МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 • 2004

УДК 533.72

© 2004 г. А. В. ЛАТЫШЕВ, А. А. ЮШКАНОВ

МОМЕНТНЫЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ В ЗАДАЧАХ СКОЛЬЖЕНИЯ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА[1]

Предлагаются две новые модели граничных условий – диффузно-моментная и зеркально-моментная, обобщающие известные граничные условия Черчиньяни. Модели учитывают возможность того, что процесс аккомодации различных моментов функции распределения происходит по-разному и независимо друг от друга. Эта возможность отсутствует как в зеркально-диффузной модели Максвелла, так и в модели Черчиньяни. Показано, что обе модели аппроксимируют зеркально-диффузные условия Максвелла для задач скольжения с точностью до 1%.

Ключевые слова: условие Максвелла, условие Черчиньяни, зеркально-диффузное условие, изотермическое скольжение, тепловое скольжение.

Граничные условия при взаимодействии молекул газа с поверхностью конденсированной фазы привлекают внимание уже в течение длительного времени (см., например, [1]). Несмотря на значительные усилия, проблема остается по-прежнему открытой, особенно для реальных поверхностей. Поэтому в расчетах до сих пор используются главным образом модельные граничные условия. Самое популярное из них – зеркально-диффузное граничное условие Максвелла. Для задач скольжения газов все параметры отраженных молекул определяются одной величиной – коэффициентом зеркальности, который обычно отождествляют с коэффициентом аккомодации тангенциального импульса.

Условие Максвелла неплохо зарекомендовало себя при решении конкретных задач [2]. В то же время оно обладает рядом недостатков. С одной стороны, это граничное условие не вполне общее, так как одного параметра для описания процесса рассеяния молекул поверхностью явно не хватает. С другой стороны, для некоторых подходов в кинетической теории оно недостаточно удобно. Это привело к усилиям по модификации и обобщению условий Максвелла [3–5].

Подход Черчиньяни наиболее удобен при использовании аналитических методов решения кинетических уравнений. Условия, аналогичные граничным условиям Черчиньяни для задач скольжения, используются также в задаче об испарении и скачке температуры (с учетом коэффициента испарения и аккомодации энергии [2]). Однако условия Черчиньяни не вполне адекватно описывают процесс рассеяния молекул газа поверхностью. Например, в этом подходе скорость теплового скольжения газа вообще не зависит от коэффициента аккомодации тангенциального импульса газовых молекул.

В настоящей работе проводится вывод граничных условий Максвелла на основе анализа наиболее общей структуры граничных условий [1]. Построена общая схема граничных условий, обобщающих условия Черчиньяни. Кроме того, впервые удалось получить граничные условия, дополняющие условия Черчиньяни. Оба вида граничных условий позволяют моделировать произвольные граничные условия (в том числе и зеркально-диффузные) с любой степенью точности. При этом используется извест-

[1] 16 сентября 2003 г. по результатам статьи сделан доклад в ИПМ им. М.В. Келдыша.

ное БГК-уравнение. Отметим, что модельные кинетические уравнения широко применяются и в настоящее время как для простых газов [6–8], так и для молекулярных [9].

1. Граничные условия в кинетической теории. Введем декартову систему координат с центром на границе полупространства, с осью x, направленной в глубь газа, и осью y, направленной вдоль скорости движения газа. В общем виде в рассматриваемых задачах граничное условие для функции распределения f имеет следующую форму [3]

$$v_x f(0, y, z, \mathbf{v}) = \int\limits_{v'_x < 0} R(\mathbf{v}' \to \mathbf{v}) f(0, y, z, \mathbf{v}') |v'_x| d^3 v', \quad v_x > 0 \tag{1.1}$$

Здесь $R(\mathbf{v}' \to \mathbf{v})$ – ядро рассеяния [3].

Для линеаризованных задач скольжения функцию f можно искать в виде [2, 3] $f = f_0(1 + \varphi)$, где f_0 – абсолютный максвеллиан. Формула (1.1) преобразуется к виду [3]

$$\varphi(0, y, z, \mathbf{C}) = \int\limits_{C'_x > 0} H(\mathbf{C}, \mathbf{C}') \varphi(0, y, z, -\mathbf{C}') d\Omega'$$

$$H(\mathbf{C}, \mathbf{C}') = R(-\mathbf{C}' \to \mathbf{C})(f_0(C)|C_x|)^{-1}, \quad d\Omega = |C_x| f_0(C) d^3 C \tag{1.2}$$

$$\mathbf{C} = \sqrt{m/2kT}\mathbf{v}, \quad f_0(C) = \pi^{-3/2}\exp(-C^2)$$

Для ядра (1.2) $H(\mathbf{C}, \mathbf{C}')$ выполняется закон взаимности или принцип детального равновесия [3]

$$H(\mathbf{C}, \mathbf{C}') = H(-\mathbf{C}' \to -\mathbf{C}) \tag{1.3}$$

Введем оператор А, определяемый следующим соотношением [3]

$$Ag = \int\limits_{C'_x > 0} H(\mathbf{C}, \mathbf{C}') g(\mathbf{C}') d\Omega'$$

В [3] показано, что ядро $R(\mathbf{C}' \to \mathbf{C})$ можно разложить по собственным функциям φ_j задачи на собственные значения

$$A\varphi_j(\mathbf{C}) = \lambda_j \varphi_j(-\mathbf{C} + 2\mathbf{n}[\mathbf{nC}])$$

где $\mathbf{n}$ – нормаль к поверхности.

Это разложение имеет вид

$$R(\mathbf{C}' \to \mathbf{C}) = |C_x| f_0(C) \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j \psi_j(-\mathbf{C}') \psi_j(\mathbf{C})$$
$$\psi_j(\mathbf{C}) = \varphi_j(-\mathbf{C} + 2\mathbf{n}[\mathbf{nC}]) \tag{1.4}$$

Сравнивая выражения (1.1) и (1.4), запишем граничное условие в виде

$$\varphi(0, y, z, \mathbf{C}) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j \int\limits_{C'_x < 0} \psi_j(-\mathbf{C}') \psi_j(\mathbf{C}) \varphi(0, y, z, \mathbf{C}') d\Omega', \quad C_x > 0 \tag{1.5}$$

При этом функции $\psi_j(\mathbf{C})$ нормированы следующим образом

$$\int\limits_{C_x > 0} \psi_j(\mathbf{C}) \psi_j(-\mathbf{C}) d\Omega = 1$$

Граничное условие (1.1) редко используется в явном виде из-за сложности структуры ядра $R(\mathbf{C}' \to \mathbf{C})$. Вместо этого используются различные аппроксимации.

