

УДК 532.527

© 2004 г. М. В. КАЛАШНИК

ФОРМИРОВАНИЕ ВИХРЕВОЙ ВОРОНКИ СТОКОМ МАССЫ В МОДЕЛИ МЕЛКОЙ ВОДЫ

Рассмотрена задача об эволюции осесимметричного вихря в модели мелкой воды при наличии заданных стоков массы. С использованием приближения циклострофического баланса, т.е. баланса между градиентом давления и центробежной силой, описан нелинейный процесс установления стационарного вихревого режима истечения (вихревой воронки).

Ключевые слова: модель мелкой воды, вихревые течения, сток массы, аналитические решения.

При перемещении частицы жидкости к центру вихря тангенциальная компонента ее скорости растет в силу закона сохранения углового момента $M = rv_\phi = \text{const}$. Этот динамический механизм – механизм переноса углового момента радиальными вторичными течениями отвечает как за формирование интенсивных атмосферных вихрей (тропические циклоны, смерчи [1, 2]), так и за формирование вихревой воронки в ванне. В настоящей работе дано аналитическое описание этого механизма в рамках простой задачи об эволюции осесимметричного вихря на мелкой воде при наличии заданного стока массы. Последний формирует радиальное течение, переносящее угловой момент к центру, что приводит к интенсификации вихря и связанной с этим деформации свободной поверхности. Рассмотрены два варианта задачи. В первом из них жидкость откачивается через боковую поверхность внутреннего цилиндра, во втором – через отверстие на дне. Задача решается в приближенной постановке, с использованием допущения о сохранении во времени циклострофического баланса, т.е. баланса между градиентом давления и центробежной силой. Второй вариант задачи впервые рассматривался в [3]; в настоящей работе указаны новые случаи интегрируемости.

1. Сток массы через боковую поверхность внутреннего цилиндра. Осесимметричные движения жидкости в модели мелкой воды описываются уравнениями [4]:

$$\begin{aligned} \frac{du_r}{dt} - \frac{M^2}{r^3} + g \frac{\partial h}{\partial r} &= 0; & \frac{dM}{dt} &= 0; & \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(ru_r h) &= 0 \\ \frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + u_r \frac{\partial}{\partial r} \end{aligned} \quad (1.1)$$

где u_r, v_ϕ – радиальная и тангенциальная компоненты скорости соответственно, $M = rv_\phi$ – угловой момент, h – высота (уровень) жидкости, g – ускорение свободного падения. Рассматриваем (1.1) в области $R_* < r < \infty$ с условиями:

$$u_r(R_*, t) = -u_*, \quad u_r, v_\phi \rightarrow 0, \quad h \rightarrow h_*, \quad r \rightarrow \infty$$

Здесь $-u_*$ – заданное значение радиальной компоненты скорости на границе (в общем случае $u_* = u_*(t)$), h_* – уровень жидкости в невозмущенном состоянии (на бесконечности).

Перейдем в (1.1) к безразмерным переменным, полагая:

$$r = R_* r', \quad t = t_* t', \quad h = h_* h', \quad v_\varphi = v_* v'_\varphi, \quad u_r = u_* u'_r, \quad \left(t_* = \frac{R_*}{u_*}, \quad v_* = \sqrt{gh_*} \right) \quad (1.2)$$

$$\varepsilon^2 \frac{du_r}{dt} - \frac{M^2}{r^3} + \frac{\partial h}{\partial r} = 0; \quad \frac{dM}{dt} = 0; \quad \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(ru_r h) = 0, \quad \varepsilon = \frac{u_*}{v_*}$$

В (1.2) штрихи у безразмерных переменных опущены. Если $u_* \ll v_*$ (слабая интенсивность стока), параметр ε мал: $\varepsilon \ll 1$. Это позволяет (по крайней мере, формально) использовать допущение о сохранении во времени условия циклострофического баланса: $M^2/r^3 = \partial h/\partial r$, отвечающего $\varepsilon = 0$. Полагая в (1.2) $\varepsilon = 0$ и переходя для удобства к новым переменным $s = 0.5r^2$, $u = ru_r$, получаем задачу в циклострофическом приближении:

$$\frac{M^2}{4s^2} = \frac{\partial h}{\partial s}; \quad \frac{\partial M}{\partial t} + u \frac{\partial M}{\partial s} = 0; \quad \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s}(uh) = 0 \quad (1.3)$$

$$u(0.5, t) = -1, \quad \frac{u}{\sqrt{s}} \rightarrow 0, \quad v_\varphi \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 1 \quad s \rightarrow \infty$$

Задача (1.3) имеет стационарное решение:

$$h = 1 - \frac{a}{s}, \quad u = -\frac{(1-2a)s}{s-a}, \quad v_\varphi = \sqrt{\frac{2a}{s}} \quad (1.4)$$

описывающее режим стационарного “потенциального” ($v_\varphi = 2\sqrt{a}r^{-1}$) истечения жидкости. Решение (1.4) характеризуется однородным распределением углового момента $M^2 = 4a = \text{const}$, причем из условия $h(0.5, t) > 0$ следует, что параметр a может принимать значения $0 < a < 0.5$. Ниже будет показано, что режим стационарного истечения (1.4) в определенном смысле является устойчивым, и в рамках циклострофического приближения описан процесс установления этого решения.

