

УДК 533.6.011.72

© 2004 г. Ю. П. ГУНЬКО, А. Н. КУДРЯВЦЕВ, Р. Д. РАХИМОВ

**СВЕРХЗВУКОВЫЕ НЕВЯЗКИЕ ТЕЧЕНИЯ С РЕГУЛЯРНЫМ И НЕРЕГУЛЯРНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ СКАЧКОВ УПЛОТНЕНИЯ В УГЛОВЫХ КОНФИГУРАЦИЯХ**

Представлены результаты численного и аналитического исследования невязких стационарных сверхзвуковых течений в двугранных углах, образованных пересекающимися клиньями сжатия. Рассмотрены течения, симметричные относительно биссекторной плоскости угла. Изучены особенности формирования режимов течения, связанные с отражением от этой плоскости скачков уплотнения, падающих от клиньев. Углы клиньев, при которых происходит переход от регулярного к нерегулярному отражению скачков, определены как численно, так и аналитически с использованием критериев, известных для плоских течений. Получены согласующиеся данные. Установлены режимы течения с нерегулярными отражениями скачков – простым одиночным, переходным и двойным маховским, а также неймановским, аналогичные известным для плоских квазистационарных течений, получены разновидности этих типов отражений, не наблюдавшиеся для плоских течений. Исследовано влияние угла наклона плоских поверхностей двугранного угла к направлению набегающего потока, угла стреловидности передних кромок и угла V-образности. Определены ранее неизвестные параметры угловых конфигураций, при которых возможен переход в соответствии с критерием Неймана.

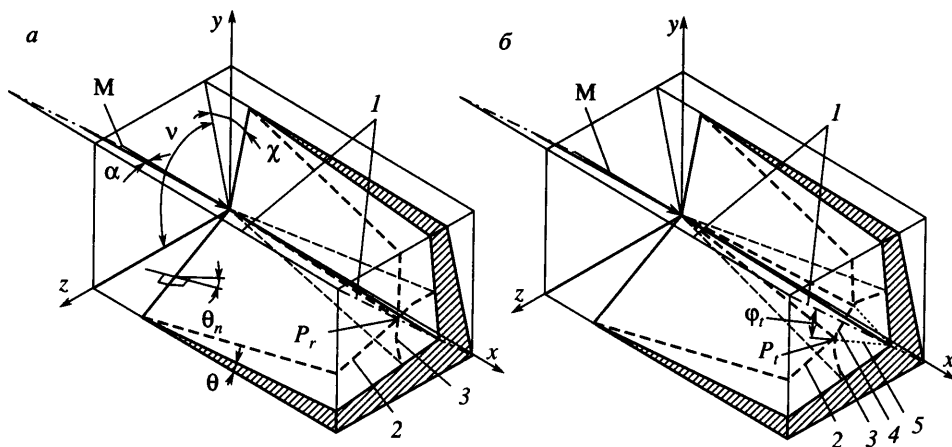
*Ключевые слова:* невязкие стационарные сверхзвуковые течения, двугранные углы, отражение скачков уплотнения, численное моделирование.

Исследование сверхзвуковых течений в угловых конфигурациях представляет как теоретический, так и практический интерес. Изучение систем пространственно взаимодействующих скачков уплотнения, возникающих в угловых конфигурациях, способствует пониманию общих закономерностей формирования сложных “скачковых” течений. Практический интерес связан с тем, что угловые течения формируются в местах стыков элементов летательного аппарата – крыла и фюзеляжа, оперения и фюзеляжа, клина сжатия и боковых стенок воздухозаборников и т.п. Для сверхзвуковых и особенно гиперзвуковых летательных аппаратов разрабатываются трехмерные воздухозаборники, включающие различные комбинации пересекающихся стреловидных и нестреловидных клиньев сжатия.

Экспериментальные и теоретические исследования основных свойств угловых течений проводятся на упрощенных конфигурациях нескольких типов.

Во-первых, это конфигурации с одним или двумя вертикальными, нестреловидными или стреловидными, клиньями, установленными на пластине. Скачки уплотнения, возникающие на этих клиньях, являются скользящими по отношению к пластине, обтекаемой с развивающимся на ней пограничным слоем. В реальных условиях происходит трехмерное взаимодействие этих скачков с пограничным слоем, их интенсивность обычно достаточно велика, и они вызывают трехмерные (косые) отрывы пограничного слоя. Во многих публикациях именно этот аспект взаимодействия скачков уплотнения с пограничным слоем в угловых течениях является предметом исследования.

Во-вторых, это конфигурации, в которых изучаемое течение формируется в двугранном угле между пересекающимися клиньями сжатия или плоскими поверхностями



Фиг. 1. Схема течения в угловой конфигурации с регулярным (а) и нерегулярным (б) отражениями скачков: 1 – биссекторная плоскость, 2 – падающий скачок, 3 – отраженный скачок, 4 – мостообразный скачок, 5 – контактный разрыв,  $P_r$  – точка пересечения и регулярного отражения падающих скачков,  $P_r$  – тройная точка взаимодействия падающего, мостообразного и отраженного скачков

ми, к передним кромкам которых присоединены два скачка уплотнения, трехмерно взаимодействующие между собой. Экспериментальные и теоретические исследования свойств течений в таких конфигурациях проводятся в течение многих лет [1–14]. Обзор этих исследований, выполненных в 1960–1970-е годы, можно найти в [15].

Следует отметить еще один особый случай угловых конфигураций, конструируемых из стреловидных клиньев, – это пирамидальные тела со звездобразным поперечным сечением, впервые рассмотренные Г.И. Майкапаром [16], а также  $\Lambda$ -образные (или V-образные) крылья, предложенные Т. Нонвейлером [17]. Их отличительной особенностью является наличие режима обтекания, называемого расчетным, при котором образуется один или нескольких плоских скачков уплотнения, лежащих на передних кромках стреловидных клиньев. Аэродинамические конфигурации такого рода, конструируемые с использованием известных точных решений обратных задач газовой динамики, были названы волнолетами. С тех пор построено большое многообразие волнолетов, проведено множество исследований режимов их обтекания и характеристик на расчетных и нерасчетных режимах. Обзор работ по этому обширному направлению представлен, например, в [15].

Настоящая работа посвящена изучению течений и систем скачков уплотнения, возникающих и взаимодействующих в двугранных углах, образованных пересекающимися клиньями (фиг. 1). Скачки, образующиеся на клиньях в угловых течениях, симметричных относительно биссекторной плоскости, падают на эту плоскость и отражаются вдоль линии пересечения с ней. При этом возможны режимы течения как с регулярным (фиг. 1, а), так и с нерегулярным или “маховским” отражениями этих скачков (фиг. 1, б). Последнее характеризуется образованием так называемого диска Маха (мостообразного или маховского скачка 4) в поперечном сечении. Граница между этими режимами в зависимости от числа Маха набегающего потока и угла клиньев определялась аналитически, в частности в [2, 5, 8, 9], причем в [5], кроме того, получены единственные в своем роде экспериментальные данные по этому вопросу. Аналогичные режимы с регулярным и маховским отражением скачков от плоскости симметрии возникают и для  $\Lambda$ -образных крыльев в условиях обтекания, когда скачки уплотнения, возникающие на их передних кромках и присоединенные к ним, направлены

внутри двугранного угла крыла. Эти режимы имеют место при числах Маха, превышающих значение, соответствующее расчетному режиму крыла. Следует отметить, что данные [2, 8, 9] о границах перехода в угловых конфигурациях противоречивы, поэтому в настоящей работе этому вопросу уделено особое внимание, переходные углы клиньев определяются как аналитически, так и по данным численных расчетов и проводится их сопоставление.

В ранних исследованиях угловых течений как экспериментальных, так и численных [1–4, 6, 7, 9, 10] по существу рассматривался лишь один тип нерегулярного отражения скачков – так называемого одиночного маховского. Режимы обтекания  $\Lambda$ -образных крыльев с отражением скачков этого же типа численно исследованы в [18, 19]. Ряд других типов угловых течений с нерегулярным отражением скачков получен экспериментально в [5] и численно в [11]. Однако условия формирования полученных типов течений не были установлены, а изменение этих типов, возможное в зависимости от определяющих параметров – числа Маха и угла клиньев – не определено. Заметим, что для плоских течений режимы с нерегулярным отражением скачков классифицированы, их обзоры представлены в [20, 21], поэтому авторами проведены поисковые численные исследования различных типов угловых течений с нерегулярным отражением скачков, которые рассматриваются ниже в сопоставлении с режимами, известными для плоских течений. Параметры угловых конфигураций – число Маха, углы клиньев,  $\Lambda$ -образности и стреловидности, соответствующие условиям реализации того или иного типа течения, найдены аналитически.