В [3] показано, что из соотношения (1.5) следуют зеркально-диффузные граничные условия в предположении, что $\lambda_0 = 1$ (соответственно $\psi_0 = 1$), а все остальные $\lambda_j = 1 - q$, $j \neq 0$. Для рассматриваемых задач скольжения газа эти условия могут быть представлены в виде

$$\varphi(0, y, z, \mathbf{C}) = (1-q)\varphi(0, y, z, -\mathbf{C} + 2\mathbf{n}[\mathbf{nC}]), \quad C_x > 0$$

Отметим, что для задач скольжения функция ψ_0 несущественна, так как закон сохранения числа молекул выполняется автоматически для этих задач.

При рассмотрении задач скольжения величины ψ_j ($j > 0$) удобнее нормировать следующим образом

$$\int\limits_{C_x > 0} \psi_j(\mathbf{C})\psi_j(-\mathbf{C})d\Omega = -1$$

Тогда вместо выражения (1.5) для граничных условий имеем

$$\varphi(0, y, z, \mathbf{C}) = -\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \psi_j(\mathbf{C}) \int\limits_{C_x < 0} \psi_j(-\mathbf{C}')\varphi(0, y, z, \mathbf{C}')d\Omega', \quad C_x > 0 \tag{1.6}$$

Рассмотрим случай

$$\psi_1 = 2\sqrt[4]{\pi}C_y, \quad \lambda_1 = 1 - q_1, \quad \lambda_j = 0 \; j > 1$$

Тогда

$$\varphi(0, y, z, \mathbf{C}) = 2(1-q_1)C_y \int\limits_{C_x' < 0} C_y'\varphi(0, y, z, \mathbf{C}')d\Omega', \quad C_x > 0 \tag{1.7}$$

Граничное условие (1.7) имеет вид

$$\varphi(0, y, z, \mathbf{C}) = 2dC_y, \quad C_x > 0 \tag{1.8}$$

Здесь величина d определяется из условия, что коэффициент аккомодации тангенциального импульса молекул равен $q_1 (0 < q_1 < 1)$. Величина q_1 определяется из соотношения

$$1 - q_1 = -\left[\int\limits_{C_x > 0} fC_xC_y d^3C\right]\left[\int\limits_{C_x < 0} fC_xC_y d^3C\right]^{-1} \tag{1.9}$$

Часто используемое граничное условие (1.8) (вместе с (1.9)) является альтернативным к зеркально-диффузному и учитывает возможность того, что функция распределения отраженных молекул частично сохраняет информацию о функции распределения падающих молекул. Случай $d = 0$ отвечает случаю чисто диффузного отражения молекул от стенки. Из результатов [3] вытекает, что использование коэффициента аккомодации q_1 в задаче Крамерса приводит к результатам, аналогичным тем, что получаются при использовании коэффициента зеркальности q. Это граничное условие естественно назвать аккомодационным граничным условием.

Граничное условие (1.7) допускает естественное обобщение. Пусть $\lambda_j = 1 - q_j$, $1 < j \le n$, $\lambda_j = 0$ (т.е., $q_j = 1$) $j > n$. Тогда граничное условие (1.6) можно переписать в виде

$$\varphi(0, y, z, \mathbf{C}) = -\sum_{j=1}^{n} (1 - q_j)\psi_j(\mathbf{C}) \int\limits_{C'_x < 0} \psi_j(-\mathbf{C}')\varphi(0, y, z, \mathbf{C}')d\Omega', \quad C_x > 0 \tag{1.10}$$

Функции $\psi_j(\mathbf{C})$ являются некоторыми моментами ортогональных полиномов, зависящих от скорости молекул и вообще говоря зависят от характера рассеяния молекул на поверхности твердого тела. Граничное условие (1.10) естественно назвать диффузно-моментным граничным условием. Его смысл состоит в том, что все моменты функции распределения отраженных молекул с номерами выше n обращаются в нуль, как это происходит при диффузном рассеянии. В пределе, когда $n \to \infty$ и $q_1 = q_2 = \ldots = q$ граничные условия (1.10) переходят в зеркально-диффузные граничные условия с коэффициентом зеркальности q. Отсюда следует, что диффузно-моментные граничные условия могут моделировать с произвольной точностью зеркально-диффузные граничные условия.

Наряду с введенными диффузно-моментными граничными условиями рассмотрим граничные условия, основанные на противоположном подходе. А именно, предположим, что $\lambda_j = q_j$, $1 < j \le n$, $\lambda_j = 1, j > n$. При этом граничное условие (1.6) преобразуется к следующему виду

$$\begin{aligned}\varphi(0, y, z, \mathbf{C}) = {} & \sum_{j=1}^{n} q_j\psi_j(\mathbf{C}) \int\limits_{C'_x < 0} \psi_j(-\mathbf{C}')\varphi(0, y, z, \mathbf{C}')d\Omega' - \\ & - \varphi(0, y, z, -\mathbf{C} + 2\mathbf{n}[\mathbf{nC}]), \quad C_x > 0\end{aligned} \tag{1.11}$$

Соотношение (1.11) соответствует случаю, когда граничные условия первых n моментов функции распределения соответствуют зеркально-диффузному отражению от стенки, а граничные условия для остальных моментов соответствуют зеркальному отражению. Поэтому граничное условие (1.11) будет называть в дальнейшем зеркально-моментным. В случае, когда $n \to \infty$ и $q_1 = q_2 = \ldots = q$, зеркально-моментное граничное условие переходит в зеркально-диффузное.