Рассмотрим для системы (1.3) задачу с начальными данными:

$$t = 0: M = M_0(s), \quad h = h_0(s), \quad M_0^2 = 4s^2 \frac{\partial h_0}{\partial s}$$

Прямой подход к решению этой задачи состоит в следующем. Исключая из (1.3) угловой момент M , получим систему из двух нелинейных уравнений относительно u , h :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(s^2 \frac{\partial h}{\partial s} \right) + u \frac{\partial}{\partial s} \left(s^2 \frac{\partial h}{\partial s} \right) = 0; \quad \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s}(uh) = 0 \quad (1.5)$$

Дифференцируя второе уравнение (1.5) по s и вычитая первое, деленное на s^2 , после преобразований получим уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(k \frac{\partial u}{\partial s} \right) - \frac{1}{s} \frac{\partial k}{\partial s} u = 0; \quad k = h^2 \quad (1.6)$$

которое связывает u с h в каждый момент времени. Нетрудно заметить, что $u_1 = s$ является частным решением уравнения (1.6). Второе, линейно независимое решение выражается квадратурой через первое:

$$u_2 = u_1 \int_s^\infty \frac{ds}{h^2 u_1^2} = s \int_s^\infty \frac{ds}{(hs)^2}$$

Зная фундаментальную систему решений, находим решение (1.6), удовлетворяющее условиям $u(s=0.5) = -1$ и ограниченности на бесконечности:

$$u = cs \int_s^{\infty} \frac{ds}{(hs)^2}; \quad c = -2 \left[\int_{0.5}^{\infty} \frac{ds}{(hs)^2} \right]^{-1} \quad (1.7)$$

Таким образом, с учетом (1.7), решение задачи Коши сводится к решению одного из уравнений (1.5) с коэффициентом u , нелинейно и нелокально зависящим от искомой функции $h(s, t)$. Это решение несложно построить численно. Существует подход, позволяющий построить точные аналитические решения [3]. Перейдем к его изложению.

Введем в рассмотрение функцию

$$I(s, t) = \int_{0.5}^s h ds + b(t), \quad b = \int_0^t h(0.5, t) dt,$$

пропорциональную массе кольца жидкости с внешним радиусом $r = \sqrt{2s}$. Интегрируя второе уравнение (1.5) по s от 0.5 до s , получим, что I удовлетворяет тому же уравнению, что и M (1.3). Исключая из уравнений для M, I скорость u , находим, что якобиан $\partial(M, I)/\partial(s, t) = 0$. Отсюда следует, что в процессе эволюции угловой момент есть однозначная функция I : $M = \Phi(I)$, где конкретный вид зависимости $\Phi(I)$ определяется исключением координаты s из начальных условий: при $t = 0$ $M = M_0(s)$, $I = I_0(s)$. С учетом $M = \Phi(I)$ и $h = \partial I/\partial s$, уравнение циклострофического баланса записывается в виде:

$$s^2 \frac{\partial^2 I}{\partial s^2} = F(I); \quad F(I) = \frac{\Phi^2(I)}{4}$$

Система (1.3) при этом сводится к системе из двух уравнений относительно u, I :

$$s^2 \frac{\partial^2 I}{\partial s^2} = F(I); \quad \frac{\partial I}{\partial t} + u \frac{\partial I}{\partial s} = 0 \quad (1.8)$$

Существование функциональной связи $M = \Phi(I)$ является общим свойством осесимметричных движений мелкой воды, не связанным с использованием циклострофического приближения [5].

Ключевым моментом при решении системы (1.8) является тот факт, что в первое уравнение (1.8) время явно не входит, и его можно считать параметром, от которого зависят две произвольные константы $c_1(t), c_2(t)$ общего интеграла этого уравнения. Если общий интеграл $I = I(s, c_1(t), c_2(t))$ известен, эти константы (функции времени) могут быть найдены из следующих рассуждений. Удовлетворяя условию $h = I'_s \rightarrow 1$ при $s \rightarrow \infty$, зафиксируем одну из констант, так что $I = I(s, c(t))$ зависит уже только от одной константы $c(t)$. Далее, для компоненты скорости u из (1.8) имеем: $u = -I'_t/I'_s = -(I'_c/I'_s) \dot{c}(t)$ (буквенными индексами здесь и далее отмечены соответствующие частные производные, $\dot{c} = dc/dt$). Полагая в последнем равенстве $s = 0.5$, с учетом условия $u(s = 0.5) = -1$, приходим к дифференциальному уравнению для определения $c(t)$:

$$\dot{c}(t) = \frac{I'_s(s = 0.5)}{I'_c(s = 0.5)} \quad (1.9)$$

Решив это уравнение, найдем $c(t)$ и далее

$$I(s, t) = I(s, c(t)), \quad h(s, t) = I'_s, \quad v_\varphi(s, t) = \sqrt{2sh'_s}$$

Для реализации изложенного подхода необходимо знание общего интеграла первого уравнения (1.8). Это уравнение допускает понижение порядка – замена $s = e^x$ и подстановка $dl/dx = y$ приводят к уравнению Абеля второго рода: $ydy/dl - y = F(I)$. В общем случае уравнение Абеля не интегрируется в квадратурах, однако можно указать различные случаи интегрируемости, отвечающие конкретным распределениям $F(I)$ [6]. Ниже рассмотрены несколько примеров.

Пример 1. При $F(I) = a = \text{const}$ общий интеграл (1.8):

$$I = c_2(t)s + c_1(t) - a \ln s$$

Условие $I'_s \rightarrow 1$ при $s \rightarrow \infty$ дает $c_2 = 1$. Обозначая $c_1(t) \equiv c(t)$, запишем уравнение (1.9): $\dot{c}(t) = 1 - 2a$. Отсюда

$$c(t) = (1 - 2a)t + c_0 \quad h = I'_s = 1 - \frac{a}{s}$$

$$v_\varphi = \sqrt{\frac{2a}{s}}, \quad u = -\left(\frac{I'_c}{I'_s}\right)\dot{c}(t) = -(1 - 2a)\frac{s}{(s - a)}$$

Здесь c_0 – константа интегрирования.

