

УДК 532.526.3.013.4

© 2004 г. М. В. УСТИНОВ

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗВИТИЯ ПОЛОСЧАТОЙ СТРУКТУРЫ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ ПРИ ПОВЫШЕННОЙ СТЕПЕНИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ПОТОКА

Найдены возмущения, порождаемые внешней турбулентностью в пограничном слое на плоской пластине, внезапно приведенной в движение. В качестве начальных условий использовалось турбулентное течение найденное методом прямого численного моделирования. Полученное решение моделирует начальную стадию ламинарно-турбулентного перехода в пограничном слое на плоской пластине при повышенной степени турбулентности набегающего потока. Оно позволяет оценить влияние различных факторов: нестационарности, нелинейности и характеристик спектра пульсаций скорости в набегающем потоке на усиление возмущений в пограничном слое.

Ключевые слова: ламинарно-турбулентный переход, турбулентность, восприимчивость, пограничный слой.

При повышенной степени турбулентности набегающего потока ($Tu > 1\%$) ламинарно-турбулентный переход в пограничном слое вызывается не волнами Толлмина – Шлихтинга, а низкочастотными возмущениями [1–4]. Их амплитуда возрастает пропорционально \sqrt{x} , где x – расстояние от передней кромки [2]. Визуализация потока показывает, что эти возмущения представляют собой узкие, вытянутые в направлении потока полосы с повышенной или пониженной скоростью. Порождение такой полосчатой структуры стационарными и нестационарными периодическими вихревыми возмущениями набегающего потока (вихревыми модами) изучалось теоретически в работах [5–7]. В них показано, что возникающие в пограничном слое возмущения сначала нарастают линейно по x , а затем затухают вследствие вязкой диссипации. Аналогичный механизм усиления вихревых возмущений был обнаружен при численном моделировании ламинарно-турбулентного перехода в круглой трубе [8]. Специально поставленный эксперимент [9], в котором исследовалось взаимодействие искусственно созданных продольных вихрей с пограничным слоем, подтвердил правильность теории [5].

Решение для отдельной вихревой моды не объясняет закона нарастания интегральной амплитуды пульсаций скорости, порождаемых турбулентностью потока. Чтобы теоретически получить этот закон, в [10, 11] турбулентность потока представлена в виде бесконечного набора вихревых мод со случайными амплитудами и методом суперпозиции найдены результирующие возмущения пограничного слоя. Сравнение результатов [10,11] с экспериментом показало, что теория дает заниженную в 2–3 раза амплитуду пульсаций и более медленное ее нарастание вниз по потоку. Возможные причины неточности теории – нелинейные эффекты и непригодность использованных в ней способов нахождения спектра продольной завихренности в набегающем потоке по известным спектрам пульсаций скорости в нем. Численное моделирование взаимодействия стационарных продольных вихрей с пограничным слоем [12] продемонстрировало существенную роль нелинейности развития возмущений. Однако

трудно судить о достоверности выводов этой работы, в которой не учитывалась нестационарность и использовались искусственно заданные начальные условия.

В данной работе исследуется нелинейное взаимодействие турбулентности с пограничным слоем с учетом нестационарности. В качестве начальных условий используются результаты прямого численного моделирования однородной изотропной турбулентности. Для простоты вместо пространственного развития возмущений в нарастающем вдоль потока пограничном слое рассматривается их развитие по времени в пограничном слое на пластине, внезапно приведенной в движение. Такая постановка задачи позволяет учесть все существенные особенности рассматриваемого явления – нелинейность, нестационарность и правильно задать характеристики внешней турбулентности. Применяемый метод численного моделирования течения основан на решении параболической по x системы уравнений и может быть обобщен на случай пространственного развития возмущений.

1. Постановка задачи. Рассмотрим однородное и изотропное турбулентное течение вязкой несжимаемой жидкости с нулевой средней скоростью, занимающее все пространство. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ появляется непроницаемая бесконечная пластина, движущаяся в своей плоскости с постоянной скоростью u_∞ . Как и в случае ламинарного начального состояния жидкости, пластина начнет увлекать за собой прилегающую к ней жидкость в слое, толщина которого увеличивается со временем. Такое течение будем рассматривать в качестве модели пограничного слоя на плоской пластине, обтекаемой турбулентным потоком. Декартову систему координат, движущуюся с пластиной, зададим так, чтобы плоскость xOy совпадала с ее поверхностью, а ось x была направлена против движения. Для определенности ограничимся рассмотрением течения в верхнем полупространстве. Введем безразмерные переменные, используя скорость движения пластины u_∞ и вязкую длину $l = \nu/u_\infty$ в качестве единиц измерения. Продольную, поперечную и вертикальную (нормальную к поверхности пластины) составляющие скорости обозначим u , v , w , а давление – p .