Несмотря на достаточно большое число исследований течений в двугранных углах, многие особенности формирования сложных систем пространственно взаимодействующих скачков уплотнения, возникающих в этих конфигурациях, по-прежнему не изучены. В настоящей работе проводится анализ ряда газодинамических особенностей формирования угловых течений на основе рассмотрения невязких течений, симметричных относительно биссекторной плоскости угла.

**1. Метод численного моделирования.** Численные расчеты угловых течений проводились как в невязком приближении [3, 6, 7, 9, 10, 11], так и с решением уравнений Навье–Стокса для ламинарных и турбулентных течений (см. [12–14]). Невязкие угловые течения являются конически автомодельными, это позволяет свести задачу об их определении в рамках уравнений Эйлера от трехмерной к двумерной, что существенно упрощает ее решение и было использовано в [3, 6, 7, 9]. Численный расчет обтекания  $\Lambda$ -образных крыльев в [18, 19] проводился также с учетом коничности течения. В последнее время для расчета невязких угловых течений используются маршевые методы интегрирования трехмерных стационарных уравнений Эйлера и решение находится в процессе установления по автомодельному направлению [10, 11].

Следует заметить, что при численных исследованиях угловых течений в невязком приближении важным является вопрос о возможном различии их структуры, определяемой расчетом и получаемой экспериментально в условиях реального вязкого течения. Как отмечено в экспериментальном исследовании [4], при больших числах Рейнольдса  $Re$ , когда пограничный слой турбулентный и относительно тонкий, структура углового течения вне пограничного слоя является конически инвариантной и по сути не зависящей от вязких эффектов. Сравнение расчетной невязкой и экспериментальной картин углового течения, проведенное в [6, 7], подтверждает, что основные свойства угловых течений с ударными волнами, установленные численно в невязкой постановке, аналогичны тем, которые получены экспериментально при больших  $Re$ . Это оправдывает численное изучение угловых течений в невязком приближении как предельных при  $Re \rightarrow \infty$ . Постановка задачи в настоящей работе исходит также из того, что, как известно, во многих случаях полезно изучение именно свойств течений с ударными волнами, не осложненных эффектами вязкости. Ниже проведено сравнение некоторых результатов, полученных аналитически и численно, с экспериментальными

ми данными [5] и отмечено расхождение теоретических и экспериментальных данных, объяснимое эффектами вязкости. Однако имеется очень мало экспериментальных сведений, которые позволяли бы провести последовательный детальный анализ эффектов вязкости в указанном аспекте.

Численное моделирование рассматриваемых угловых течений проводится маршевым методом путем решения трехмерных стационарных уравнений Эйлера. Была использована TVD-схема сквозного счета, которую можно рассматривать как развитие известной распадной схемы Годунова, точнее ее маршевого варианта, предложенного в [22]. Другим возможным подходом, также применявшимся для расчета конических сверхзвуковых течений [10, 11], является выделение поверхностей разрывов; сравнение методов сквозного счета и выделения разрывов (для схем первого порядка точности) дано в [10].

В реализованном численном алгоритме [23, 24] газодинамические параметры на гранях расчетных ячеек восстанавливаются из величин, осредненных по объему, по формуле третьего порядка точности, предложенной ван Леером [25]. Потоки на гранях между ячейками определяются из приближенного решения задачи о взаимодействии сверхзвуковых потоков по методу HLLC [26]. Для интегрирования до установления вдоль маршевого направления используются сохраняющие монотонность решения явные TVD-схемы Рунге–Кутты высоких порядков аппроксимации (до третьего) [27]. Для расчетов рассматриваемых угловых течений использованы сетки, насчитывавшие от  $100 \times 100$  до  $300 \times 300$  расчетных ячеек в поперечном сечении, при этом в ходе процесса установления по маршевой координате проводилось от 2000 до 6000 шагов. Размазывание скачка уплотнения для тестового расчета распада произвольного разрыва при  $100 \times 100$  ячеек в поперечном сечении составляло 2–3 расчетных ячейки. Путем последовательного измельчения выбиралась сетка с разрешением, достаточным для выявления всех особенностей структуры течения, на уточнение которых уже не влияло дальнейшее уменьшение размеров расчетных ячеек. Расчетная область в поперечном сечении была ограничена стенками угловой конфигурации, на которых ставились условия непротекания, и внешними границами, где задавались неотражающие условия.

**2. Переход от регулярного к нерегулярному отражению скачков, взаимодействующих в угловых течениях.** Для плоских течений имеются различные известные критерии перехода от регулярного к маховскому отражению скачков от плоской стенки, их детальное обсуждение представлено в [20].

Наиболее распространен так называемый критерий отсоединения, определяемый следующим образом. При регулярном отражении косоугольного скачка, создаваемого клином с углом  $\theta$  и падающего на стенку, поток за падающим скачком сначала отклоняется к стенке, а затем, за отраженным скачком, отклоняется в обратную сторону до направления, параллельного стенке. Существует некоторое значение угла  $\theta$ , при котором достигается угол отклонения потока за отраженным скачком, максимально возможный по отношению к направлению потока перед ним, т.е. за падающим скачком. Угол максимально возможного отклонения потока за косым скачком обычно интерпретируется как угол клина, соответствующий отсоединению скачка. Скорость потока за скачком при этом несколько меньше звуковой. При дальнейшем увеличении начального угла отклонения потока решение с регулярным отражением скачка отсутствует. Угол клина, формирующего падающий и отраженный скачки, соответствующие этому критерию, обозначен ниже как  $\theta_m$ .

Другой критерий, так называемый звуковой, определяется по условию того, что поток за отраженным скачком становится звуковым. Соответствующий этому критерию угол клина  $\theta_s$  меньше  $\theta_m$  не более чем на десятые доли градуса. И в большинстве случаев определить, по какому из критериев – отсоединения или звуковому – происходит переход в экспериментах, практически невозможно [20].

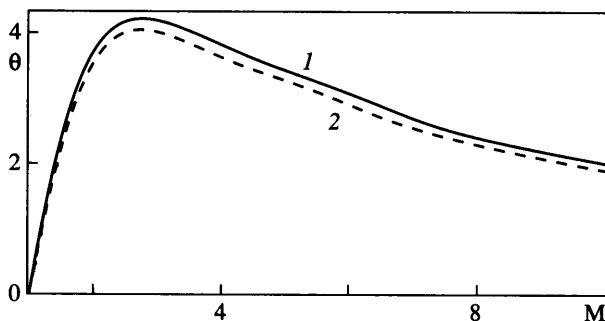
Еще один критерий – это критерий механического равновесия Неймана. Соответствующий этому критерию угол клина  $\theta_e$  определяется условием равенства давления за отраженным косым скачком и за прямым скачком в исходном течении. Критерий предложен (см. [20]) для условий отражения, возможных при числах Маха  $M > M_*$ , где  $M_* \approx 2.2$  – значение числа Маха, при котором справедливо  $\theta_e = \theta_m$ . Теоретически при  $M > M_*$  и  $\theta_e < \theta < \theta_m$  возможны два решения для отражения скачков: соответственно регулярное и нерегулярное маховское. Как отмечено в [20], в плоских неустановившихся течениях при отражении от клина движущейся ударной волны в условиях, допускающих двойное решение, однозначно реализуется регулярное отражение и переход к маховскому отражению отвечает критерию отсоединения или звуковому критерию. Для стационарных плоских течений недавно было установлено (см. [28]), что при  $M > M_*$  переход от регулярного к маховскому отражению скачков сопровождается гистерезисом.

В рассматриваемых угловых конфигурациях сверхзвуковое невязкое течение является коническим, а скачки, падающие от клиньев – плоскими. И отражение этих скачков от биссекторной плоскости следует рассматривать в общем трехмерное – поток за каждым из падающих скачков скользящий по отношению к линии отражения скачка от этой плоскости. Известно, что в соответствии с законами сохранения на скачке уплотнения терпит разрыв нормальная составляющая скорости потока, тогда как остается неизменной по величине и направлению составляющая скорости, касательная к плоскости скачка. Соответственно при отражении плоского скачка от плоскости будет сохраняться компонента скорости, касательная к линии отражения скачка от плоскости. В силу этого можно предполагать, что для угловых течений справедливы двумерные критерии перехода от регулярного к маховскому отражению, определяемые для эквивалентного плоского течения в плоскости, перпендикулярной к линии отражения скачков.

