применения одномодового приближения для решения каждой практической задачи должно быть обосновано точным расчетом. Во-вторых, представление решения в виде суперпозиции мод локально-однородной задачи позволяет естественным образом решить проблему граничных условий, выставляемых вверх и вниз по потоку, так как решение записывается в виде суперпозиции компонент, привычных в теории "параллельных" (продольно-однородных) течений. При прямом численном моделировании процесса распространения волн неустойчивости в неоднородных потоках для формирования "неотражающей" границы обычно прибегают к заданию искусственного закона роста вязкости



Фиг. 4. Кривые нарастания амплитуды возмущения, рассчитанные различными методами: 1 – расчет с учетом динамики семи мод; 2 – одномодовое приближение; 3 – расчет без учета рассеяния (e^N -метод)

вниз по потоку от исследуемой области, что позволяет использовать условие затухания (при этом фактически искажается основное течение).

Рассмотренное в данной работе неоднородное течение ограничено в поперечном направлении, поэтому собственные решения локально-однородных задач характеризуются бесконечным дискретным спектром. В важных, с практической точки зрения, задачах генерации и пространственной эволюции неустойчивых возмущений в пограничном слое область возмущенного движения полубесконечна в направлении по нормали к обтекаемой поверхности, и наряду с модами дискретного спектра в описании динамики возмущенного движения участвуют моды непрерывного спектра. Обобщение описанной выше методики на случай продольно-неоднородного течения в ламинарном пограничном слое даст новый инструмент для описания линейного этапа ламинарно-турбулентного перехода.

Заключение. С помощью обобщения метода вариации постоянных исследован процесс распространения нестационарных возмущений в течениях с продольной неоднородностью. Метод состоит в представлении эволюции возмущений в виде сопутствующих процессов независимого распространения нормальных мод в локально-однородном течении и их перераспределения друг в друга на местной неоднородности. Эффективность метода продемонстрирована на примере задачи о распространении волн в течении Гамеля. Проведен расчет одного из линейно независимых решений линеаризованной системы уравнений Навье–Стокса. Построенное свободное возмущение течения Гамеля имеет ярко выраженный волновой характер и затухает вверх и вниз по потоку.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 01-01-00614, 02-01-00149) и Государственной программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-1984.2003.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Качанов Ю.С., Козлов В.В., Левченко В.Я. Возникновение турбулентности в пограничном слое. Новосибирск: Наука, 1982. 151 с.
2. Manuilovich S.V. On new methods for boundary-layer flow laminarization // Theor. Comp. Fluid Dyn. 1994. V. 6. № 1. P. 31–47.

3. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 711 с.
4. Fasel H.F. Investigation of the stability of boundary layers by a finite-difference model of the Navier-Stokes equations // J. Fluid Mech. 1976. V. 78. Pt 2. P. 355–383.
5. Bertolotti F.P., Herbert T., Spalart P.R. Linear and nonlinear stability of the Blasius boundary layer // J. Fluid Mech. 1992. V. 242. P. 441–474.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 3. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Наука, 1974. 752 с.
7. Мануйлович С.В. Распространение возмущений в плоском течении Пуазейля между стенками неоднородной податливости // Изв. РАН. МЖГ. 2003. № 4. С. 29–46.
8. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
9. Мануйлович С.В. О восприимчивости плоского течения Пуазейля к вибрации стенок канала // Изв. РАН. МЖГ. 1992. № 4. С. 12–19.
10. Banks W.H.H., Drazin P.G., Zaturka M.B. On perturbations of Jeffery–Hamel flow // J. Fluid Mech. 1988. V. 186. P. 559–581.
11. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. 1961. Т. 16. Вып. 3. С. 171–174.
12. Orszag S.A. Accurate solution of Orr–Sommerfeld stability equation // J. Fluid Mech. 1971. V. 50. Pt 4. P. 689–703.

Москва

Поступила в редакцию
17.XII.2002