Течение жидкости как до, так и после появления пластины описывается нестационарными уравнениями Навье – Стокса. Их решение после появления пластины должно удовлетворять условию прилипания на ее поверхности и некоторым начальным условиям при $t = 0$. Состояние течения непосредственно перед начальным моментом времени не может служить начальными условиями, так как оно не удовлетворяет граничному условию на пластине. Для постановки корректных начальных условий предположим сначала, что жидкость невязкая, а пульсации скорости в исходном турбулентном течении бесконечно малы. Тогда на поверхности вместо условия прилипания должно выполняться условие непротекания $w = 0$. Кроме того, будем считать, что завихренность потока остается непрерывной в момент появления пластины. В этих предположениях поле скоростей V_+ при $t > 0$ отличается от исходного состояния течения V_- на градиент некоторой скалярной функции (потенциала) φ , которая является решением задачи Неймана для уравнения Лапласа

$$\begin{aligned} V_+ &= \mathbf{i} + V_- + \nabla\varphi \\ \Delta\varphi &= 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z}(x, y, 0) = -w_-(x, y, z), \quad \varphi \rightarrow 0; \quad z \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (1.1)$$

Граничное условие на стенке для потенциала обеспечивает выполнение условия непротекания, w_- – обозначает вертикальную скорость исходного течения, \mathbf{i} – единичный вектор в направлении оси абсцисс.

Решение задачи (1.1) пригодно для задания начальных условий и в случае вязкой жидкости, так как потенциальное течение удовлетворяет уравнениям Навье – Стокса. Наличие тангенциальной составляющей скорости на стенке не представляет проблемы для численного решения и является характерной особенностью постановки задач

о течения в пограничном слое. Сформулированные таким образом начальные условия совпадают с начальными условиями по продольной координате, которые ставились вблизи передней кромки пластины, обтекаемой турбулентным потоком в [10, 11], если заменить t на x .

Как и при ламинарном начальном состоянии жидкости, на пластине появляется пограничный слой толщиной порядка \sqrt{t} . Из эксперимента известно, что в этом слое возмущения, порождаемые внешней турбулентностью, представляют собой вытянутые в направлении потока полосы. Отношение их поперечного размера к продольному будем считать малым параметром и обозначим k . Поперечный масштаб возмущений пограничного слоя по порядку величины совпадает с масштабом турбулентности λ , который в введенных здесь переменных является большой величиной. Из уравнения неразрывности следует, что различие продольного и поперечного масштаба возмущений приводит к тому, что продольная составляющая их скорости в $1/k$ раз больше поперечной. Имея целью описать существенно нелинейное развитие полосчатой структуры, будем считать продольную компоненту возмущенной скорости величиной порядка единицы. Исходя из этих оценок и предполагая, что характерное время развития течения сравнимо с временем пролета продольного масштаба возмущений, будем искать решение в пограничном слое в виде