В данной работе углы, соответствующие указанным выше критериям перехода, определены из аналитического решения трехмерной задачи [29, 30] о плоском скачке, возникающем на стреловидном клине сжатия или клине, обтекаемом сверхзвуковым потоком со скольжением. В [29, 30] эта задача сводится к эквивалентной для двумерного (плоского) течения в плоскости, перпендикулярной к стреловидной передней кромке клина, причем число Маха этого течения определяется компонентой скорости, нормальной к передней кромке клина. Задачи взаимодействия двух плоских скачков общего пространственного положения или отражения со скольжением такого скачка от плоской поверхности сводятся к последовательному решению задач определения скачка, генерируемого скользящим клином.

Основные геометрические параметры угловой конфигурации, образованной клиньями, определены на фиг. 1, а. Конфигурация, передние кромки которой имеют угол стреловидности  $\chi = 0$  и угол V-образности  $\nu = 90^\circ$  (в плоскости  $xy$ ), типична в исследованиях угловых течений [1–4, 6, 7, 10–14]. Для нее обычно рассматриваются условия обтекания, при которых набегающий поток направлен вдоль оси  $ox$  (при нулевом угле атаки в биссекторной плоскости  $\alpha = 0$ ), а изменение режимов течения определяется в зависимости от угла клиньев  $\theta$  (при  $\chi = 0$ ,  $\theta = \theta_n$ , где угол клина  $\theta_n$  определен в плоскости, перпендикулярной к его передней кромке). Заметим, что с ростом угла  $\theta$  изменяется двугранный угол между поверхностями клиньев (по нормали к ребру), что влияет на течение, формирующееся в этом угле.

Результаты аналитических расчетов для типичной угловой конфигурации показали, что компонента числа Маха  $M_n$ , нормальная к линии пересечения плоских скачков в биссекторной плоскости двугранного угла, не превышает указанную величину  $M_*$  даже в пределе:  $M_n < M_*$  при  $M \rightarrow \infty$ , т.е. переход от регулярного к маховскому отражению скачков в данном случае должен происходить в соответствии либо с критерием отсоединения, либо со звуковым критерием. Углы клиньев  $\theta_s$  и  $\theta_m$ , отвечающие этим критериям перехода, отличаются на доли градуса (фиг. 2), так же как и для плоского

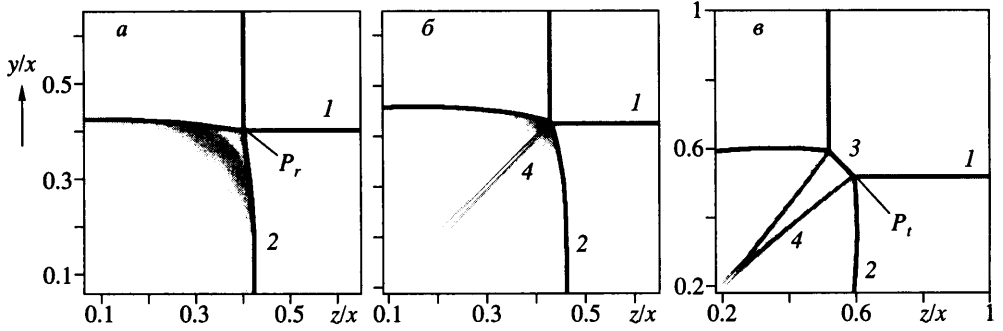


Фиг. 2. Углы клиньев  $\theta$ , и  $\theta_m$ , отвечающие переходу от регулярного к нерегулярному отражению скачков, в зависимости от  $M$  ( $\nu = 90^\circ$ ,  $\chi = 0$ ): 1 – критерий отсоединения, 2 – звуковой критерий

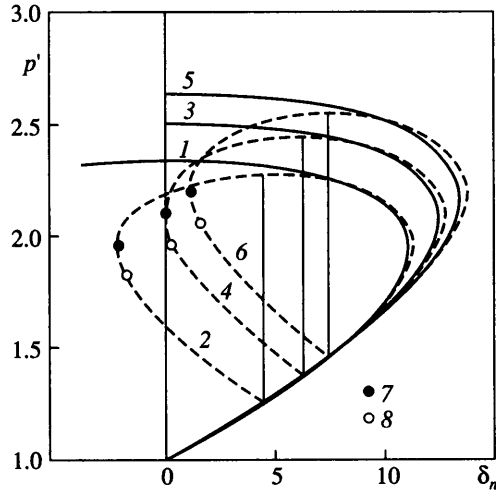
течения. Заметим, что граница перехода в координатах  $M$ ,  $\theta$ , полученная по критерию отсоединения, согласуется с определенной аналитически в [8], но отличается от представленной в [2]. По данным настоящей работы, максимальное значение переходного угла клиньев  $(\theta_m)_{\max} \approx 4.185^\circ$  достигается при  $M \approx 2.8$ ; а по данным [2],  $(\theta_m)_{\max} \approx 8^\circ$  – при  $M \approx 3$ . При  $M \geq 5$  эта граница также практически совпадает с полученной в [9], но имеется отличие в интервале  $M = 1.5-4$ , в котором достигается  $(\theta_m)_{\max}$ . В [9] это значение больше примерно на  $1^\circ$  по сравнению с настоящими данными.

Численные расчеты по определению границ перехода от регулярного к нерегулярному отражению скачков проведены для ряда чисел  $M$  с изменением угла клиньев вблизи переходных значений с шагом  $0.5^\circ$ . Появление с увеличением угла клиньев режима с нерегулярным отражением скачков определялось визуально по рассчитанным картинам течения в поперечном сечении. Эти картины визуализировались “численным шпирен-методом” [31], в котором рассчитываются поля градиента плотности, эквивалентные экспериментально наблюдаемым. Они представлены ниже в конических координатах  $u/z$ ,  $z/x$ , причем градации серого цвета соответствуют различной величине градиента плотности. При возникновении нерегулярного отражения скачков из тройных точек  $P_t$  мостообразного скачка исходят два контактных разрыва, которые в расчетах представляют слои с резким поперечным изменением плотности и проявляются на картинах течения в виде темных линий.

Пример численных картин течения с переходом от регулярного к нерегулярному отражению скачков показан на фиг. 3 для угловой конфигурации с  $\nu = 90^\circ$ ,  $\chi = 0$ , обтекаемой при  $M = 3$ . Условия этого перехода можно пояснить с помощью совмещенных ударных поляр, рассчитанных аналитически и представленных на фиг. 4. Эти поляры построены в координатах  $(p', \theta_n)$ , где  $p' = p/p_\infty$  – относительное давление за падающим или отраженным скачком,  $p_\infty$  – давление невозмущенного потока,  $\delta_n$  – угол отклонения потока в плоскости, перпендикулярной к линии пересечения падающих скачков. На полярах отмечены точки 7 и 8, соответствующие углу максимально возможного отклонения потока за отраженным скачком, т.е. критерию отсоединения, и звуковой скорости за отраженным скачком, т.е. звуковому критерию перехода. Как показано на фиг. 4, ударная поляра отраженного скачка касается оси  $p'$  в точке  $P_m$  при значении  $\theta = \theta_m \approx 4.172^\circ$ , отвечающего критерию отсоединения, и пересекает ось  $p'$  в точке  $P_s$  при  $\theta = \theta_s \approx 3.977^\circ$ , соответствующие звуковому критерию, т.е. при  $\theta < 3.977^\circ$  отражение падающих скачков  $l$  регулярное, как, например, при  $\theta = 3.5^\circ$  (фиг. 3, а). При угле клиньев  $\theta = 4^\circ$ , несколько большем  $\theta_s$  и меньшем  $\theta_m$ , проявлялись слабо видимые парные линии контактных разрывов, хотя мостообразный скачок практически неразли-