Полученное решение есть стационарное решение (1.4).

Пример 2. При $F(I) = a - b \exp(-2I/a)$, $a > 0$, $b > 0$ общий интеграл (1.8):

$$I = a \ln \left[\frac{\sqrt{b} \operatorname{sh}(\eta + c_1)}{\sqrt{a\eta}} \right], \quad \eta = \frac{c_2 s}{a}$$

Как и ранее, условие $I'_s \rightarrow 1$ при $s \rightarrow \infty$ дает $c_2 = 1$. Обозначая $c_1(t) \equiv c(t)$, для переменных h , v_φ , u получим:

$$h = I'_s = \operatorname{cth}(\eta + c(t)) - \frac{1}{\eta}$$

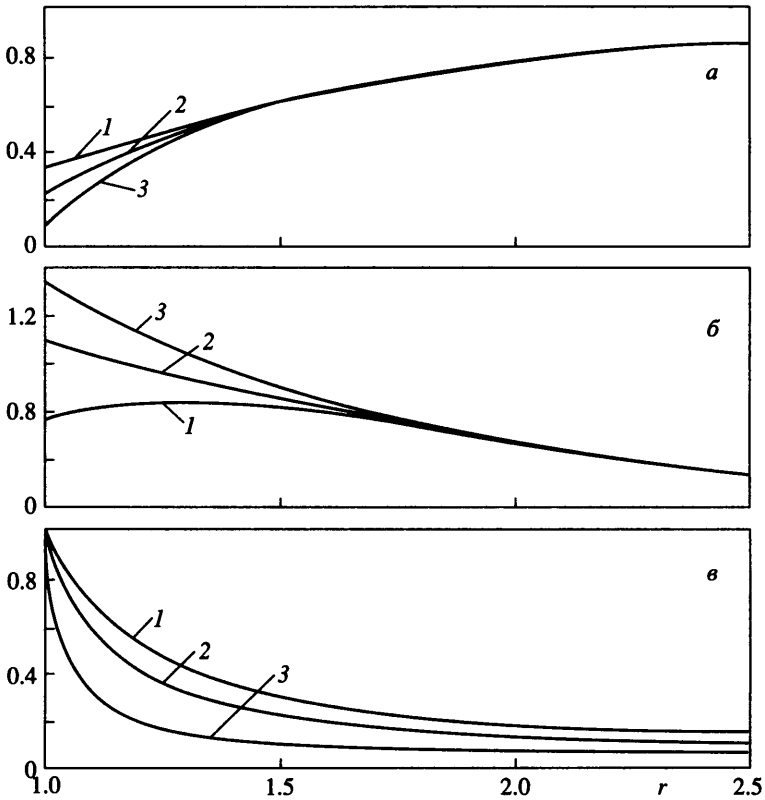
$$v_\varphi = \sqrt{2sh'_s} = \sqrt{\frac{2}{\eta} \left(1 - \frac{\eta^2}{\operatorname{sh}^2(\eta + c(t))} \right)}, \quad u = -\left(\frac{I'_c}{I'_s}\right)\dot{c}(t) = -\frac{a\eta}{\eta - \operatorname{th}(\eta + c(t))}\dot{c}(t) \quad (1.10)$$

Зависимость $c(t)$ находится из уравнения (1.9), которое принимает вид:

$$\dot{c}(t) = 2[\lambda - \operatorname{th}(\lambda + c)], \quad \lambda = 1/2a \quad (1.11)$$

и элементарно интегрируется в квадратурах. Рассматриваем (1.11) с условием $c(0) = 0$.

Построенное решение зависит от единственного параметра $a > 0$, задающего структуру начального распределения. Основные особенности вытекают из качественного анализа (1.11). Легко видеть, что при $\lambda > 1$ ($0 < a < 0.5$) правая часть (1.11) положительна и $c(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$ (при $\lambda \gg 1$ $c(t) \approx 2(\lambda - 1)t$). Переходя в (1.10) к пределу $t \rightarrow \infty$, получим стационарное решение (1.4). Таким образом, при $\lambda > 1$ решение (1.10) описывает процесс установления стационарного решения (1.4) (фиг. 1). Обратим внимание,



Фиг. 1. Радиальные профили $h(a)$, v_ϕ (б), u (в) для зависимости $F(I) = a - b \exp(-2I/a)$, $a = 0.45$ в моменты времени $t_1 < t_2 < t_3 = \infty$ (кривые 1–3)