$$\begin{aligned} u &= U_0(Z, T) + U(X, Y, Z, T), \quad v = kV(X, Y, Z, T), \quad w = \sqrt{\frac{k}{\lambda}}W(X, Y, Z, T), \\ p &= k^2P(X, Y, Z, T) \\ X &= \frac{k}{\lambda}x, \quad Y = \frac{1}{\lambda}y, \quad Z = \sqrt{\frac{k}{\lambda}}z, \quad T = \frac{k}{\lambda}t \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь функции U, V, W, P , описывающие возмущения составляющих скорости и давления, считаются величинами порядка единицы. Первое слагаемое в выражении для продольной компоненты скорости соответствует решению для ламинарного течения. Подставляя (1.2) в уравнения Навье – Стокса, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial T} + U_0 \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial U_0}{\partial Z} W + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} + W \frac{\partial U}{\partial Z} &= \frac{1}{k\lambda} \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} + O(k^2) \\ \frac{\partial V}{\partial T} + U_0 \frac{\partial V}{\partial X} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} + W \frac{\partial V}{\partial Z} &= -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{1}{k\lambda} \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} + O(k^2) \\ \frac{\partial W}{\partial T} + U_0 \frac{\partial W}{\partial X} + U \frac{\partial W}{\partial X} + V \frac{\partial W}{\partial Y} + W \frac{\partial W}{\partial Z} &= -\frac{\partial P}{\partial Z} + \frac{1}{k\lambda} \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial Z^2} + O(k^2) \\ \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} + \frac{\partial W}{\partial Z} &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Вне пограничного слоя при $z \gg \sqrt{t}$ характерные продольный, временной и поперечный масштабы возмущений остаются такими же, как и в пограничном слое. Поэтому нормированные переменные X, T, Y будем использовать и во внешнем течении. Вертикальный масштаб возмущений во внешнем течении предполагается равным поперечному, поэтому в нем будем использовать другую нормированную вертикальную координату $Z^* = z/\lambda$. Во внешнем потоке не происходит роста возмущений продольной

компоненты скорости из-за эффекта опрокидывания. Поэтому все три компоненты возмущений скорости здесь порядка k . Эти оценки позволяют представить решение вне пограничного слоя в виде

$$u = 1 + kU_e(X, Y, Z^*, T), \quad v = kV_e(X, Y, Z^*, T), \quad w = kW_e(X, Y, Z^*, T),$$

$$p = k^2 P_e(X, Y, Z^*, T)$$

Подстановка его в уравнения Навье – Стокса и пренебрежение членами порядка k/λ дает

$$\frac{\partial U_e}{\partial T} + \frac{\partial U_e}{\partial X} + V_e \frac{\partial U_e}{\partial Y} + W_e \frac{\partial U_e}{\partial Z^*} + kU_e \frac{\partial U_e}{\partial X} = -k \frac{\partial P_e}{\partial X} + \frac{1}{k\lambda} \left(\frac{\partial^2 U_e}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 U_e}{\partial Z^{*2}} \right) \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial V_e}{\partial T} + \frac{\partial V_e}{\partial X} + V_e \frac{\partial V_e}{\partial Y} + W_e \frac{\partial V_e}{\partial Z^*} + kU_e \frac{\partial V_e}{\partial X} = -\frac{\partial P_e}{\partial Y} + \frac{1}{k\lambda} \left(\frac{\partial^2 V_e}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 V_e}{\partial Z^{*2}} \right)$$

$$\frac{\partial W_e}{\partial T} + \frac{\partial W_e}{\partial X} + V_e \frac{\partial W_e}{\partial Y} + W_e \frac{\partial W_e}{\partial Z^*} + kU_e \frac{\partial W_e}{\partial X} = -\frac{\partial P_e}{\partial Z} + \frac{1}{k\lambda} \left(\frac{\partial^2 W_e}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 W_e}{\partial Z^{*2}} \right)$$

$$k \frac{\partial U_e}{\partial X} + \frac{\partial V_e}{\partial Y} + \frac{\partial W_e}{\partial Z^*} = 0$$

Будем считать, что малый параметр k удовлетворяет неравенству $1/\lambda \leq k$. Рассматривать $k < 1/\lambda$ нет смысла, так как возмущения, не зависящие от X и формально соответствующие $k = 0$, описываются уравнениями (1.3) с $k = 1/\lambda$ без членов с производными по X (см. [6]). В [10, 11] показано, что при $k \sim 1/\lambda$ течение во всей области описывается системой уравнений (1.3), которая отличается от полных уравнений Навье – Стокса отсутствием продольного градиента давления и вторых производных по x в вязких членах. Отброшенные члены являются малыми порядка k^2 по отношению к оставленным членам. Покажем, что эти же уравнения выполняются с точностью до $O(k^2)$ и при $k\lambda \gg 1$. В пограничном слое это непосредственно следует из (1.3). Во внешнем потоке, где имеют место (1.4), продольный градиент давления является малой величиной только первого порядка по k . На первый взгляд, пренебрежение им вносит ошибку порядка k . Однако это не так, потому что продольная компонента скорости входит в уравнения для V_e и W_e только через члены, пропорциональные k . Поэтому погрешность $O(k)$ в продольной компоненте скорости, возникающая из-за пренебрежения $\partial p/\partial x$, приводит к ошибке $O(k^2)$ для поперечной и вертикальной скорости. Из-за разного масштаба возмущений продольной скорости во внешнем потоке и пограничном слое ошибка $O(k)$ для U_e дает погрешность $O(k^2)$ для U . Следовательно, пренебрежение продольным градиентом давления приводит к ошибке $O(k^2)$ для всех параметров течения, кроме продольной компоненты скорости во внешнем потоке. Поэтому для описания течения при $t > 0$ как в пограничном слое, так и вне его будем пользоваться уравнениями (1.3). Для удобства запишем их для ненормированных параметров течения и координат.