Далее для аналитического решения задач скольжения (изотермического и теплового) используются диффузно-моментное граничное условие

$$\begin{aligned}\varphi(0, \mathbf{C}) = {} & \psi_1(C_x, C_y)\frac{1 - q_1}{\pi^{3/2}} \int\limits_{C'_x < 0} \exp(-C'^2)|C'_x|\psi_1(-C'_x, C'_y)\varphi(0, \mathbf{C}')d^3C' + \\ & + \psi_2(C_x, C_y)\frac{1 - q_2}{\pi^{3/2}} \int\limits_{C'_x < 0} \exp(-C'^2)|C'_x|\psi_2(-C'_x, C'_y)\varphi(0, \mathbf{C}')d^3C', \quad C_x > 0\end{aligned} \tag{1.12}$$

и зеркально-моментное граничное условие

$$\begin{aligned}\varphi(0, \mathbf{C}) = {} & \varphi(0, -C_x, C_y, C_z) - \\ & - \psi_1(C_x, C_y)\frac{q_1}{\pi^{3/2}} \int\limits_{C_x < 0} \exp(-C'^2)|C'_x|\psi_1(-C'_x, C'_y)\varphi(0, \mathbf{C}')d^3C' - \\ & - \psi_2(C_x, C_y)\frac{q_2}{\pi^{3/2}} \int\limits_{C_x < 0} \exp(-C'^2)|C'_x|\psi_2(-C'_x, C'_y)\varphi(0, \mathbf{C}')d^3C', \quad C_x > 0\end{aligned} \tag{1.13}$$

$$\psi_1(C_x, C_y) = n_1C, \quad \psi_2(C_x, C_y) = n_2C_y(\beta + C_x)$$

Требуется, чтобы ψ_1, ψ_2 были ортогональными: $(\psi_1, \psi_2) = 0$ и ортонормированными: $(\psi_j, \psi_j) = 1$ ($j = 1, 2$), где скалярное произведение введено равенством

$$(\psi_i, \psi_j) = \pi^{-3/2} \int\limits_{C_x > 0} \exp(-C^2) C_x \psi_i(C_x, C_y) \psi_j(C_x, C_y) d^3C$$

Из последних двух условий находим

$$\beta = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad n_1 = 2\sqrt[4]{\pi}, \quad n_2 = 2\frac{\sqrt[4]{\pi}}{\sqrt{\alpha_0}}, \quad \alpha_0 = 1 - \frac{\pi}{4}$$

Нетрудно проверить, что для условий (1.12) и (1.13) принцип детального равновесия (1.3) выполняется.

В обоих задачах рассматривается полупространство, занятое газом. В задаче Крамерса вдали от стенки задан (безразмерный) градиент массовой скорости g_υ, вызывающий скольжение газа вдоль плоской поверхности, называемое изотермическим. В задаче о тепловом скольжении вдали от поверхности задан (безразмерный) логарифмический градиент температуры g_T, вызывающий скольжение газа, называемое тепловым. Требуется найти скорость скольжения U_0. Так как для малых градиентов $U_0 = K_\upsilon g_\upsilon + K_T g_T$, то нахождение скорости скольжения эквивалентно нахождению кинетических коэффициентов K_υ и K_T.

2. Задачи с диффузно-моментными граничными условиями. В качестве уравнения, описывающего движение газа с массовой скоростью $U(x)$, вдоль оси y, возьмем БГК-уравнение (Бхатнагар, Гросс, Крук)

$$C_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi(x, \mathbf{C}) + C_y g_T \left(C^2 - \frac{5}{2}\right) = 2C_y U(x)$$
$$U(x) = \pi^{-3/2} \int \exp(-C'^2) C'_y \varphi(x, \mathbf{C}') d^3C' \tag{2.1}$$

Распределением Чепмена – Энскога для этой задачи является функция

$$\varphi_{as}(x, \mathbf{C}) = 2U_0 C_y + 2g_\upsilon(x - C_x)C_y - g_T\left(C^2 - \frac{5}{2}\right)C_y$$

Учитывая структуры кинетического уравнения (2.1) и граничных условий (1.12), ищем решение задачи в виде

$$\varphi(x, \mathbf{C}) = C_y\left[\psi(x, \mu) + (C_y^2 + C_z^2 - 2)\exp\left(-\frac{x}{\mu}\right)h^+(\mu)\right], \quad \mu = C_x$$

где $h^+(\mu)$ – функция Хэвисайда, $h^+(\mu) = 1$, $\mu > 0$, $h^+(\mu) = 0$, $\mu < 0$.

Выполняя интегрирование по C_y и C_z в (2.1) и (1.12), сформулируем следующую граничную задачу на функцию ψ:

$$\mu \frac{\partial \psi}{\partial x} + \psi(x, \mu) + g_T\left(\mu^2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-\mu'^2)\psi(x, \mu')d\mu' \tag{2.2}$$

$$\psi(x, \mu) = -(1 - q_1)\frac{n_1^2}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{0} \exp(-\mu'^2)\mu'\psi(0, \mu')d\mu' -$$
$$-(1 - q_2)\frac{n_2}{2\sqrt{\pi}}(\beta + \mu) \int\limits_{-\infty}^{0} \exp(-\mu'^2)\mu'(\beta - \mu')\psi(0, \mu')d\mu', \quad \mu > 0 \tag{2.3}$$

$$\psi(x,\mu) = \psi_{as}(x,\mu) + o(1), \quad x \to +\infty, \quad \mu < 0$$
$$\psi_{as}(x,\mu) = 2U_0 + 2g_v(x-\mu) - g_T\left(\mu^2 - \frac{1}{2}\right) \tag{2.4}$$

Рассмотрим подробнее граничное условие (2.3). Воспользуемся очевидным равенством

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \exp(-\mu^2)\mu^\alpha\psi(x,\mu)d\mu =$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-\mu^2)\mu^\alpha\psi(x,\mu) - \int\limits_{0}^{\infty}\exp(-\mu^2)\mu^\alpha\psi(x,\mu)d\mu, \quad \alpha = 1, 2 \tag{2.5}$$

В силу законов сохранения импульса и энергии величина

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-\mu^2)\mu^\alpha\psi(x,\mu)d\mu \ (\alpha = 1, 2)$$

постоянна при $x > 0$. Следовательно, в равенстве (2.5) в интеграле по всей действительной оси функцию $\psi(x, \mu)$ можно заменить на $\psi_{as}(x, \mu)$:

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \exp(-\mu^2)\mu^\alpha\psi(x,\mu)d\mu = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-\mu^2)\mu^\alpha\psi_{as}(x,\mu)d\mu -$$
$$-\int\limits_{0}^{\infty}\exp(-\mu^2)\mu^\alpha\psi(x,\mu)d\mu, \quad \alpha = 1, 2$$