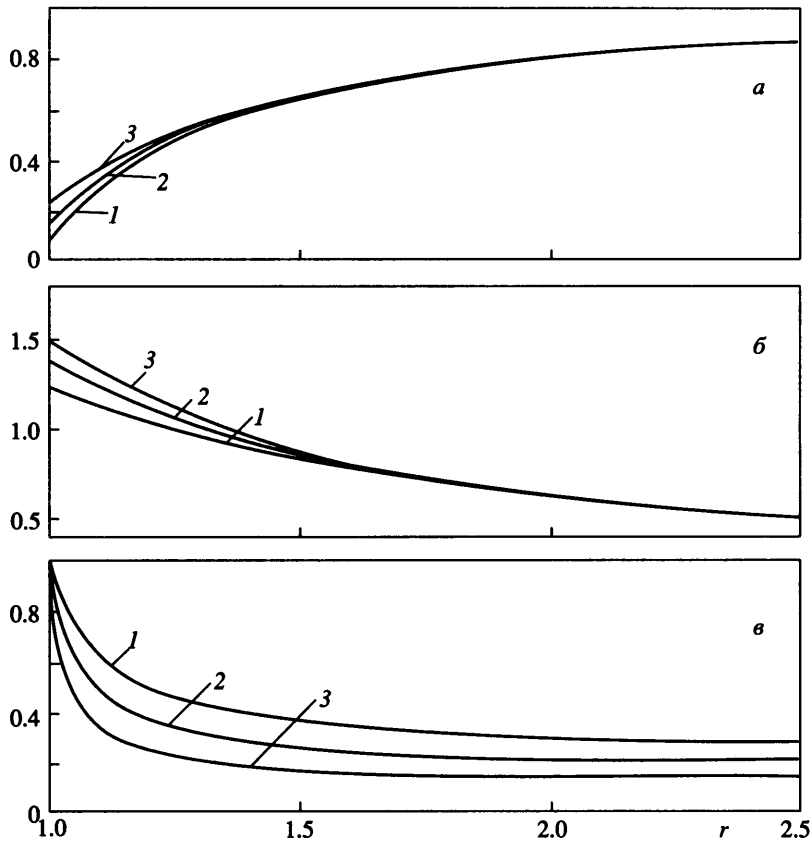
что в стационарном режиме $h(s = 0.5) = 1 - 2a > 0$, т.е. уровень жидкости не падает до нуля, несмотря на непрерывное откачивание. Аналогично при $\lambda = 1$ также $c(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$, однако теперь $h(s = 0.5) \rightarrow 0$. Наконец, в случае $\lambda < 1$ ($a > 0.5$) у уравнения (1.11) появляется неподвижная точка $c = c_*$, где $c_* > 0$ – корень уравнения $\lambda = \text{th}(\lambda + c)$. Соответственно $c(t) \rightarrow c_*$ при $t \rightarrow \infty$. Используя (1.10), легко показать, что при этом $h(s = 0.5) \rightarrow 0$. Таким образом, при $\lambda \leq 1$ вокруг внутреннего цилиндра в пределе формируется вихревая воронка, начинающаяся ото дна. Отметим, что для скорости падения уровня из (1.10) следует

$$h'_t = -\text{sh}^{-2}(\eta + c(t))\dot{c}(t) < 0$$

т.е. уровень падает в каждой точке.

Пример 3. Пусть $F(I) = a + b \exp(-2I/a)$, $a > 0$, $b > 0$. В отличие от предыдущего примера $F(I) < 0$, что приводит к качественному изменению характера решения. Общий интеграл (1.8) записывается в виде:

$$I = a \ln \left[\frac{\sqrt{b} \text{ch}(\eta + c_1)}{\sqrt{a} \eta} \right], \quad \eta = \frac{c_2 s}{a}$$



Фиг. 2. Радиальные профили h (а), v_ϕ (б), u (в) для зависимости $F(I) = a + be\exp(-2I/a)$, $a = 0.38$ в моменты времени $t_1 < t_2 < t_3 = \infty$ (кривые 1–3)

причем условие на бесконечности, как и ранее, дает $c_2 = 1$. Обозначая $c_1(t) \equiv c(t)$, для переменных h , v_ϕ , u получим:

$$\begin{aligned}
 h &= \text{th}(\eta + c(t)) - \frac{1}{\eta} \\
 v_\phi &= \sqrt{\frac{2}{\eta} \left(1 + \frac{\eta^2}{\text{ch}^2(\eta + c(t))} \right)}, \quad u = \frac{a\eta}{\eta - \text{cth}(\eta + c(t))} \dot{c}(t)
 \end{aligned}
 \tag{1.12}$$

Зависимость $c(t)$ находится из уравнения:

$$\dot{c}(t) = 2[\lambda - \text{cth}(\lambda + c)], \quad \lambda = 1/2a, \quad c(0) = 0
 \tag{1.13}$$

Входящий в (1.12) параметр a (или $\lambda = 1/2a$) следует выбрать так, чтобы выполнялось условие $h(t = 0) > 0$. Отсюда $\lambda > \lambda_*$, где λ_* – корень уравнения $\text{th}\lambda = 1/\lambda$. Легко видеть, что при $\lambda > \lambda_*$ $\dot{c}(t) > 0$ и, таким образом, $c(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$. Переходя в (1.12) к пределу $t \rightarrow \infty$, получим стационарное решение (1.4). Установление этого решения, однако, происходит так, что уровень в каждой точке растёт (фиг. 2). Действительно,

из (1.12) следует $h'_t = \text{ch}^{-2}(\eta + c(t))\dot{c}(t) > 0$. Столь различное поведение решений для последних примеров объясняется различной структурой начального распределения квадрата углового момента M^2 по радиусу. Из соотношения $M^2 = F(I)$ следует $(M^2)'_s = F'(I)I'_s$, откуда $F(I) = h^{-1}(M^2)'_s$. Таким образом, в примере (2) $(M^2)'_s > 0$, в данном примере $(M^2)'_s < 0$. Запишем первое уравнение (1.5) с учетом $M^2 = 4s^2 h'_s$, в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial h}{\partial s} \right) + \frac{u}{4s^2} \frac{\partial M^2}{\partial s} = 0$$

После интегрирования по s найдем:

$$h'_t = \int_s^{\infty} (2s)^{-2} u (M^2)'_s ds$$

Отсюда следует: $h'_t < 0$, если $(M^2)'_s > 0$, $h'_t > 0$, если $(M^2)'_s < 0$. Этот результат носит общий характер, не связанный со структурой конкретных решений.