$$\frac{du}{dt} = \Delta_{yz}u; \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \Delta_{yz}v; \quad \frac{dw}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \Delta_{yz}w; \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.5)$$

Вместе с начальными условиями, определяемыми решением (1.1) и условиями прилипания на стенке, эти уравнения образуют полную постановку задачи о восприимчивости пограничного слоя к внешней турбулентности.

2. Численный метод. Течение как до, так и после появления пластины будем считать периодическим в продольном и поперечном направлениях. Составляющие скорости и давления представим в виде

$$\begin{pmatrix} u \\ w \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{n=0}^N \left[\sum_{m=0}^M \left\{ \begin{pmatrix} u_{mn} \\ w_{mn} \\ p_{mn} \end{pmatrix} (z, t) e^{i m \alpha (x-t)} + (c.c.) \right\} \right] \cos n \beta y \quad (2.1)$$

$$v = \sum_{n=1}^N \left[\sum_{m=1}^M (v_{nm}(z, t) e^{i m \alpha (x-t)} + (c.c.)) \right] \sin n \beta y, \quad \alpha = \frac{2\pi}{L_x}; \quad \beta = \frac{2\pi}{L_y}$$

Здесь $U_0(z, t)$ – скорость основного течения, которая равна нулю до появления пластины и соответствует профилю скорости в ламинарном пограничном слое $U_0 = \operatorname{erf}(z/2\sqrt{t})$ после ее появления, L_x и L_y – продольный и поперечный периоды течения. Для уменьшения объема вычислений течение считается симметричным по y , причем продольная и вертикальная составляющие скорости и давления задаются четными, а трансверсальная компонента скорости – нечетной функцией y . Такое представление возмущений часто используется при численном моделировании турбулентных течений и дает результаты, практически не отличающиеся от найденных для возмущений общего вида [13].

Исходное турбулентное течение, которое использовалось для задания начальных условий, находилось с помощью прямого численного моделирования развития однородной изотропной турбулентности. Для этого течение считалось периодическим по вертикальной координате с периодом L_z и амплитуды гармоник скорости и давления в (2.1) искались в виде рядов Фурье по z

$$\{u_{mn}, v_{mn}, w_{mn}, p_{mn}\}(z, t) = \sum_{k=-K}^K \{u_{mnk}, v_{mnk}, w_{mnk}, p_{mnk}\}(t) e^{ik\delta z}; \quad \delta = \frac{2\pi k}{L_z} \quad (2.2)$$

Подстановка (2.1), (2.2) в уравнения Навье – Стокса сводит их к нелинейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Последняя решалась численно с помощью неявного метода второго порядка. Нелинейные члены вычислялись с помощью быстрого преобразования Фурье.

Полученное решение предполагалось использовать в качестве начальных условий для задачи о развитии полосчатой структуры, вытянутой в продольном направлении. Поэтому продольный период задавался в несколько раз большим, чем поперечный и вертикальный периоды, которые также были разными. Количества гармоник в продольном, поперечном и вертикальном направлениях M, N, K выбирались так, чтобы максимальные волновые числа $\alpha_m = M\alpha$, $\beta_m = N\beta$ и $\delta_m = K\delta$, определяющие минимально разрешаемый размер возмущений, совпадали между собой. Расчеты, результаты которых приведены ниже, проводились при следующих параметрах

$$L_x = 10L_y = 5L_z; \quad L_y = 2/3\pi \times 10^4; \quad M = 150, \quad N = 15, \quad K = 32$$