Таким образом, условие (2.3) имеет вид

$$\psi(0,\mu) = d_0 + d_1\mu, \quad \mu > 0$$

$$d_0 = -2(1-q_1)(J_1^{as} - J_1^+) - \frac{\sqrt{\pi}}{2}d_1$$
$$d_1 = \frac{2(1-q_2)}{\alpha_0}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}(J_1^{as} - J_1^+) + J_2^{as} - J_2^+\right] \tag{2.6}$$

$$J_j^{as} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-u^2)u^j\psi_{as}(0,u)du, \quad J_j^+ = \int\limits_{0}^{\infty}\exp(-u^2)u^j\psi(0,u)du, \quad j = 1, 2$$

После необходимых вычислений представим d_0, d_1 в явной форме

$$d_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha_0(2-q_2)}\left\{\frac{1}{q_1}2g_v\left[(1-q_1)(2-q_2) + \frac{\pi}{4}(q_1-q_2)\right] - \sqrt{\pi}(1-q_2)\left(U_0 - \frac{1}{2}g_T\right)\right\}$$
$$d_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha_0}\frac{1-q_2}{2-q_2}\left[2U_0 - g_T - \sqrt{\pi}\frac{2-q_1}{q_1}g_v\right]$$

Следуя [5, 10], решение задачи (2.2), (2.4), (2.6) будем искать в виде

$$\psi(x,\mu) = \psi_{as}(x,\mu) + \int\limits_0^\infty \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right)\Phi(\eta,\mu)a(\eta)d\eta \tag{2.7}$$

Здесь $a(\eta)$ – неизвестная функция, U_0 – неизвестная скорость скольжения, $\Phi(\eta,\mu)$ – собственная функция характеристического уравнения, отвечающего уравнению (2.2) (см. [10, 11])

$$\Phi(\eta,\mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\eta P\frac{1}{\eta-\mu} + \exp(\eta^2)\lambda(\eta)\delta(\eta-\mu)$$

$$\lambda(\eta) = 1 - 2\eta\exp(-\eta^2)\int\limits_0^\eta \exp(u^2)du, \quad \eta\in(-\infty,\infty)$$

$$\lambda^{\pm}(z) = 1 - 2z\exp(-z^2)\int\limits_0^z \exp(u^2)du \pm i\sqrt{\pi}z\exp(-z^2), \quad \pm\operatorname{Im}z > 0$$

где символ Px^{-1} означает распределение – главное значение интеграла от x^{-1}, $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака, $\lambda(z)$ – дисперсионная функция Черчиньяни [10].

Используя условие (2.6), перейдем от разложения (2.7) к сингулярному интегральному уравнению с ядром Коши

$$\psi_{as}(0,\mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty \frac{\eta a(\eta)d\eta}{\eta-\mu} + \exp(\mu^2)\lambda(\mu)a(\mu) = d_0 + d_1\mu, \quad \mu > 0$$

Введем вспомогательную функцию

$$N(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty \frac{\eta a(\eta)}{\eta-\mu}d\eta \tag{2.8}$$

и с помощью ее граничных значений на разрезе

$$N^{\pm}(\mu) = N(\mu) \pm i\sqrt{\pi}\mu a(\mu), \quad N(\mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty \frac{\eta a(\eta)}{\eta-\mu}d\eta$$

и таких же граничных значений функции $\lambda(z)$ сведем сингулярное уравнение к неоднородной краевой задаче Римана [8]

$$\lambda^+(\mu)[N^+(\mu) + \psi_{as}(0,\mu)] = \lambda^-(\mu)[N^-(\mu) + \psi_{as}(0,\mu)], \quad \mu > 0$$

Рассмотрим соответствующую однородную краевую задачу

$$\frac{X^+(\mu)}{X^-(\mu)} = \frac{\lambda^+(\mu)}{\lambda^-(\mu)}, \quad \mu > 0$$

Можно доказать, что индекс этой задачи $\kappa = 1$. Следовательно, она имеет следующее каноническое решение

$$X(z) = \frac{1}{z}\exp V(z), \quad V(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\zeta(\tau)}{\tau - z}d\tau$$

$$\zeta(\tau) = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left[\frac{\exp(\tau^2)}{\sqrt{\pi}\tau} - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\tau \exp(x^2)dx\right]$$

С помощью однородной задачи преобразуем неоднородную задачу к задаче определения аналитической функции по ее нулевому скачку на разрезе:

$$X^+(\mu)[N^+(\mu) + \psi_{as}(0,\mu) - d_0 - d_1\mu] =$$
$$= X^-(\mu)[N^-(\mu) + \psi_{as}(0,\mu) - d_0 - d_1\mu], \quad \mu > 0$$

Общее решение этой задачи содержит три произвольные постоянные U_0, C_0, C_1:

$$N(z) = d_0 + d_1 z - 2U_0 + 2g_v z + g_T\left(z^2 - \frac{1}{2}\right) + \frac{C_0 + C_1 z}{X(z)} \tag{2.9}$$

Функция $N(z)$, определяемая общим решением (2.9), имеет полюс второго порядка в точке $z = \infty$, в отличие от вспомогательной функции $N(z)$, введенной равенством (2.8). За счет выбора произвольных постоянных сделаем поведение решения (2.9) таким же, что и поведение вспомогательной функции. Разлагая функцию $1/X(z)$ в асимптотический ряд

$$X^{-1}(z) = z\exp V(z) = z + X_0 + X_1\frac{1}{z} + X_2\frac{1}{z^2} + \ldots, \quad z \to \infty$$

выразим коэффициенты этого разложения через коэффициенты асимптотического разложения

$$V(z) = \frac{V_1}{z} + \frac{V_2}{z^2} + \ldots, \quad z \to \infty; \quad V_n = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty u^{n-1}\zeta(u)du, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Получаем $X_0 = -V_1 = -1.01619$, $X_1 = 1/2V_1 - V_2 = -0.23368$. Теперь разложим общее решение в асимптотический ряд и приравняем нулю коэффициенты при z^j, $j = 0, 1, 2$. На этом пути получаем

$$C_1 = -g_T, \quad C_0 = -2g_v - d_1 - V_1 g_T$$

$$U_0 = K_v^0 g_v + K_T^0 g_T + \frac{1}{2}(d_0 + d_1 V_1) \tag{2.10}$$

$$K_v^0 = V_1 = 1.01619, \quad K_T^0 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}V_1^2 + V_2 - \frac{1}{2}\right) = 0.38316$$