Пример 4. $F(I) = AI$, $0.5 < s < s(t)$; $F(I) = a$, $s > s(t)$.

Этот пример отвечает ситуации, когда в начальный момент существует граница $s(0)$, разделяющая области потенциального ($F(I) = a$) и непотенциального вращения. Общее решение (1.8), удовлетворяющее условию $I'_s \rightarrow 1$ при $s \rightarrow \infty$, записывается в виде

$$I = c_1(t)s^{\lambda_1} + c_2(t)s^{\lambda_2}, \quad 0.5 < s < s(t)$$

$$I = s + d(t) - a \ln s, \quad s > s(t)$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + A}$$

где $c_1(t)$, $c_2(t)$, $d(t)$ – константы интегрирования. Полагая для определенности $A = 2$ ($\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$), для h , v_ϕ , u получим:

$$h = \begin{cases} 2c_1(t)s - c_2(t)s^{-2}, & 0.5 < s < s(t) \\ 1 - a/s, & s > s(t) \end{cases}$$

$$v_\phi = \begin{cases} 2\sqrt{c_1(t)s + c_2(t)s^{-2}}, & 0.5 < s < s(t) \\ \sqrt{2a/s}, & s > s(t) \end{cases}, \quad u = \begin{cases} \dot{c}_1(t)s^2 + \dot{c}_2(t)s^{-1}, & 0.5 < s < s(t) \\ \frac{\dot{d}(t)}{1 - a/s}, & s > s(t) \end{cases}$$

Из условия непрерывности h , h'_s и при $s = s(t)$ следует:

$$c_1(t) = \frac{2s(t) - a}{6s^2(t)}, \quad c_2(t) = \frac{1}{3}s(t)(2a - s(t)),$$

$$\dot{d}(t) = \dot{c}_1(t)s^2(t) + \frac{\dot{c}_2(t)}{s(t)}$$

Полагая в выражении для u $s = 0.5$, с учетом $u(s = 0.5) = -1$ и приведенных выражений, получим дифференциальное уравнение для нахождения $s(t)$ с условием $s(0) = s_* > 0.5$. Далее рассмотрим случай $a = 0.5s_*$ ($c_2(0) = 0$), для которого в начальный момент в области $0.5 < s < s_*$ имеет место твердотельное вращение: $h = 0.5(s/s_*)$, $v_\phi = \sqrt{s/s_*}$. Уравнение для $s(t)$ можно записать в виде

$$\dot{s}(t) = -\frac{s(t)\Psi(s(t), s_*)}{(2s(t) - s_*)[1 + 16(s(t))^3]}, \quad s(0) = s_*$$

$$\Psi(s, s_*) = 0.5(16s^4 - 16s_*s^3 + 4s - s_*)$$
(1.14)

Приведем результаты, вытекающие из качественного анализа (1.14). В случае $s_* = 1$ $s(t) \rightarrow 0.5$ при $t \rightarrow \infty$, т.е. область потенциального вращения достигает внутренней границы $s = 0.5$, за бесконечное время. Уровень жидкости на границе при этом падает до нуля. В случае $0.5 < s_* < 1$ $s(t)$ достигает границы за конечное время, после чего устанавливается стационарное решение (1.4). Наконец, в случае $s_* > 1$ в уравнении (1.14) появляется неподвижная точка $S_* \in (0.5; 1)$. Соответственно при $t \rightarrow \infty$ $s(t) \rightarrow S_*$, $h(s = 0.5) \rightarrow 0$. В пределе устанавливается стационарная воронка с отличным от потенциального вращением в приосевой зоне.

2. Сток массы через отверстие на дне. Если жидкость откачивается через отверстие на дне, эволюция вихря описывается системой уравнений (1.1), в правую часть третьего уравнения которой следует добавить источник $-Q(r, t)$, где $Q(r, t)$, – заданная интенсивность стока, определяемая как объем, откачиваемый в единицу времени с единицы площади, $0 < r < \infty$. Запишем соответствующую систему в безразмерных переменных, принимая в качестве масштабов r, t, h, v_ϕ, u_r соответственно $R_*, h_*/Q_*, h_*, \sqrt{gh_*}, Q_*R_*/h_*$, где h_* – уровень в невозмущенном состоянии, Q_*, R_* – характерные интенсивность и размер стока. Принимая далее циклострофическое приближение и вводя переменные $s = 0.5r^2, u = ru_r$, получим систему

$$\frac{M^2}{4s^2} = \frac{\partial h}{\partial s}; \quad \frac{\partial M}{\partial t} + u \frac{\partial M}{\partial s} = 0; \quad \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s}(uh) = -Q(s, t); \quad 0 < s < \infty$$
(2.1)

Установим зависимость, связывающую u с h в каждый момент времени. Исключая из (2.1) угловой момент и далее перекрестным дифференцированием производные по времени, аналогично предыдущему разделу, получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(k \frac{\partial u}{\partial s} \right) - \frac{1}{s} \frac{\partial k}{\partial s} u = -h \frac{\partial Q}{\partial s}; \quad k = h^2$$
(2.2)

Поскольку фундаментальная система решений однородного уравнения известна, общее решение (2.2) записывается в виде:

$$u = s \int_s^\infty u_2(s, t) h(s, t) Q'_s ds + u_2(s, t) \int_0^s h(s, t) Q'_s s ds; \quad u_2 = s \int_s^\infty \frac{ds}{(hs)^2}$$
(2.3)