Начальные условия при моделировании турбулентного течения выбирались в виде суперпозиции симметричных начальных условий u_s, w_s , предложенных в [14], и квазислучайной добавки u_r, w_r .

$$\begin{aligned} \{u, w\}(x, y, z, 0) &= A\{u_s, w_s\} + A_r\{u_r, w_r\} \\ u_s &= \sin\beta x(\cos 3\beta y \cos \beta z - \cos \beta y \cos 3\beta z) \\ w_s &= \sin\beta z(\cos 3\beta x \cos \beta y - \cos \beta x \cos 3\beta y) \\ u_r &= f(\Delta^2)\cos(m+n+k-2), \quad k \neq 0; \quad u_r = 0, \quad k = 0 \\ w_r &= -f(\Delta^2)\cos(-m+n-k) \\ f &= 1, \quad \Delta < 1; \quad f = \Delta^{-5/12}, \quad \Delta \geq 1 \\ \Delta^2 &= (m\alpha)^2 + (n\beta)^2 + (k\delta)^2 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Начальные условия для v находились из уравнения неразрывности. Функция f , определяющая зависимость амплитуды случайной добавки от модуля волнового вектора Δ , выбрана так, чтобы ее спектр при $\Delta > 1$ удовлетворял закону Колмогорова – Обухова. Без квазислучайной добавки симметричные начальные условия создают течение, которое имеет период L_y по всем трем координатам. Спектр такого течения по продольному волновому числу содержит только гармоники, кратные β . Остальные гармоники не возбуждаются, и их амплитуда остается равной нулю. Квазислучайная добавка необходима для получения гладкого спектра по α и возбуждения крупномасштабных возмущений с $\alpha < \beta$, которые в основном порождают полосчатую структуру в пограничном слое. Амплитуды симметричных начальных условий A_s и случайной добавки A_r выбирались равными 0.01 и 5×10^{-4} соответственно.

В качестве исходного поля течения в момент появления пластины использовалось решение задачи о развитии турбулентности в некоторый момент времени t_0 . Амплитуды гармоник скорости в этот момент времени обозначим верхним индексом “ i ”. После появления пластины поле течения разобьем на две части: пристеночную область толщиной порядка периода возмущений и внешнюю часть. В обеих областях решение будем искать в виде ряда Фурье (2.1) с равными нулю гармониками с индексом $n = 0$ и меньшим числом гармоник. Необходимость исключения двумерных возмущений, соответствующих $n = 0$, вызвана тем, что для них толщина пристеночной области, где ощущается влияние условий непротекания, очень велика и пропорциональна продольному периоду течения. Учет этих гармоник требует значительного увеличения числа точек разбиения по z при дискретизации решения, что приводит к существенному усложнению вычислений. С другой стороны, в нахождении решения для них нет особой нужды, так как двумерные возмущения внешнего потока очень плохо проникают в пограничный слой и возбуждают в нем не полосчатую структуру, а волны Толлмина – Шлихтинга. При докритических числах Рейнольдса, рассматриваемых в данной работе, они затухают и не влияют на ламинарно-турбулентный переход. Кроме того, уравнения (1.5), применяемые для описания течения в пограничном слое, пригодны только для сильно вытянутых в направлении потока возмущений и все равно не обеспечивают адекватного описания двумерных пульсаций. По причине непригодности (1.5) для описания возмущений со сравнимыми продольными и поперечными размерами количество гармоник по продольной координате уменьшено до $M_1 = 5$.

Во внешней области решение искалось в виде (2.1), (2.2) с $U_0 = 1$ и меньшим количеством гармоник $K_1 = 6$ в ряде по z . Сохранение высших гармоник по z привело бы к неприемлемому росту числа узлов разбиения в пристеночной области, необходимых для их разрешения на ее внешней границе. Амплитуды гармоник составляющих скорости

во внешней области будем обозначать верхним индексом "e". Начальные условия для них непосредственно следуют из (1.1) с $\varphi = 0$.

$$u_{mnk}^e, v_{mnk}^e, w_{mnk}^e(0) = u_{mnk}^i, v_{mnk}^i, w_{mnk}^i$$

Подстановка (2.1), (2.2) в уравнения (1.5) приводит к системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, которая решалась методом, аналогичным применяемому для моделирования исходного турбулентного течения. Полученное решение использовалось для постановки граничных условий на верхней границе пристеночной области.