Формула (2.10) и дает искомую скорость скольжения. Эту формулу можно представить в виде:

$$U_0 = Q_0^{-1}(q_2)[Q_1(q_1, q_2)g_v + Q_2(q_2)g_T]$$

$$Q_0(q_2) = \alpha_0 + \alpha_1(1 - q_2), \quad \alpha_1 = 1 + \frac{\pi}{4} - \sqrt{\pi}V_1$$

$$Q_1(q_1, q_2) = \alpha_0 V_1(2 - q_2) + \frac{\sqrt{\pi}}{q_1}Q(q_1, q_2) \tag{2.11}$$

$$Q_2(q_2) = \alpha_0 K_T^0(2-q_2)+\alpha_2(1-q_2), \quad \alpha_2 = \frac{\pi}{4}-V_1\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$Q(q_1,q_2) = -\alpha_0 q_1-\alpha_2 q_2+\alpha_3(2-q_1-q_2+q_1q_2), \quad \alpha_3 = \alpha_1-\alpha_2$$

Пусть $g_T = 0$; тогда из формулы (2.11) получаем коэффициент изотермического скольжения

$$K_\upsilon = \frac{Q_1(q_1,q_2)}{Q_0(q_2)} = \frac{\alpha_0 V_1 q_1(2-q_2)+\sqrt{\pi}Q(q_1,q_2)}{q_1[\alpha_0+\alpha_1(1-q_2)]} \tag{2.12}$$

Рассмотрим частные случаи формулы (2.12). При $q_1 = 1$ имеем

$$K_\upsilon = \frac{\alpha_0 V_1(2-q_2)+\sqrt{\pi}\alpha_2(1-q_2)}{\alpha_0+\alpha_1(1-q_2)}$$

а при $q_2 = 1$: $K_\upsilon = V_1 + \sqrt{\pi}\,(1/q_1-1)$. Из формулы (2.12) при $q_1 \to 0$ получаем: $K_\upsilon = \sqrt{\pi}/q_1$, что в точности совпадает с известной формулой Черчиньяни [3].

Из формулы (2.12) при $q_1 = q_2 = 1$ вытекает классическая формула Черчиньяни [3, 5] для скорости изотермического скольжения $U_0 = V_1 g_\upsilon$.

При $g_\upsilon = 0$ из формулы (2.10) получаем скорость теплового скольжения

$$U_0 = K_T^0 g_T+\frac{1}{2}(d_0+d_1V_1) = g_T\frac{Q_2(q_2)}{Q_0(q_2)} \tag{2.13}$$

Формула (2.13) в точности совпадает с формулой (28) из [5].

Отсюда получаем, что коэффициент теплового скольжения газа находится по формуле

$$\begin{aligned} K_T &= \frac{\alpha_0 K_T^{\circ}+(\alpha_2+\alpha_0 K_T^{\circ})(1-q_2)}{\alpha_0+\alpha_1(1-q_2)} \\ K_T &= 0.38316\frac{(2-q_2)-(1-q_2)1.40072}{1-(1-q_2)0.07339} \end{aligned} \tag{2.14}$$

При чисто зеркальном отражении молекул от стенки ($q_2 = 0$) отсюда получаем $K_T = 0.24781$, что отличается от точного значения Максвелла $K_T = 0.25$ на 0.88%. Коэффициент K_T, как видно из (2.14), не зависит от величины коэффициента тангенциального импульса молекул q_1. При $q_2 = 1$ граничные условия соответствуют чисто диффузному отражению молекул от поверхности, при этом коэффициент K_T переходит в хорошо известное (см., например, [13]) выражение $K_T = K_T^0 = 0.38316$ – в точности результат Лойалки.

3. Задачи с зеркально-моментными граничными условиями. Рассмотрим задачу, состоящую из уравнения (2.2), граничного условия (2.4) и граничного условия (1.13), которое после замены $\varphi = C_y\psi$ имеет вид

$$\begin{aligned} \psi(0,\mu) &= \psi(0,-\mu)+2q_1\int_{-\infty}^{0}\exp(-\mu'^2)\mu'\psi(0,\mu')d\mu' + \\ &+\frac{2q_2}{\alpha_0}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}-\mu\right)\int_{-\infty}^{0}\exp(-\mu'^2)\mu'\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}+\mu'\right)\psi(0,\mu')d\mu', \quad \mu>0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Обозначим

$$J_1^- = \int\limits_{-\infty}^{0} \exp(-\mu^2)\mu\psi(0,\mu)d\mu, \quad J_2^- = \int\limits_{-\infty}^{0} \exp(-\mu^2)\mu^2\psi(0,\mu)d\mu$$

Тогда условие (3.1) перепишется в виде

$$\psi(0,\mu) = 2q_1J_1^- + \frac{2q_2}{\alpha_0}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \mu\right)\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}J_1^- + J_2^-\right) + \psi(0,-\mu), \quad \mu > 0 \tag{3.2}$$

Условие (3.2) умножим на $\mu\exp(-\mu^2)$ и проинтегрировав по всем $\mu > 0$, получим

$$J_1^+ = q_1J_1^- + \int\limits_0^{\infty} \exp(-\mu^2)\mu\psi(0,-\mu)d\mu$$

или (после очевидной замены переменных в интеграле) $J_1^+ = (q_1 - 1)J_1^-$, откуда $J_1^{as} \equiv$ $\equiv J_1^+ + J_1^- = q_1J_1^-$.