Пусть включающийся в момент $t = 0$ сток массы стационарен и равномерно распределен в круге: $Q(s) = \{1, 0 \leq s \leq 1; 0, s > 1\}$. Тогда из (2.3) имеем:

$$u(s, t) = -h(1, t) s \int_1^\infty \frac{ds}{(hs)^2}, \quad s \leq 1; \quad u(s, t) = -h(1, t) s \int_s^\infty \frac{ds}{(hs)^2}, \quad s > 1$$
(2.4)

Система (2.1) с заданным стоком имеет стационарное решение:

$$h = 1 - \frac{a}{s}; \quad v_\varphi = \sqrt{\frac{2a}{s}}; \quad u = -s, \quad s \leq 1; \quad u = -\frac{(1-a)s}{s-a}, \quad s > 1 \quad (2.5)$$

описывающее вихревую воронку радиуса $r = \sqrt{2a}$ ($0 < a < 1$), охваченную потенциальным вращением (фиг. 3). Как и в разд. 1, ниже исследуется процесс установления решения (2.5).

Согласно (2.4), в области $0 \leq s \leq 1$ (область стока) u линейно зависит от s . Это обстоятельство позволяет легко построить решение задачи Коши в этой области при условии, что решение при $s > 1$ (вне стока) уже известно. В качестве примера рассмотрим задачу с начальными данными:

$$t = 0: h = \begin{cases} h_0(s), & s \leq 1 \\ 1 - a/s, & s > 1 \end{cases} \quad v_\varphi = \begin{cases} \sqrt{2s(h_0)'_s}, & s \leq 1 \\ \sqrt{2a/s}, & s > 1 \end{cases}$$

где a – числовой параметр ($0 < a < 1$), $h_0(s)$ – возрастающая функция, гладко сшитая с $1 - a/s$ при $s = 1$. Поскольку при $t = 0$ в области $s > 1$ угловой момент $M = \sqrt{4a} = \text{const}$, из уравнения для M и условия для h на бесконечности сразу следует, что $h = 1 - a/s$ при $s > s(t)$, где $s(t)$ – характеристика на плоскости (s, t) (уравнение характеристики: $ds/dt = u$), проходящая через точку $(1, 0)$. Вычисляя входящий в (2.4) интеграл, легко показать, что при $0 \leq s \leq 1$ $u = -s$. Таким образом, уравнение характеристики: $s(t) = e^{-t}$. Для нахождения решения в области $0 \leq s \leq e^{-t}$ воспользуемся уравнением неразрывности $h_t - (sh)_s = -1$, которое на характеристиках $s = s_0 e^{-t}$ записывается в виде $dh/dt = h - 1$. Интегрируя это уравнение, получаем решение:

$$h(s, t) = 1 + e^t [h_0(s e^t) - 1], \quad s \leq e^{-t}; \quad h(s, t) = 1 - \frac{a}{s}, \quad s > e^{-t} \quad (2.6)$$

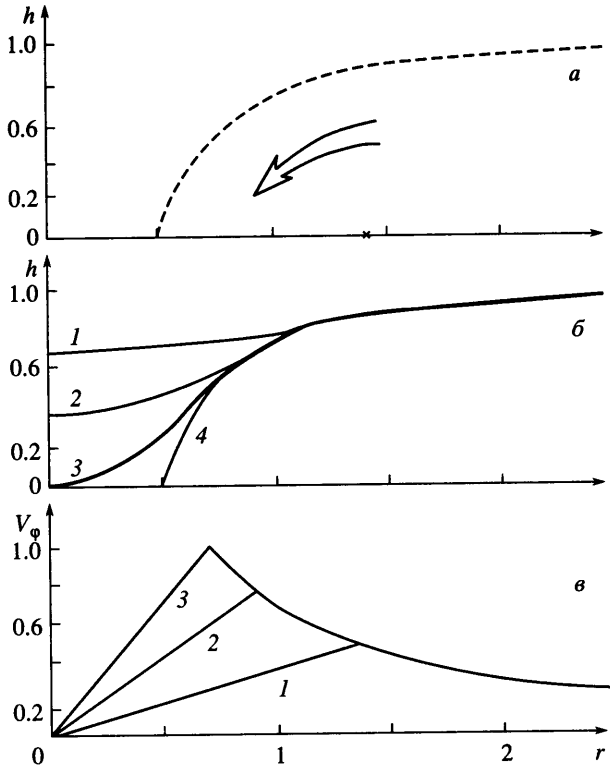
$$v_\varphi(s, t) = \begin{cases} e^{t/2} v_0(s e^t), & s \leq e^{-t} \\ \sqrt{\frac{2a}{s}}, & s > e^{-t} \end{cases} \quad u = \begin{cases} s, & s \leq 1 \\ \frac{(1-a)s}{s-a}, & s > 1 \end{cases} \quad (2.7)$$

$$v_0(s) = \sqrt{2s(h_0)'_s}$$

Физическая интерпретация решений (2.6), (2.7) достаточно очевидна. Сток массы индуцирует стационарное радиальное течение, переносящее угловой момент к центру. Вследствие сохранения углового момента азимутальная компонента скорости в центральной части растет, завихренность концентрируется в приосевой зоне. Уровень жидкости в центре падает по экспоненциальному закону $h(0, t) = 1 + e^t(h_0(0) - 1)$ и достигает дна в момент $t_1 = -\ln(1 - h_0(0))$. Дальнейшая эволюция, как показывают следующие рассуждения, связана с установлением стационарного решения (2.5). Действительно, при $t > t_1$ жидкость занимает уже некоторую область $s > s_2(t)$, граница которой находится из уравнения $h(s_2) = 0$. Последнее уравнение с учетом (2.6) записывается в виде $h_0(s_2 e^t) = 1 - e^{-t}$. В момент времени $t_2 = -\ln(1 - h(1)) = -\ln a$ имеем $s_2(t) = s(t)$, и устанавливается решение (2.5) – стационарная вихревая воронка.