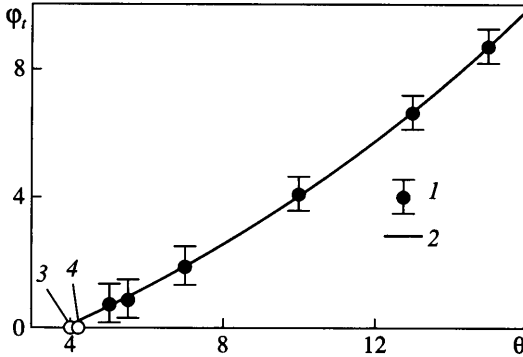
Фиг. 3. Изменение углового течения в зависимости от угла клиньев для  $M = 3$ ,  $\nu = 90^\circ$ ,  $\chi = 0$ : а-в —  $\theta = 3.5, 5, 10^\circ$ , 1 — падающий скачок, 2 — отраженный скачок, 3 — мостообразный скачок, 4 — контактный разрыв



Фиг. 4. Ударные поляры для углового течения при  $M = 3$ ,  $\nu = 90^\circ$  и  $\chi = 0$ : 1, 2 — падающий и отраженный скачок для  $\theta = 3.5^\circ$ ; 3, 4 —  $\theta = 4.172^\circ$ ; 5, 6 —  $\theta = 5^\circ$ ; 7, 8 — точки  $P_m, P_s$  критерия отсоединения и звукового критерия

чим. При больших углах ( $\theta > 4.172^\circ$ ) ударные поляры отраженного скачка лежат правее оси  $p'$  и соответствуют режимам с нерегулярным отражением скачков. На картинах течения при  $\theta = 5^\circ$  (фиг. 3, б) и особенно на режимах с развитым мостообразным скачком, например, как показано на фиг. 3, в для  $\theta = 10^\circ$ , уже четко видны парные слои с резким поперечным изменением плотности, отвечающие контактным разрывам 4, исходящим из тройных точек  $P_t$  мостообразного скачка 3.

По рассчитанным картинам течения в поперечном сечении определялся также характерный угловой размер мостообразного скачка — угол  $\varphi_t$  между радиусом-вектором тройной точкой  $P_t$  и биссектрисой, как показано на фиг. 1, б. Значения  $\varphi_t$ , полученные для ряда углов  $\theta$  при  $M = 3$ , даны на фиг. 5 — точками (1), вертикальными отрезками отмечена их погрешность  $\pm 0.5^\circ$ . Угол клина  $\theta_{tr}$ , который можно считать переходным, соответствует значению  $\varphi_t = 0$ , он определялся по пересечению с осью  $\theta$  кривой  $\varphi_t(\theta)$ ,

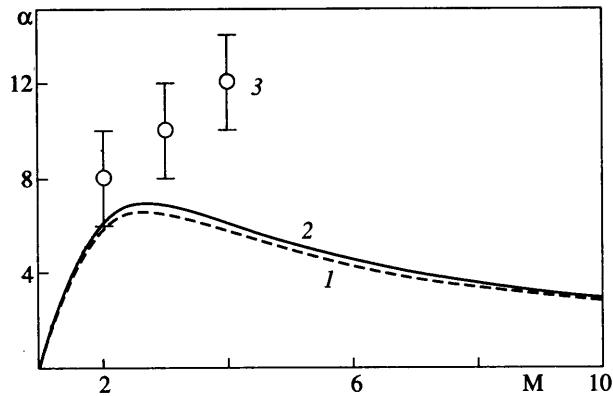


Фиг. 5. Зависимость углового размера  $\Phi_r$  мостообразного скачка в поперечном сечении от угла клина  $\theta$  при  $M = 3$ : 1 – численные данные, 2 – аппроксимация, 3, 4 – углы  $\theta_s$ ,  $\theta_m$

аппроксимирующей численные данные полиномом третьего порядка по методу наименьших квадратов и показанной на фиг. 5 (кривая 2). Ее пересечение с осью  $\theta$  дает значение  $\theta_r \approx 3.98^\circ$ , близкое к значениям  $\theta_s \approx 3.977^\circ$  и  $\theta_m \approx 4.172^\circ$ , также отмеченных точками 3 и 4 на этой фигуре. Различие между этими величинами не превосходит  $0.2^\circ$ , при этом следует заметить, что точность получения углов  $\theta_r$  недостаточна для того, чтобы определенно установить, какой критерий – звуковой или отсоединения – отвечает переходу от регулярного к нерегулярному отражению скачков в численных расчетах. В целом переходные углы клиньев, полученные численно для ряда чисел  $M = 1.5, 3, 6$  и  $10$ , согласуются, в пределах указанной погрешности, с этими критериями перехода, рассчитанными аналитически.

Еще одна угловая конфигурация, образованная пересекающимися пластинами и отличающаяся от рассмотренной выше, исследована в [5]. Изменение режимов ее обтекания определяется в зависимости от угла атаки  $\alpha$  в биссекторной плоскости. Так как для нее  $\theta \equiv 0$ , двугранный угол между пластинами с изменением  $\alpha$  остается постоянным. Результаты аналитических расчетов углов  $\alpha_m$  и  $\alpha_s$ , отвечающих критерию отсоединения и звуковому критерию, представлены для этой конфигурации ( $\nu = 90^\circ$ ,  $\chi = 0$ ) на фиг. 6. На этой же фигуре показаны переходные углы атаки  $\alpha_r$ , полученные экспериментально в аэродинамической трубе Т-313 ИТПМ при числах  $M = 2.03, 3.02$  и  $4.03$  [5]. Они определены с погрешностью около  $\pm 2^\circ$ , отмеченной на фиг. 6 вертикальными отрезками. Экспериментальные значения  $\alpha_r$  лежат выше расчетной границы перехода на  $2-6^\circ$ , являются монотонно возрастающими и не показывают максимума в исследованном диапазоне числа Маха. Одна из причин указанного расхождения – вытесняющий эффект пограничного слоя, который в экспериментах [5] был искусственно турбулизован. Как показывают экспериментальные данные [5], на режимах с регулярным отражением скачков эффект оттеснения скачков по сравнению с их положением в вязком течении эквивалентен увеличению  $\alpha$  на  $2-3^\circ$ . Кроме того, на характер изменения экспериментально определенных переходных углов  $\alpha_r$  в зависимости от числа  $M$  может влиять вязко-невязкое взаимодействие отраженных скачков уплотнения с пограничным слоем на пластинах. Это связано с тем, что в угловом течении формирование структуры с маховским скачком и поперечно-дозвуковой скоростью за ним подвержено действию возмущений, распространяющихся от обтекаемых пластин в области ребра угла к скачку. В условиях экспериментов [5] вязко-невязкое взаимодействие происходило как без отрыва пограничного слоя, так

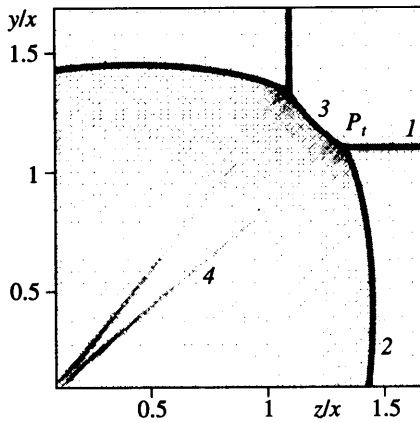




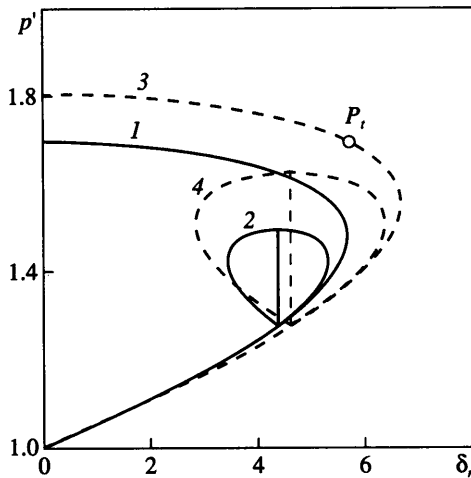
Фиг. 6. Углы атаки для конфигурации с пересекающимися пластинами, отвечающие переходу от регулярного к нерегулярному отражению, в зависимости от числа Маха ( $\nu = 90^\circ$ ;  $\chi = 0$ ): 1 – критерий отсоединения, 2 – звуковой критерий, 3 – экспериментальные значения  $\alpha_{cr}$  [5]

и с его косым отрывом, но режимы этого взаимодействия непосредственно при углах атаки, близких к переходным, в [5] не определялись. В то же время расчеты показывают, что интенсивность  $p_2/p_1 = 1.48$ – $1.6$  отраженных скачков при  $M = 2$  ниже критической  $(p_2/p_1)_{cr} \approx 1.65$  для косого отрыва, а при  $M = 3$  и  $4$  превосходит ее:  $p_2/p_1 = 1.58$ – $1.76 > (p_2/p_1)_{cr} \approx 1.5$ . Здесь  $p_1, p_2$  – давления перед и за отраженным скачком непосредственно у поверхности пластин,  $p_1$  равно давлению за падающим скачком,  $(p_2/p_1)_{cr}$  – относительное давление, критическое для косого отрыва турбулентного пограничного слоя. Указанные величины  $(p_2/p_1)_{cr}$  определены в [5]. Значит, можно предполагать, что переход от регулярного к маховскому отражению скачков происходил при  $M = 2$  в условиях без косого отрыва пограничного слоя, а при  $M = 3$  и  $4$  – с косым отрывом, что и повлияло на экспериментально определенный характер зависимости угла  $\alpha_{cr}$  от числа Маха.