Полный поток массы J_1^{as} найден ранее: $J_1^{as} = -\sqrt{\pi}\,g\upsilon$. Следовательно

$$J_1^- = -\sqrt{\pi}\frac{q_\upsilon}{q_1}, \quad J_1^+ = \sqrt{\pi}g_\upsilon\frac{1-q_1}{q_1} \tag{3.3}$$

Условие (3.2) умножим на $\mu^2\exp(-\mu^2)$ и проинтегрировав по всем $\mu > 0$, с помощью (3.3) имеем

$$J_2^+ = \frac{\sqrt{\pi}}{2}q_1J_1^- + \int\limits_0^{\infty} \exp(-\mu^2)\mu^2\psi(0,-\mu)d\mu - q_2\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}J_1^- + J_2^+\right)$$

или

$$J_2^+ - J_2^- = \frac{\sqrt{\pi}}{2}J_1^-(q_1 - q_2) - q_2J_2^-$$

С помощью закона сохранения энергии получаем

$$J_2^{as} \equiv J_2^+ + J_2^+ = \sqrt{\pi}U_0 - \frac{\sqrt{\pi}}{2}g_T$$

Из последних двух уравнений находим

$$J_2^- = \sqrt{\pi}\frac{2U_0 - g_T}{2(2-q_2)} + \frac{\pi g_\upsilon(q_1 - q_2)}{2q_1(2-q_2)}$$

Граничное условие (3.2) построено и содержит только одну неизвестную величину – скорость скольжения U_0. Представим условие (3.2) в явной форме

$$\psi(0,\mu) = d_0 + d_1\mu + \psi(0,-\mu), \quad \mu > 0$$

$$d_0 = \frac{\pi q_2(2U_0 - g_T)}{2\alpha_0(2-q_2)} - \sqrt{\pi}g_\upsilon\frac{2q_1(2-q_2) - \pi(q_1 - q_2)}{\alpha_0 q_1(2-q_2)} \tag{3.4}$$

$$d_1 = -\frac{2\sqrt{\pi}q_2(2U_0 - g_T)}{2\alpha_0(2-q_2)} + \frac{\pi g_\upsilon q_2(2-q_1)}{\alpha_0 q_1(2-q_2)}$$

Коэффициенты d_0, d_1 связаны соотношением

$$d_0 + \frac{\sqrt{\pi}}{2}d_1 = 2q_1 J_1^- \tag{3.5}$$

Решение задачи (2.2), (3.4) и (2.4) будем искать, как и прежде, в виде разложения

$$\psi(x, \mu) = \psi_{as}(x, \mu) + \int_0^\infty \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right)\Phi(\eta, \mu)a(\eta)d\eta \tag{3.6}$$

Подчеркнем, что функция $a(\eta)$ – коэффициент непрерывного спектра – тождественно равна нулю при $\eta < 0$; следовательно, естественно ввести обозначение

$$a(\eta) = \begin{cases} b(\eta), & \eta > 0 \\ 0, & \eta < 0 \end{cases}$$

Подставим разложение (3.6) в граничное условие (3.4) и, заметив, что

$$\psi_{as}(0, \mu) - \psi_{as}(0, -\mu) = -4g_\upsilon\mu$$

получаем интегральное уравнение

$$-4g_\upsilon\mu + \int_0^\infty [\Phi(\eta, \mu) - \Phi(\eta, -\mu)]b(\eta)d\eta = d_0 + d_1\mu, \quad \mu > 0$$

После подстановки в это уравнение собственных функций $\Phi(\eta, \mu)$ оно переходит в сингулярное интегральное уравнение с двумя ядрами Коши (с прямым и обратным сдвигами)

$$-4g_\upsilon\mu + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \eta b(\eta)\left(\frac{1}{\eta - \mu} - \frac{1}{\eta - \mu}\right)d\eta +$$

$$+ \exp(\mu^2)\lambda(\mu)b(\mu) = d_0 + d_1\mu, \quad \mu > 0$$

Введем вспомогательную функцию

$$N(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \eta b(\eta)\left(\frac{1}{\eta - z} - \frac{1}{\eta + z}\right)d\eta \tag{3.7}$$

имеющую разрез вдоль всей действительной оси, причем

$$N^+(\mu) - N^-(\mu) = 2i\sqrt{\pi}\mu b(\mu), \quad \mu > 0 \tag{3.8}$$

С помощью граничных значений функций $N(z)$ и $\lambda(z)$ сведем сингулярное уравнение к краевой задаче Римана

$$\begin{aligned} &\lambda^+(\mu)[N^+(\mu) - (4g_\upsilon + d_1)\mu] - \lambda^-(\mu)[N^-(\mu) - (4g_\upsilon + d_1)\mu] = \\ &= 2\sqrt{\pi}i\mu\exp(-\mu^2)d_0, \quad \mu > 0 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Покажем, что левая часть этого уравнения – четная функция, если доопределить функцию $b(\mu)$ на всю действительную ось, положив $b(-\mu) = -b(\mu)$, $-\infty < \mu < \infty$. Обозначим $\Phi(z) = \lambda(z)[N(z) - (4g_\upsilon + d_1)z]$. Заметим, что

$$\lambda(-\mu) = \lambda(\mu), \quad \lambda^+(-\mu) = \lambda^-(\mu), \quad \lambda^-(-\mu) = \lambda^+(\mu)$$

$$N(-\mu) = -N(\mu), \quad N^+(-\mu) = N(-\mu) - i\sqrt{\pi}\mu b(-\mu) =$$
$$= -N(\mu) + i\sqrt{\pi}\mu b(\mu) = -N^-(\mu), \quad N^-(-\mu) = -N^+(\mu)$$

Следовательно

$$\Phi^+(-\mu) = \lambda^-(\mu)[-N^-(\mu) + (4g_\upsilon + d_1)\mu] = -\Phi^-(\mu)$$

$$\Phi^-(-\mu) = \lambda^+(\mu)[-N^+(\mu) + (4g_\upsilon + d_1)\mu] = -\Phi^+(\mu)$$

Отсюда и вытекает, что $\Phi^+(-\mu) - \Phi^-(-\mu) = \Phi^+(\mu) - \Phi^-(\mu)$. Таким образом, левая часть уравнения (3.9) – четная функция. Следовательно, естественно доопределить уравнение (3.9) на всю числовую ось, считая правую часть этого уравнения также четной функцией

$$\lambda^+(\mu)[N^+(\mu) - (4g_\upsilon + d_1)\mu] - \lambda^-(\mu)[N^-(\mu) - (4g_\upsilon + d_1)\mu] =$$
$$= 2\sqrt{\pi}i|\mu|\exp(-\mu^2)d_0, \quad -\infty < \mu < \infty \tag{3.10}$$

Решение задачи (3.10) выражается равенством

$$N(z) = (4g_\upsilon + d_1)z + \frac{\psi(z)}{\lambda(z)}d_0$$
$$\psi(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(-\tau^2)|\tau|}{\tau - z}d\tau = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\exp(-\tau^2)\tau\left(\frac{1}{\tau - z} - \frac{1}{\tau + z}\right)d\tau \tag{3.11}$$