На фиг. 3 представлены радиальные зависимости h , v_φ для случая начального распределения, заданного вихрем Ренкина:

$$t = 0: h = \begin{cases} 1 - 2a + as, & s \leq 1 \\ 1 - a/s, & s > 1 \end{cases}, \quad v_\varphi = \begin{cases} \sqrt{2as}, & s \leq 1 \\ \sqrt{2a/s}, & s > 1 \end{cases}$$



Фиг. 3. Уровень жидкости в стационарной воронке (а). Радиальные профили h (б), v_ϕ (в) для начального распределения, заданного вихрем Рэнкина при $a = 1/8$, $R = \sqrt{2}$, для $t = 0, 0.9, 1.4, 2.1$ (кривые 1–4)

где $a < 0.5$ ($h(0) > 0$). Решение в соответствии с (2.6), (2.7) имеет вид:

$$h(s, t) = \begin{cases} 1 - 2ae^t + ae^{2t}s, & s \leq e^{-t} \\ 1 - a/s, & s > e^{-t} \end{cases}, \quad v_\phi(s, t) = \begin{cases} e^t \sqrt{2as}, & s \leq e^{-t} \\ \sqrt{2a/s}, & s > e^{-t} \end{cases}$$

Для вихря Рэнкина $t_1 = \ln(1/2a) = t_2 - \ln 2$, максимум азимутальной компоненты скорости со временем растет по экспоненте.

Аналитические решения (2.6), (2.7) охватывают сравнительно простую ситуацию с однородным распределением момента в области $s > 1$ (потенциальное вращение). Решение с более общими распределениями можно построить, воспользовавшись однородностью системы (2.1) при $s > 1$ (отсутствием стока). Соответствующие решения вначале строятся в области $s > 1$, и далее в области $0 \leq s \leq 1$. Вводя в рассмотрение функцию

$$I(s, t) = \int_1^s h(s, t) ds - b(t), \quad b(t) = \int_0^1 u(1, t) h(1, t) dt$$

из уравнения для h получим, что I удовлетворяет уравнению $I_t + uI_s = 0$ (в области $s > 1$). Рассуждения, аналогичные разд. 1, показывают, что в процессе эволюции $M = \Phi(I)$.

Для нахождения u, I в области $s > 1$ при этом из (2.1) получим систему (1.8), где, как и ранее, $F(I) = \Phi^2(I)/4$. Схема решения этой системы отличается от разд. 1 некоторыми деталями. Как и ранее, в общем интеграле $I = I(s, c_1(t), c_2(t))$ фиксируем одну константу, удовлетворяя условию на бесконечности $I'_s \rightarrow 1$, и имеем $I = I(s, c(t))$. Для нахождения зависимости $c(t)$ заметим, что при $s \rightarrow \infty$ из формулы (2.4) следует $u \rightarrow -h(1, t) \equiv -I'_s(s = 1)$. С другой стороны, из уравнения (1.8): $u = -I'_t/I'_s = -(I'_c/I'_s)\dot{c}(t)$ и при $s \rightarrow \infty$ $u \rightarrow -\dot{c}(t)I'_c(s = \infty)$. Приравнявая предельные значения, приходим к уравнению для определения $c(t)$:

$$\dot{c}(t) = \frac{I'_s(s = 1)}{I'_c(s = \infty)}$$

В качестве конкретного примера рассмотрим зависимость $F(I) = a - b \exp(-2I/a)$ (пример 2). В области $s > 1$ решение дается выражениями (1.10), где теперь $c(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{c}(t) = \lambda \operatorname{cth}(\lambda + c) - 1, \quad \lambda = 1/a, \quad c(0) = 0 \quad (2.8)$$

Решение в области $0 \leq s \leq 1$ находится прямым интегрированием уравнения неразрывности на характеристиках $ds/dt = u$. Рассмотрим задачу с начальным условием:

$$t = 0: h = h_0(s), \quad 0 \leq s \leq 1; \quad h = \operatorname{cth}(\lambda s) - 1/\lambda s, \quad s > 1$$

Зависимость в области $s > 1$ здесь определяется (1.10) при $t = 0$. Вычисляя входящий в (2.4) интеграл для u в области $s \leq 1$, найдем: $u = -s \operatorname{cth}(\lambda + c(t))$. Обозначим далее

$$\varphi(t, t_0) = \int_{t_0}^t \operatorname{cth}(\lambda + c(\tau)) d\tau = \lambda^{-1} (c(t) + t) \Big|_{t_0}^t$$

Тогда

$$h = \begin{cases} e^{\varphi(t, 0)} \left[h_0(s e^{\varphi(t, 0)}) - \int_0^t e^{-\varphi(\tau, 0)} d\tau \right], & s \leq e^{-\varphi(t, 0)} \\ e^{\varphi(t, t_0)} \left[h(1, t_0) - \int_{t_0}^t e^{-\varphi(\tau, t_0)} d\tau \right], & e^{-\varphi(t, 0)} < s \leq 1 \end{cases}$$

где $t_0 = t_0(s, t)$ – корень уравнения $c(t_0) + t_0 = c(t) + t + \lambda \ln s$. При $\lambda \gg 1$ из (2.8) следует

$$c(t) \approx (\lambda - 1)t, \quad t_0 \approx \ln(s e^t), \quad \varphi(t, t_0) \approx t - t_0$$

$$h \approx \begin{cases} 1 + e^t [h_0(s e^t) - 1], & s \leq e^{-t} \\ 1 + s^{-1} [h(1, \ln s e^t) - 1], & e^{-t} < s \leq 1 \end{cases}$$

Построенное решение, как и (2.6), описывает процесс формирования вихревой воронки, т.е. вначале уровень в центре падает до нуля, и далее жидкость занимает область $s > s_2(t)$, где $s_2(t)$ – корень уравнения $h(s_2) = 0$. Предельное состояние (при $t \rightarrow \infty$) определяется значением параметра λ . Нетрудно показать, что при $\lambda > 1$ устанавливается стационарная воронка (2.5). При $0 < \lambda \leq 1$ граница воронки $s_2(t)$ достигает единицы, т.е. в пределе над отверстием жидкость всюду выкачана.