**3. Типы угловых течений с нерегулярными отражениями скачков.** Проведенные численные расчеты течений в угловых конфигурациях с  $\nu = 90^\circ$ ,  $\chi = 0$  показывают, что в них в поперечном сечении реализуются те же типы нерегулярных отражений скачков, которые характерны для плоских квазистационарных течений [20], а именно: неймановское отражение, одиночное, переходное и двойное маховское отражения. В [21] одиночное и переходное маховские отражения называются соответственно простым и сложным. Заметим, что, как указано в [20], в плоских стационарных течениях возможен только один тип – одиночное маховское отражение. Численные расчеты течений с простым одиночным маховским отражением скачков в угловых течениях представлены в [3, 6, 7, 9, 10], течений с переходным и двойным маховскими отражениями – в [11]. Численные расчеты обтекания  $\Lambda$ -образных крыльев в [18, 19] также проведены для режимов с нерегулярным отражением скачков, но тип этих отражений не определен. Идентификация их типа по данным [18, 19] затруднена вследствие того, что использована сетка с очень малым числом расчетных ячеек (не более чем  $50 \times 50$  в поперечном сечении, скачки размазывались на 5–6 ячеек). Следует отметить, что во всех указанных исследованиях угловых течений не анализировались полученные режимы течения с построением ударных поляр, не проводилось какое-либо их сопоставление и идентификация в соответствии с указанными режимами нерегулярного или маховского отражения скачков для плоских течений.



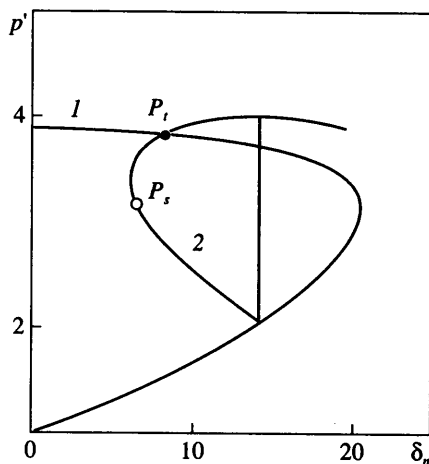
Фиг. 7. Течение с неймановским отражением скачков для  $M = 1.5$ ,  $\nu = 90^\circ$ ,  $\chi = 0$ ,  $\theta = 5^\circ$ : 1, 2 – падающий и отраженный скачки, 3 – мостообразный скачок, 4 – контактный разрыв



Фиг. 8. Ударные поляры для течения с неймановским отражением скачков при  $M = 1.5$ ,  $\nu = 90^\circ$ ,  $\chi = 0$ : 1, 2 – падающий и отраженный скачки для  $\varphi_t = 0$ ; 3, 4 – то же для  $\varphi_t = 5.5^\circ$

Пример углового течения с нерегулярным неймановским отражением скачков показан на фиг. 7 для  $M = 1.5$ ,  $\theta = 5^\circ$ . Отметим, что по данным расчетов поток за отраженным скачком 2 у точки  $P_t$  в поперечном сечении отклоняется в ту же сторону, что и при прохождении падающего скачка 1. В отличие от этого для простого одиночного маховского отражения поток у тройной точки отклоняется в противоположную сторону.

Ударные поляры для рассматриваемого углового течения представлены на фиг. 8. Они приводятся для двух случаев: во-первых, для отражения скачков в биссекторной плоскости  $\varphi_t = 0$ , и во-вторых, для меридиональной плоскости  $\varphi_t = 5.5^\circ$ , проходящей через ось  $x$  и тройную точку  $P_t$  системы скачков с нерегулярным отражением, полу-



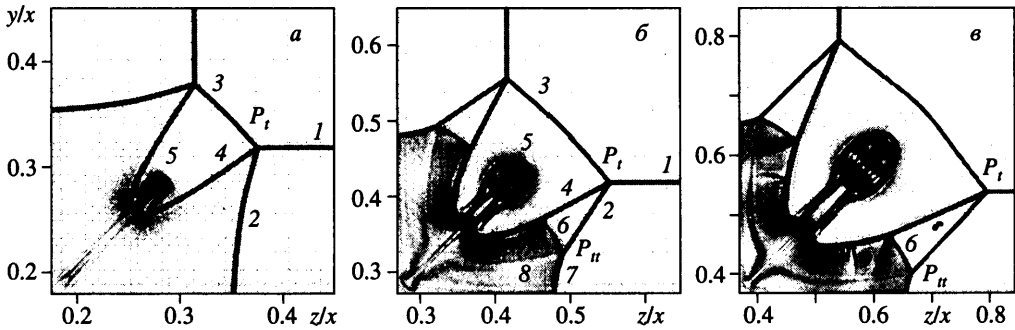
Фиг. 9. Ударные поляры для течения с простым маховским отражением скачков при  $M = 3$ ,  $\nu = 90^\circ$ ,  $\chi = 0$ ;  $\theta = 10^\circ$ ,  $\varphi_i = 4.1^\circ$ , 1, 2 – падающий и отраженный скачки

ченной в численных расчетах. Поляры для  $\varphi_i = 0$  отвечают условиям отражения падающих скачков, которые могут быть определены априорно. Поляры для  $\varphi_i > 0$  соответствуют сформировавшейся системе падающих и отраженных скачков. Заметим, что при формировании системы скачков с нерегулярным отражением в угловом течении тройная точка  $P_t$  удаляется от точки пересечения падающих скачков в биссекторной плоскости – точки возможного их регулярного отражения, все время оставаясь на падающем скачке. Соответственно увеличивается радиус-вектор точки  $P_t$ . Это сопровождается увеличением скорости потока поперечно-конического течения, набегающего на формирующуюся в точке  $P_t$  тройную систему скачков и направленного по ее радиусу-вектору, а также уменьшением угла между падающим скачком и радиусом-вектором точки  $P_t$ , т.е. уменьшением наклона падающего скачка по отношению к направлению набегающего потока. Таким образом, ударные поляры и условия их пересечения для случая  $\varphi_i > 0$  отличаются от таковых для  $\varphi_i = 0$ .

Для течения с рассматриваемым нерегулярным отражением скачков при  $M = 1.5$ ,  $\theta = 5^\circ$  поляры 2 и 4 отраженных скачков в обоих случаях ( $\varphi_i = 0$  и  $5.5^\circ$ ) лежат справа от оси  $p'$  и нигде не пересекают поляры 1 и 3 падающих скачков. Следовательно, отраженный скачок, определяемый по ударным полярам, в данном случае не отвечает какой-либо тройной системе скачков маховского отражения.

Указанные свойства нерегулярного отражения скачков, полученного для рассматриваемого углового течения, аналогичны тем, которые имеют место для плоских квазистационарных течений со слабыми падающими скачками в условиях так называемого “парадокса Неймана” [20]. Этот же тип неймановского отражения в угловых течениях, как и в плоских, реализуется в тех случаях, когда поляра отраженного скачка пересекает поляру падающего скачка справа от своей оси. Система скачков, образующаяся в условиях парадокса Неймана, не является классической ударно-волновой системой Маха, формирующейся при простом одиночном маховском отражении. Для объяснения нерегулярных неймановских отражений в плоских течениях предложены различные теории (см., например, [32–36]), для изучения их природы проведено множество экспериментов и численных расчетов в рамках невязкого газа. Тем не менее многие вопросы этого явления остаются все еще не выясненными.