Заметим, что для функции $N(z)$, определенной равенством (3.11), автоматически выполняется условие $N(\infty) = 0$, что согласуется с (3.7). В самом деле, учитывая асимптотическое соотношение

$$\frac{\psi(z)}{\lambda(z)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}z + o(1), \quad z \to \infty$$

находим

$$N(z) = \left(d_1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}}d_0 + 4g_\upsilon\right)z + o(1), \quad z \to \infty$$

Согласно (3.5)

$$d_1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}}d_0 + 4g_\upsilon = 0$$

следовательно

$$N(z) = d_0\left(-\frac{2}{\sqrt{\pi}}z + \frac{\psi(z)}{\lambda(z)}\right) \tag{3.12}$$

Подставляя решение (3.12) в равенство (3.8), находим коэффициент непрерывного спектра

$$2\sqrt{\pi}i\mu b(\mu) = d_0\frac{\psi^+(\mu)\lambda^-(\mu) - \psi^-(\mu)\lambda^+(\mu)}{\lambda^+(\mu)\lambda^-(\mu)}, \quad \mu > 0$$

Введем известную специальную функцию

$$t_1(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{\exp(-\tau^2)\tau}{\tau - z}d\tau$$

через которую выражаются $\lambda(z)$ и $\psi(z)$

$$\lambda(z) = t_1(z) + t_1(-z), \quad \psi(z) = t_1(z) - t_1(-z)$$

Преобразуя выражение для $b(\mu)$, получаем

$$\mu b(\mu) = 2d_0\frac{\exp(-\mu^2)|\mu|t_1(-|\mu|)}{\lambda^+(\mu)\lambda^-(\mu)}$$

Перейдем к нахождению скорости скольжения. Подставим разложение (3.6) при $x = 0$ в определение интеграла J_1^+. Получим

$$J_1^+ = U_0 - \frac{\sqrt{\pi}}{2}g_\upsilon - \frac{1}{4}g_T + \int_0^\infty b(\eta)d\eta\int_0^\infty \Phi(\eta, \mu)\exp(-\mu^2)\mu d\mu$$

Замечая, что

$$\int_0^\infty \Phi(\eta, \mu)\exp(-\mu^2)\mu d\mu = \eta t_1(-\eta)$$

представим предыдущее выражение в виде

$$J_1^+ = U_0 - \frac{\sqrt{\pi}}{2}g_\upsilon - \frac{1}{4}g_T + \alpha d_0$$
$$\alpha d_0 = \int_0^\infty \eta t_1(-\eta)b(\eta)d\eta \qquad (3.13)$$

Отсюда находим

$$\alpha = 2\int_0^\infty \frac{\exp(-\eta^2)\eta^2 t_1(-\eta)}{\lambda^+(\eta)\lambda^-(\eta)}d\eta = 0.08052$$

Подставляя в (3.13) найденные ранее выражения для J_1^+ и d_0, находим скорость изотермического скольжения

$$U_0 = \sqrt{\pi}g_\upsilon\frac{\alpha_0(2-q_1)(2-q_2) + 4\alpha q_1(2-q_2) - 2\alpha\pi(q_1-q_2)}{2q_1[\alpha_0(2-q_2) + \alpha\pi q_2]} \qquad (3.14)$$

Таблица 1

q	K_v			K_T		
	I	II	III	I	II	III
0.1	17.10313	17.102713	17.107040	0.2641783	0.2623016	0.2646020
0.2	8.224902	8.224575	8.228394	0.2781510	0.2765683	0.2789488
0.3	5.255112	5.254861	5.258212	0.2919238	0.2906142	0.2930441
0.4	3.762619	3.762432	3.765353	0.3055019	0.3044444	0.3068973
0.5	2.861190	2.861056	2.863581	0.3188906	0.3180638	0.3205144
0.6	2.255410	2.255318	2.257482	0.3320949	0.3314771	0.3338992
0.7	1.818667	1.818609	1.820446	0.3451195	0.3446891	0.3470598
0.8	1.487654	1.487622	1.489162	0.3579692	0.3577043	0.3600010
0.9	1.227198	1.227184	1.225932	0.3706483	0.3705269	0.3727283
1.0	1.016191	1.016191	1.017228	0.3831612	0.3831613	0.3852469

и скорость теплового скольжения

$$U_0 = g_T\frac{1}{4}\left[1 + \frac{\alpha\pi q_2}{\alpha_0(2-q_2)+\alpha\pi q_2}\right] \tag{3.15}$$

Из выражений (3.14) и (3.15) находим коэффициенты соответственно изотермического и теплового скольжений

$$K_\upsilon = \sqrt{\pi}\frac{\alpha_0(2-q_1)(2-q_2)+4\alpha q_1(2-q_2)-2\alpha\pi(q_1-q_2)}{2q_1[\alpha_0(2-q_2)+\alpha\pi q_2]} \tag{3.16}$$

$$K_T = 0.25\frac{\alpha_0(2-q_2)+2\alpha\pi q_2}{\alpha_0(2-q_2)+\alpha\pi q_2} \tag{3.17}$$

При $q_2 = 0$ из формулы (3.17) в точности получается результат Максвелла.

При $q_1 = q_2 = 1$ из формул (3.16) и (3.17) получаем значения (безразмерных) коэффициентов $K_\upsilon = 1.01723$ и $K_T = 0.38525$. Сравнивая эти значения с результатами Черчиньяни и Лойалки, заключаем, что относительное отклонение для коэффициента изотермического скольжения равно 0.1%, а для теплового – 0.56%.

4. Анализ результатов. В табл. 1 приведены соответственно значения K_υ и K_T, вычисленные с использованием диффузно-моментного (столбец II) и зеркально-моментного (столбец III) граничных условий при $q = q_1 = q_2$, т.е. когда коэффициенты аккомодации первого и второго момента функции распределения совпадают. В этих таблицах для сравнения приведены численные значения этих величин, полученные для зеркально-диффузных (столбец 1) граничных условий [7].

Анализ данных табл. 1 показывает, что различие коэффициента изотермического скольжения, вычисленного на основе диффузно-моментного и зеркально-моментного граничных условий, не превышает 0.1%. При этом отличие этих коэффициентов и коэффициента, найденного численными методами на основе зеркально-диффузного граничного условия с коэффициентом зеркальности q, также не превышает 0.1%.