Аналогичным образом строится решение для зависимости $F(I)$ из примера 3 разд. 1. Решение в области $s > 1$ описывается выражениями (1.12), зависимость $c(t)$ находится из уравнения $\dot{c}(t) = \lambda \operatorname{th}(\lambda + c) - 1$. Основное отличие от предыдущего примера состоит в том, что хотя в области стока уровень жидкости падает, вне стока он растет, подстраиваясь под предельный профиль (2.5). Случай кусочно-непрерывной зависимости $F(I)$ рассмотрен в [3].

Описание эволюции осесимметричного вихря выполнено в рамках циклострофического приближения. Данное приближение справедливо, если радиальная компонента скорости много меньше тангенциальной; оно фильтрует быстрые гравитационные волны, позволяя описать медленную эволюцию сбалансированного состояния [3, 5]. По этой причине, например, циклострофическое приближение традиционно используется в численных моделях тропических циклонов [7, 8]. Погрешность циклострофического приближения можно оценить, построив точное стационарное решение системы (1.2) в задаче со стоком массы через поверхность внутреннего цилиндра. Из уравнений для M , h и граничных условий при этом следует

$$M^2 = 4a = \text{const}, \quad u_r = -h(1)/hr$$

Подставляя эти выражения в первое уравнение и удовлетворяя условию $h(\infty) = 1$, получим уравнение (интеграл Бернулли):

$$\varepsilon \frac{2h^2(1)}{2h^2 r^2} + \frac{2a}{r^2} + h = 1$$

Полагая здесь $r = 1$, найдем $h(1) = 1 - 2a - \varepsilon^2/2$, откуда вытекает ограничение на параметры a , ε : $1 - 2a - \varepsilon^2/2 > 0$. Рассмотрим далее случай $\varepsilon \ll a$. Обозначая $\rho = h^2(1)/2$, перепишем интеграл Бернулли в виде:

$$h^3 - (1 - 2a/r^2)h^2 + \varepsilon^2 \rho / r^2 = 0$$

Отыскивая решение этого уравнения в виде ряда по степеням ε , в первом приближении получим $h(r) \approx 1 - 2a/r^2$, что совпадает с решением (1.4) в рамках циклострофического приближения.

Представляет интерес также рассмотреть решения с $a = 0$. Нетрудно показать, что при $\varepsilon \ll 1$ $h(r) \approx 1 - \varepsilon^2/2r^2$. Последнее решение описывает режим стационарного истечения без закрутки ($v_\varphi = 0$). Это режим, очевидно, неустойчив, поскольку из уравнения переноса углового момента следует, что малые возмущения тангенциальной компоненты скорости со временем нарастают. Таким образом, устойчивым является описанный в работе режим вихревого истечения, который и наблюдается в ванне.

Заключение. Решена задача об эволюции осесимметричного вихря в модели мелкой воды при наличии заданного стока массы. Последний формирует радиальное течение, переносящее угловой момент к центру, что приводит к интенсификации вихря и связанной с этим деформации свободной поверхности. Рассмотрены два варианта задачи. В первом из них жидкость откачивается через боковую поверхность внутреннего цилиндра, во втором – через отверстие на дне. С использованием циклострофического приближения построен класс точных аналитических решений поставленной задачи. Установлено, что финальной стадией эволюции вихря является режим стационарной вихревой воронки. Описан нелинейный процесс установления этого режима для различных типов начальных условий, в частности, заданных вихрем Рэнкина. Установлено, что характерное время формирования вихревой воронки существенно зависит от начального распределения углового момента по радиусу.

Работа выполнена при финансовой поддержке МНТЦ (проект G-553).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гринспен Х. Теория вращающихся жидкостей. Л.: Гидрометеиздат, 1975. 304 с.
2. Интенсивные атмосферные вихри / Ред. Л. Бенгдссон и Дж. Лайтхилл. М.: Мир, 1985. 368 с.
3. Свиркунов П.Н., Калашник М.В. Эволюция вихря, вызванного стоком массы в модели мелкой воды // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 1995. Т. 31. № 5. С. 725–730.
4. Педлоски Дж. Геофизическая гидродинамика. Т. 1. М.: Мир, 1984. 400 с.
5. Калашник М.В., Свиркунов П.Н. О состояниях циклострофического и геострофического баланса в модели мелкой воды // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 1996. Т. 32. № 3. С. 402–409.
6. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям. Приложение в механике, точные решения. М.: Наука. Физматлит, 1993. 462 с.
7. Ооюта К. Numerical simulation of the life cycle tropical cyclones // J. Atmos. Sci. 1969. V. 26. № 1. P. 1–40.
8. Хаин А.П. Математическое моделирование тропических циклонов. Л.: Гидрометеиздат, 1984. 247 с.

Обнинск

Поступила в редакцию
23.V.2003