Пример картины течения с простым одиночным маховским отражением скачков представлен на уже обсуждавшейся фиг. 3, а для  $M = 3$ ,  $\theta = 10^\circ$ . Поясним особенности



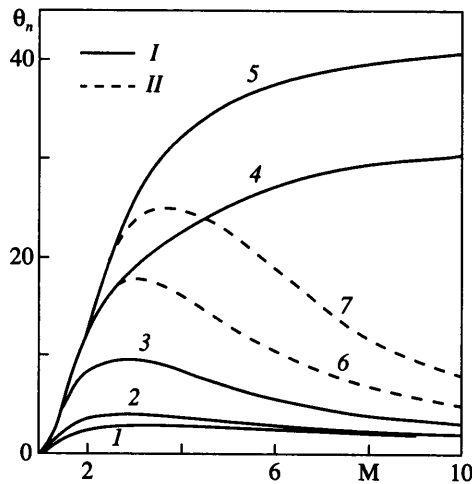
Фиг. 10. Типы угловых течений с маховскими отражениями скачков для  $M = 6$ ,  $\nu = 90^\circ$ ,  $\chi = 0$ : *a* – переходное при  $\theta = 10^\circ$ ; *b* – двойное при  $\theta = 15^\circ$ ; *c* – многоскачковое при  $\theta = 20^\circ$ , 1 – падающий скачок, 2 – отраженный скачок, 3 – мостообразный скачок, 4 – контактный разрыв, 5 – спиральные вихри, 6 – вторичный отраженный скачок, 7 – маховский скачок у стенки, 8 – вторичный контактный разрыв, 9 – висячий скачок,  $P_t$  – тройная точка маховской системы скачков,  $P_{ii}$  – вторичная тройная точка нерегулярного взаимодействия скачков

этого отражения с помощью совмещенных ударных поляр, отвечающих положению тройной точки  $P_t$ , полученной в численных расчетах, т.е. для угла  $\varphi_t \approx 4.1^\circ$  (фиг. 9). Поляры падающего 1 и отраженного 2 скачков расположены справа от оси  $p'$  и пересекаются одна с другой слева от оси последнего. Тройная точка  $P_t$  расположена на ударной поляре отраженного скачка 2 выше точки  $P_s$ , отвечающей звуковому критерию, т.е. поток за отраженным скачком вблизи этой точки является дозвуковым. Это соответствует условиям, при которых в плоских течениях реализуется одиночное маховское отражение [20]. Заметим, что, как показывают данные проведенного анализа свойств угловых течений этого типа, мостообразный скачок маховского отражения может быть как выпуклым, так и вогнутым, а также плоским, т.е. прямолинейным в поперечном сечении в отличие от плоских стационарных течений, в которых маховский скачок всегда выпуклый. Так, для рассматриваемой угловой конфигурации при  $M = 3$  плоский маховский скачок отвечает значению  $\theta \approx 13^\circ$ .

Типы плоских квазистационарных течений с переходным и двойным маховскими отражениями при обтекании клина возникают в тех случаях, когда поток за отраженным скачком у тройной точки  $P_t$  становится сверхзвуковым, причем некоторый участок этого скачка, исходящего из тройной точки, является прямолинейным. Характерная особенность плоских течений этого типа: контактный разрыв, исходящий из тройной точки  $P_t$ , направлен под углом к клину, и при приближении к нему он разворачивается против потока и сворачивается в спиральный вихрь.

Структура угловых течений с переходным и двойным маховским отражением скачков аналогична плоским. Примеры угловых течений с переходным и двойным маховскими отражениями скачков представлены для  $M = 6$ ,  $\theta = 10$  и  $15^\circ$  на фиг. 10, *a, b*. В обоих случаях точка пересечения ударных поляр падающего и отраженного скачков – тройная точка  $P_t$  – лежит ниже точки  $P_s$ , отвечающей звуковому критерию, т.е. для этих течений поток за отраженным скачком непосредственно у тройной точки также является поперечно сверхзвуковым.

В течениях с переходным маховским отражением (фиг. 10, *a*) поток за отраженным скачком 2 при удалении от тройной точки  $P_t$  становится поперечно дозвуковым, а сам скачок – все более вогнутым. Такое искривление скачка происходит под воздействием волн сжатия. Контактные разрывы 4, исходящие из тройных точек, также сворачиваются в спиральные вихри 5.

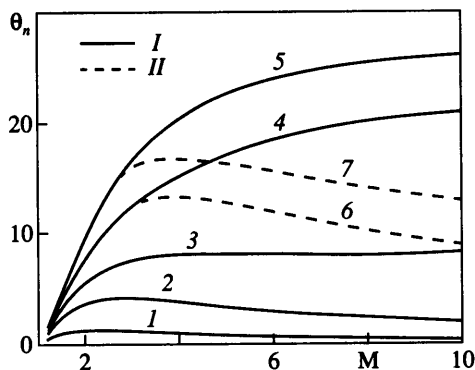


Фиг. 11. Углы клиньев конфигурации с  $v = 90^\circ$  и различной стреловидностью, отвечающие критериям перехода от регулярного к нерегулярному отражению скачков: I – звуковой критерий, I–5 –  $\chi = +10, 0, -20, -30, -40$ , II – критерий Неймана, 6–7 –  $\chi = -30, -40$

В течении с двойным маховским отражением (фиг. 10, б) в результате отражения от стенки скачка 2 со сверхзвуковым потоком за ним, возникает еще одна система нерегулярного взаимодействия скачков с тройной точкой  $P_{II}$ . Она включает вторичный отраженный скачок 6, замыкающийся на сворачивающемся контактным разрыве 4, вторичный маховский скачок 7 у стенки и контактный разрыв 8, исходящий из точки  $P_{II}$ . В течении с переходным маховским отражением скачку 6 отвечает волна сжатия.

Проведенные численные расчеты угловых течений при больших скоростях  $M \geq 6$  показали, что в этих течениях образуется разновидность маховского отражения того же типа, что и двойное, которое можно назвать многоскачковым маховским отражением. Пример углового течения этого типа показан на фиг. 10, в для  $M = 6$ ,  $\theta = 20^\circ$ . В таком течении в струе между тройными точками  $P_I$  и  $P_{II}$  помимо вторичного отраженного скачка 6 возникают дополнительный (висячий) скачок 9 и сопровождающие их отраженные волны расширения. Многоскачковые маховские отражения, как и двойные, возникают в тех случаях, когда поток за отраженным скачком является сверхзвуковым в поперечном направлении, но при большей скорости набегающего потока по нормали к линии пересечения падающих скачков.

**4. Типы сверхзвуковых течений, формирующиеся в угловых конфигурациях с различной V-образностью и стреловидностью.** Рассмотрим влияние угла стреловидности передних кромок клиньев и угла V-образности между ними на границы перехода от регулярного к нерегулярному отражению скачков. Заметим, что для рассматриваемых угловых конфигураций угол V-образности задавался как угол  $v$  между проекциями их передних кромок на плоскость  $xy$ , угол  $\theta_n$  – по нормали к передней кромке (см. фиг. 1). Проведенный анализ режимов перехода для угловых конфигураций с углами V-образности и стреловидности показал, что для них возможен переход в соответствии с критерием Неймана. Условия такого перехода ранее не рассматривались и параметры угловых конфигураций, отвечающие этим условиям, были неизвестны. Углы клиньев  $(\theta_n)_m$  и  $(\theta_n)_e$ , соответствующие звуковому критерию и критерию Неймана, показаны на фиг. 11 и 12 в зависимости от числа Маха для ряда значений углов V-образности и стреловидности. Следует отметить, что переход по критерию Неймана возможен, начиная с некоторого значения  $\chi < -20^\circ$  при  $v = 90^\circ$  и  $v < 75^\circ$  при  $\chi = 0$ .