Различие коэффициентов теплового скольжения (см. табл. 1), вычисленных на основе диффузно-моментного и зеркально-моментного граничных условий, а также коэффициента, найденного численными методами на основе зеркально-диффузного граничного условия с коэффициентом зеркальности q, не превышает 0.9%.

Таблица 2

q	K_v				$K_т$			
	[7]	I	II	III	[7]	I	II	III
0.25	6.412098	–	6.444278	6.447859	0.3103473	–	0.2836185	0.2860267
0.50	2.821884	2.861190	2.861056	2.863581	0.3513446	0.31888906	0.3180638	0.3205137
0.75	1.615045	–	1.642538	1.644223	0.3752749	–	0.3511221	0.3535575
1.0	1.016191	1.016191	1.016191	1.017228	0.3831612	0.3831612	0.3831613	0.3852469

Таблица 3

q_2	K_v					
	I	II	I	II	I	II
	$q_1 = 0.1$		$q_1 = 0.5$		$q_1 = 1$	
0.1	17.102713	17.107040	2.923082	2.927410	1.150629	1.154956
0.2	17.086844	17.090663	2.907213	2.911033	1.134759	1.138579
0.3	17.071220	17.074571	2.891589	2.894940	1.119135	1.122489
0.4	17.055836	17.058756	2.876205	2.879126	1.103751	1.106672
0.5	17.040687	17.043212	2.861058	2.863581	1.088602	1.091127
0.6	17.025766	17.027931	2.846136	2.848300	1.073682	1.075847
0.7	17.011070	17.012907	2.831439	2.833276	1.058986	1.060822
0.8	16.996593	16.998134	2.816962	2.818503	1.044508	1.046049
0.9	16.982330	16.983604	2.802699	2.803973	1.030245	1.031519
1.0	16.968276	16.969313	2.788645	2.789682	1.016191	1.017228

Наряду с зеркально-диффузными граничными условиями иногда используются граничные условия Черчиньяни–Лэмпис [8]. В табл. 2 приводится сравнение результатов настоящей работы с результатами из [7] с использованием условий Черчиньяни–Лэмпис [8] и зеркально-диффузных условий (столбец I). В столбцах II и III приведены данные с использованием соответственно диффузно-моментных и зеркально-моментных условий.

Сравнение данных табл. 2 показывает, что для теплового скольжения различие результатов, следующих из граничных условий Черчиньяни – Лэмпис и из предложенных в настоящей работе граничных условий, порядка одного процента (например, при $q = 0.5$). Для случая изотермического скольжения это различие существенно больше и достигает 9%. Это показывает, что граничные условия Черчиньяни–Лэмпис плохо аппроксимируют зеркально-диффузные граничные условия для задачи об определении скорости изотермического скольжения. Таким образом, предложенные в работе зеркально-моментные и диффузно-моментные граничные условия аппроксимируют зеркально-диффузные с гораздо большей точностью, чем условия Черчиньяни–Лэмпис.

В табл. 3 приведены значения коэффициента изотермического скольжения, полученные по формулам (2.12) и (3.16) для обеих типов граничных условий в зависимости от величины q_2 при нескольких значениях величины q_1. В столбцах I приводятся данные с использованием диффузно-моментного условия, а в столбцах II – зеркально-моментного.

Из данных табл. 3 следует, что коэффициенты теплового и изотермического скольжения определяются в основном первыми двумя моментами граничной трансформанты (коэффициентами q_1 и q_2). Влияние остальных моментов на скорость изотермического скольжения не превышает 0.5%, теплового – 1%. С этой же точностью зеркально-диффузные граничные условия могут быть аппроксимированы как зеркально-моментными, так и диффузно-моментными.

Заключение. Скорости изотермического и теплового скольжения зависят в основном от первых двух моментов разложения граничной трансформанты по системе ортогональных полиномов. Вклад остальных моментов не превышает 1%. При этом как зеркально-моментные, так и диффузно-моментные граничные условия позволяют моделировать зеркально-диффузные граничные условия для задач скольжения с точностью лучше 1%. В то же время рассмотренные граничные условия обладают большей гибкостью, чем зеркально-диффузные, так как учитывают возможность зависимости различной степени аккомодации любых моментов функции распределения.

Предложенные граничные условия могут быть использованы для описания и других типов скольжений (барнеттовского, диффузионного, и т.п.) как простого газа, так и газовых смесей.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке А.В. Латышева РФФИ (№ 03-01-00281).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баранцев Р.Г.* Взаимодействие разреженных газов с обтекаемыми поверхностями. М.: Наука, 1975. 343 с.
2. *Коган М.Н.* Динамика разреженного газа. Кинетическая теория. М.: Наука, 1967. 440 с.
3. *Черчиньяни К.* Математические методы в кинетической теории газов. М.: Наука, 1973. 245 с.
4. *Cercignani C.* The Kramers problem for a not completely diffusing wall // J. Math. Analys. Appl. 1965. V. 10. № 3. P. 568–586.
5. *Латышев А.В., Юшканов А.А.* Аккомодационные двухмоментные граничные условия в задачах о тепловом и изотермическом скольжении // Инж.-физ. журн. 2001. Т. 74. № 3. С. 63–69.
6. *Титарев В.А., Шахов Е.М.* Теплоотдача и испарение с плоской поверхности в полупространство при внезапном повышении температуры тела // Изв. РАН. МЖГ. 2002. № 1. С. 141–153.
7. *Siewert C.E., Sharipov F.* Model equations in rarefied gas dynamics: Viscous–slip and thermal–slip coefficients // Phys. Fluids. 2002. V. 14. № 12. P. 4123–4129.
8. *Cercignani C., Lampis M.* Kinetic models for gas–surface ineraction // Transp. Theory and Statist. Phys. 1971. V. 1. № 2. P. 101–114.
9. *Ларина И.Н., Рыков В.А.* О граничных условиях для газов на поверхности тела // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 5. С. 141–148.
10. *Cercignani C.* Elementary solutions of the linearized gas dynamics Boltzmann equation and their applications to the slip–flow problem // Ann. Phys. 1962. V. 20. № 2. P. 219–233.
11. *Владимиров В.С., Жаринов В.В.* Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2000. 399 с.
12. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
13. *Loyalka S.K., Cipola J.W.* Thermal creep slip with arbitrary accomodation at the surface // Phys. Fluids. 1971. V. 14. № 8. P. 1656–1661.

Москва

Поступила в редакцию
4.IX.2003