В пристеночной области решение искалось в виде (2.1). Начальные условия для амплитуд гармоник скорости находились из решения (1.1), которое легко получается, если искать потенциал в виде ряда Фурье

$$u_{mn}(z, 0) = \sum_{k=-K_1}^{K_1} \left(u_{mnk}^i e^{ik\delta z} + \frac{i\alpha}{\gamma} w_{mnk}^i w^{-\gamma z} \right), \quad v_{mn}(z, 0) = \sum_{k=-K_1}^{K_1} \left(v_{mnk}^i e^{ik\delta z} - \frac{\beta}{\gamma} w_{mnk}^i w^{-\gamma z} \right)$$

$$w_{mn}(z, 0) = \sum_{k=-K_1}^{K_1} w_{mnk}^i (e^{ik\delta z} - e^{-\gamma z}); \quad \gamma = \sqrt{(m\alpha)^2 + (n\beta)^2}$$

При $z \rightarrow \infty$ составляющие скорости должны стремиться к решению во внешнем потоке, а на стенке удовлетворять условиям прилипания

$$\{u_{mn}, v_{mn}, w_{mn}\}(z, t) \rightarrow \sum_{k=-K}^K \{u_{mnk}^e, v_{mnk}^e, w_{mnk}^e\}(t) e^{ik\delta z}; \quad z \rightarrow \infty$$

$$\{u_{mn}, v_{mn}, w_{mn}\}(0, t) = 0$$

Задача (1.5) с неоднородными граничными условиями на верхней границе сводилась к задаче с однородными условиями. Для этого решение для гармоник скорости представлялось в виде суммы

$$\{u_{mn}, v_{mn}, w_{mn}\} = \{u_{mn}^r, v_{mn}^r, w_{mn}^r\} + \{u_{mn}^0, v_{mn}^0, w_{mn}^0\} \quad (2.4)$$

первое слагаемое которой есть заданные функции удовлетворяющие граничным условиям, а второе – новые неизвестные функции. Неоднородная часть решения задавалась в виде

$$\{u_{mn}^r, w_{mn}^r\} = \sum_{k=-K_1}^{K_1} H_k(z) \{u_{mnk}^e, w_{mnk}^e\}; \quad H_k(z) = (1 - e^{-\chi z^2}) e^{ik\delta z}$$

$$v_{mn}^r = -\frac{1}{n\beta} \sum_{k=-K_1}^{K_1} \left(im\alpha H_k u_{mnk}^e - w_{mnk}^e \frac{dH_k}{dz} \right)$$

Краевая задача для однородной части решения $u_{mn}^0, v_{mn}^0, w_{mn}^0$, получаемая подстановкой (2.1), (2.4) в (1.5), практически не отличается от аналогичной задачи для неустойчивых возмущений пограничного слоя. Она решалась численно методом применявшимся для моделирования ламинарно-турбулентного перехода в [15, 16]. Здесь ограничимся кратким его описанием. Для аппроксимации решения по времени применялась

невная схема второго порядка с итерациями. Дискретизация по вертикальной координате проводилась методом коллокаций. Для сгущения узлов коллокаций вблизи стенки и обеспечения нужного расстояния между узлами вблизи верхней границы пристеночной области использовалось преобразование координат $\xi = \Psi(z)$. В качестве базисных функций выбирались $F_l = \xi \exp(-\xi/2) L_l^{(0)}(\xi)$; $l = 0, 1, \dots, Q-1$ ($L_l^{(0)}(\xi)$ – полиномы Лаггера). Выполнение граничных условий обеспечивалось автоматически за счет выбора базисных функций. За узлы коллокаций принимались нули полинома $L_Q^{(0)}(\xi)$. Число узлов Q выбиралось равным 81. Преобразование координат подбиралось так, чтобы последний узел находился на расстоянии L_y от стенки. Выбор достаточно близкой к стенке границы расчетной области продиктован компромиссом между необходимостью обеспечить разрешение мелкомасштабных пульсаций, с одной стороны, и затухание возмущений, порожденных стенкой – с другой.