Фиг. 12. Углы клиньев конфигурации с  $\chi = 0$  и различной V-образностью, отвечающие критериям перехода от регулярного к нерегулярному отражению скачков: I – звуковой критерий, I–5 –  $v = 120, 90, 75, 60, 45$ , II – критерий Неймана, 6–7 –  $v = 60, 45^\circ$

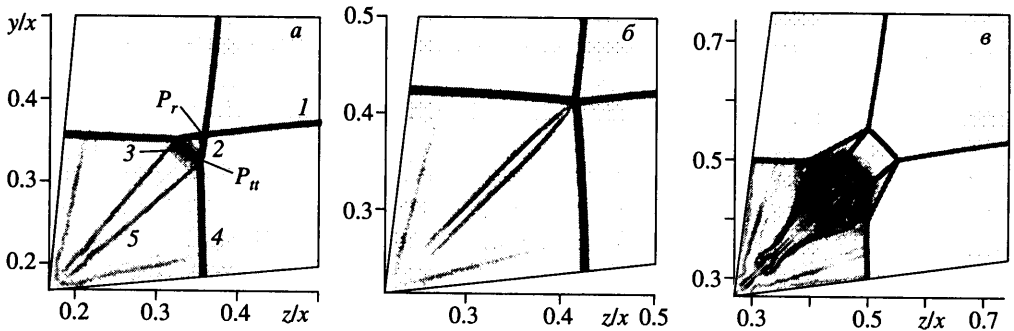
Этот переход может быть также реализован различным сочетанием углов V-образности и стреловидности в некотором их диапазоне.

Картины, показывающие основные особенности изменения режимов течения с увеличением угла клиньев  $\theta_n$  в таких условиях, представлены на фиг. 13 и 14 для  $M = 6$ .

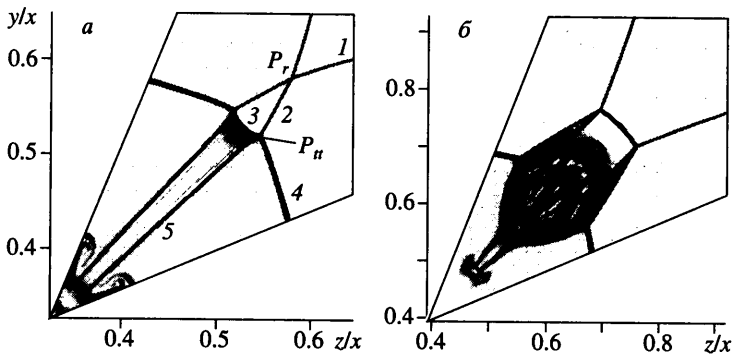
В случае  $v = 90^\circ$ ,  $\chi = -30^\circ$  при углах  $\theta_n \leq (\theta_n)_e \approx 10.61^\circ$  реализуется регулярное отражение падающих скачков, как показано на фиг. 13, а для  $\theta_n = 10^\circ$ . Оно имеет место и при больших углах, например для угла  $\theta_n = 12.5^\circ$  (фиг. 13, б), значительно меньшем угла  $(\theta_n)_m \approx 27.42^\circ$ , определяемого с соответствием с критерием отсоединения. Нерегулярное отражение типа двойного или многоскачкового маховского появляется при углах  $\theta_n$ , больших угла  $(\theta_n)_e$ , но существенно меньших угла  $(\theta_n)_m$ , как показано на фиг. 13, в для  $\theta_n = 15^\circ$ .

В случае  $v = 45^\circ$ ,  $\chi = 0$  режимы течения с регулярным отражением падающих скачков реализуются при углах  $\theta_n \leq 11^\circ$ , как, например, при  $\theta_n = 10^\circ$  (фиг. 14, а). Нерегулярное отражение скачков типа многоскачкового маховского, возникает, например, при угле  $\theta_n = 12^\circ$ , заметно меньшем  $(\theta_n)_e \approx 15.67^\circ$  (фиг. 14, б). Отражения этого типа реализуются соответственно и при больших углах  $\theta_n > 12^\circ$ . Для параметров течения  $M = 6$ ,  $\chi = 0$ ,  $v = 60^\circ$  режимы течения с регулярным отражением падающих скачков имеют место при  $\theta_n \leq 11^\circ$ , а при  $\theta_n = 12^\circ$ , близком к  $(\theta_n)_e \approx 12^\circ$ , и соответственно при больших углах, также реализуются режимы отражений типа двойного или многоскачкового маховского.

Следует отметить, что на режимах с регулярным отражением падающих скачков в рассматриваемых случаях формируется поперечное течение, в котором за участком с регулярным отражением падающих скачков образуется внутренний сильный мостообразный скачок 4, как это можно видеть для  $\theta_n = 10^\circ$  в обоих случаях – стреловидной конфигурации с  $v = 90^\circ$ ,  $\chi = -30^\circ$  (фиг. 13, а) и V-образной с  $v = 45^\circ$ ,  $\chi = 0$  (фиг. 14, а). Так как эти нерегулярные отражения скачков возникают за участком регулярного отражения падающих скачков, реализующиеся типы отражения в целом можно назвать регулярно-нерегулярными или маховскими конфигурациями второго порядка. Расчеты показывают, что с увеличением угла клиньев эти отражения образуются до тех пор, пока внутренний маховский скачок 4 не доходит до точки P, регулярного отражения падающих скачков. При больших углах клиньев происходит как бы “разрушение” структуры регулярного отражения, вместо нее образуется ударно-волновая система типа маховской и формируется течение, аналогичное течению либо с двойным, либо с



Фиг. 13. Типы течений, возникающих в угловой конфигурации с обратной стреловидностью, для  $M = 6$ ,  $\nu = 90^\circ$ ,  $\chi = -30^\circ$ : *a* – регулярно-нерегулярное отражение скачков при  $\theta = 10^\circ$ , *l* – падающий скачок, *2* – отраженный скачок, *3* – внутренний мостобразный скачок, *4* – маховый скачок у стенки, *5* – контактный разрыв,  $P_r$  – точка регулярного отражения падающих скачков,  $P_n$  – тройная точка нерегулярного взаимодействия вторичных скачков; *б* – регулярно-нерегулярное отражение скачков при  $\theta = 12.5^\circ$ ; *в* – многоскачковое маховское отражение при  $\theta = 15^\circ$



Фиг. 14. Типы течений, возникающих в угловой конфигурации с острым углом  $V$ -образности, для  $M = 6$ ,  $\nu = 45^\circ$ ,  $\chi = 0$ : *a* – регулярно-нерегулярное отражение скачков при  $\theta_n = 10^\circ$ , *б* – многоскачковое маховское отражение при  $\theta_n = 12^\circ$ ; обозначения см. на фиг. 13, *a*

многоскачковым маховским отражением основных падающих скачков. Заметим, что причина формирования этого отражения не связана с собственно нерегулярным отражением от биссекторной плоскости основных падающих скачков. Расчеты показали также, что при противоположном изменении угла стреловидности  $\chi > 0$  при  $\nu = 90^\circ$  или  $\nu > 90^\circ$  при  $\chi = 0$  реализуются уже обсуждавшиеся режимы отражения типа неймановского или простого маховского. Таким образом, спектр режимов течений с нерегулярным отражением скачков в угловых конфигурациях с углами стреловидности  $\chi < 0$  и  $V$ -образности  $\nu < 90^\circ$  шире по сравнению со случаями  $\chi \geq 0$ ,  $\nu \geq 90^\circ$ .

**Заключение.** Численно и аналитически исследованы невязкие стационарные сверхзвуковые течения в двугранных углах, образованных пересекающимися клиньями сжатия. Рассмотрены течения, симметричные относительно биссекторной плоскости угла. Аналитически определены границы перехода от режимов с регулярным отраже-

нием скачков к режимам с нерегулярным или маховским отражением скачков в этих течениях. Для ряда чисел Маха набегающего потока переходные углы клиньев определены также по данным численных расчетов, получено удовлетворительное согласование с аналитическими зависимостями.

Показано, что в угловых конфигурациях реализуются те же типы нерегулярного отражения скачков в поперечном сечении, характерные для плоских квазистационарных течений, а именно неймановское и маховское – простое одиночное, переходное и двойное. Возможны также разновидности указанных типов течений, структура которых в поперечном сечении определяется ограниченностью области течения между маховским скачком и вершиной угла.

Результаты аналитических расчетов показали, что для течений в угловых конфигурациях с нестреловидными клиньями ( $\chi = 0$ ), передние кромки которых имеют угол  $V$ -образности  $\nu = 90^\circ$ , условия перехода от регулярного к маховскому отражению скачков, даже в пределе при  $M \rightarrow \infty$ , соответствуют только либо критерию отсоединения (максимально возможного угла отклонения потока за отраженным скачком), либо звуковому критерию (достижению звуковой скорости за отраженным скачком). Аналитически определено, что условия течения, при которых возможен переход по критерию Неймана, достигаются в угловых конфигурациях с обратной стреловидностью  $\chi < 0$  даже при  $\nu = 90^\circ$ , в конфигурациях с углами  $\chi = 0$  и  $\nu < 90^\circ$ , а также в конфигурациях с различным сочетанием углов  $\chi$  и  $\nu$ . Проведенные численные расчеты угловых течений продемонстрировали, что регулярное отражение падающих скачков в таких конфигурациях может происходить при углах клиньев как меньших, так и больших значений, соответствующих критерию Неймана, но до достижения параметров течения, удовлетворяющих критерию отсоединения или звуковому критерию перехода. В конфигурациях с углами  $\chi < 0$  и  $\nu < 90^\circ$  выявлены режимы течения с регулярным отражением скачков в плоскости симметрии и с внутренним маховским скачком, которые могут быть определены как регулярно-нерегулярные или маховские отражения второго порядка. В этих условиях переход к течению с ударно-волновой системой, состоящей из падающих и маховского скачков, с увеличением угла клиньев происходит тогда, когда внутренний маховский скачок в поперечном сечении достигает точки пересечения и регулярного отражения падающих скачков.

Авторы выражают благодарность А.Н. Крайко, который внимательно ознакомился со статьей и замечания которого в процессе обсуждения статьи способствовали более строгому и четкому изложению результатов проведенных исследований.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Charwat A.F., Redekeopp L.G. Supersonic interference flow along corner of intersecting wedges // AIAA Journal. 1967. V. 5. № 3. P. 480–488.
2. Watson R.D., Weinstein L.M. A study of hypersonic corner flow interactions // AIAA Journal. 1971. V. 9. № 7. P. 1280–1286.
3. Михайлов В.Н., Тамилев В.С. Сверхзвуковой поток в угле, образованном пересекающимися пластинками // Изв. АН СССР. МЖГ. 1972. № 2. С. 162–166.
4. West J.E., Korkegi R.H. Interaction in the corner of intersecting wedges at high Reynolds numbers // AIAA Journal. 1972. V. 10. № 5. P. 652–656.
5. Демьяненко В.С. Экспериментальное исследование пространственных сверхзвуковых течений газа в области интерференции пересекающихся поверхностей: Дис. ...канд. техн. наук. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1973. 267 с.
6. Kutler P. Supersonic flow in the corner formed by two intersecting wedges // AIAA Journal. 1974. V. 12. № 5. P. 577–578.
7. Shankar V., Anderson D., Kutler P. Numerical solutions for supersonic corner flow // J. of Comput. Phys. 1975. V. 17. № 2. P. 160–180.



8. Майканар Г.И. Сверхзвуковое течение в угле плоских скачков уплотнения // Учен. зап. ЦАГИ. 1976. Т. 7. № 6. С. 106–110.
9. Marconi F. Supersonic, inviscid, conical corner flowfields // AIAA Journal. 1980. V. 18. № 1. P. 78–84.
10. Макаров В.Е. К выделению поверхностей разрывов при численном расчете сверхзвуковых конических течений // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1982. Т. 22. № 5. С. 1218–1226.
11. Marsilio R. Vortical solutions in supersonic corner flows // AIAA Journal. 1993. V. 31. № 9. P. 1651–1658.
12. Creschi R.J., Rubin S.G., Nardo C.T., Lin T.C. Hypersonic interaction along a rectangular corner // AIAA Journal. 1969. V. 7. № 12. P. 2241–2247.
13. Shang J.S., Hankey W.L. Three-dimensional supersonic interacting turbulent flow along a corner // AIAA Journal. 1979. V. 17. № 7. P. 706–713.
14. Borelli S., Grasso F., Marini M., Periaux J. (Eds.). Proc. Ist Europe-US High Speed Flow Field Database Workshop. Pt 2. T4–97: Corner Flow. Naples, Italy, 1997. Publ. Italian Aerospace Research Center in association with GAMNI, INRIA, University of Houston, 1997. P. 265–308.
15. Швец А.И. Аэродинамика сверхзвуковых форм. М.: Изд-во МГУ, 1987. 208 с.
16. Майканар Г.И. О волновом сопротивлении неосесимметричных тел в сверхзвуковом потоке // ПММ. 1959. Т. 23. Вып. 2. С. 376–378.
17. Nonweiler T.R.F. Aerodynamic problems of manned space vehicles // J. Roy. Aeronaut. Soc. 1959. V. 63. № 585. P. 521–528.
18. Лапыгин В.И. Расчет сверхзвукового обтекания V-образных крыльев методом установления // Изв. АН СССР. МЖГ. 1971. № 3. С. 180–185.
19. Лапыгин В.И. О решении задачи обтекания V-образного крыла с сильной ударной волной на передней кромке // Изв. АН СССР. МЖГ. 1973. № 3. С. 114–119.
20. Ven-Dor G. Shock wave reflection phenomena. N.Y., etc.: Springer, 1992. 307 p.
21. Гвоздева Л.Г. Отражения ударных волн от плоского клина // Нестационарные взаимодействия ударных и детонационных волн в газах // Под ред. Коробейникова В.П. М.: Наука, 1986. С. 59–74.
22. Иванов М.Я., Крайко А.Н., Михайлов Н.В. Метод сквозного счета двумерных и пространственных сверхзвуковых течений // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1972. Т. 12. № 2. С. 441–463.
23. Kudryavtsev A.N., Rakhimov R.D. A marching procedure of numerical solution of two-dimensional and three-dimensional steady. Euler equations using shockcapturing schemes // Proc. Intern. Conf. Methods of Aerophys. Research (ICMAR-98). Novosibirsk, 1998. Pt 1. P. 117–122.
24. Goonko Y.P., Kharitonov A.M., Kudryavtsev A.N. и др. Euler simulations of the flow over a hypersonic convergent inlet integrated with a forebody compression surface // CD-proc. European Congress on Computational Methods in Applied Science and Engineering. Barcelona, 2000.
25. Anderson W.K., Thomas J.L., van Leer B. Comparison of finite volume flux vector splittings for the Euler equations // AIAA Journal. 1986. V. 24. № 9. P. 1453–1460.
26. Einfeldt B., Munz C.D., Roe P.L., Sjogreen B. On Godunov-type methods near low densities // J. Comput. Phys. 1991. V. 92. № 2. P. 273–295.
27. Shu C.-W., Osher S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes // J. Comput. Phys. 1988. V. 77. № 2. P. 439–471.
28. Ivanov M.S., Vandromme D., Fomin V.M. и др. Transition between regular and Mach reflection of shock waves: new numerical and experimental results // Shock Waves. 2001. V. 11. № 3. P. 199–207.
29. Гунько Ю.П., Маркелов Г.Н. Применение соотношений косоугольного скачка уплотнения в плоском течении для решения задач с плоскими скачками общего пространственного положения. Препринт № 15-89. Новосибирск: ИТПМ АН СССР, 1989. 24 с.
30. Гунько Ю.П., Маркелов Г.Н., Шапкин А.П. Газодинамическое конструирование волнолетов с конвергентными поверхностями сжатия и воздухозаборниками // Сиб. физ.-тех. журн. 1993. Вып. 4. С. 47–55.
31. Kudryavtsev A.N., Hadjadj A. Visualisation graphique en mécanique des fluides numérique // C.r. 9<sup>ème</sup> Colloq. Francophone de Visualisation et de Traitement d'Images en Mécanique des Fluides – FLUVISU-2001. Rouen, France, 2001. P. 55–62.
32. Colella P., Henderson L.F. The von Neumann paradox for the diffraction of weak shock wave // J. Fluid Mech. 1990. V. 213. P. 71–94.

33. *Olim M., Devey J.M.* A revised three-shock solution for the Mach reflection of weak shock // *Shock Waves*. 1992. V. 2. № 3. P. 167–176.
34. *Sandeman R.J.* Condition at the triple point in weak Mach reflection // *Proc. 21st Intern. Symp. on Shock Waves*. Australia, 1997. V. II. P. 893–898.
35. *Васильев Е.И., Крайко А.Н.* Численное моделирование дифракции слабых скачков на клине в условиях парадокса Неймана // *Журн. вычислит. математики и матем. физики*. 1999. Т. 39. № 8. С. 1393–1404.
36. *Sandeman R.J.* A simple physical theory of weak Mach reflection over plane surface // *Shock Waves*. 2000. V. 10. № 2. P. 103–112.

Новосибирск

Поступила в редакцию  
15.IV.2003