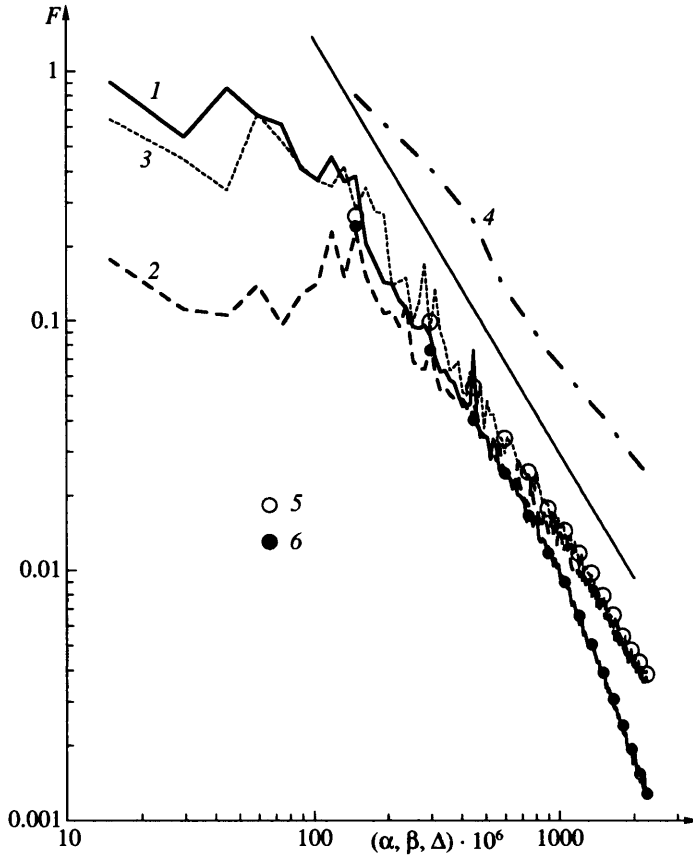
С целью проверки достаточности малого числа гармоник по продольной и вертикальной координате для аппроксимации решения один из описанных ниже вариантов расчета был повторен с увеличенным разрешением по x и z . Количество гармоник в этом проверочном расчете было $M_1 = 15$, $K_1 = 15$, а число узлов коллокации в пристеночной области увеличено до $Q = 161$. Полученная амплитуда пульсаций скорости в основной части пограничного слоя ($\eta = z/\sqrt{t} < 4$) при $t > 4 \times 10^4$ с точностью до 2% совпала с результатами расчета с малым числом гармоник. При меньших временах и больших расстояниях от стенки расхождение было более существенным, что объясняется заметным вкладом высших гармоник в решение при этих параметрах. Так как цель работы – моделирование полосчатой структуры внутри пограничного слоя при больших временах ($t \sim 10^5 - 10^6$), то точность маломодового приближения с $M_1 = 5$ и $K_1 = 4$ признана достаточной.

3. Результаты расчетов. Начальные условия в момент появления пластины по возможности подбирались соответствующими параметрам потока в эксперименте [2]. Как упоминалось ранее, для задания начальных условий использовались результаты численного моделирования однородной изотропной турбулентности. В качестве параметров, по которым оценивалось соответствие результатов моделирования и турбулентности набегающего потока в [2], использовались степень турбулентности Tu , ее масштаб λ и турбулентное число Рейнольдса R_t . Их определения имеют вид

$$Tu = \sqrt{\frac{2}{3}} E; \quad \lambda = \sqrt{\frac{10E}{3\Omega}}; \quad R_t = \lambda \sqrt{2E}$$

$$E^2 = \frac{1}{L_x L_y L_z} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \int_0^{L_z} \frac{1}{2} |\mathbf{V}|^2 dx dy dz; \quad \Omega^2 = \frac{1}{L_x L_y L_z} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \int_0^{L_z} \frac{1}{2} |\boldsymbol{\omega}|^2 dx dy dz$$

где E и Ω – энергия и энстрофия, а \mathbf{V} и $\boldsymbol{\omega}$ – векторы скорости и завихренности. В эксперименте [2] при скорости потока 8 м/с эти параметры по оценкам авторов были равны $Tu \approx 0.015$, $\lambda \approx 6000$, $R_t \approx 40$. При расчете развития турбулентности с начальными условиями (2.3) в спектре пульсаций скорости очень долго выделялись гармоники с α кратными β . Добиться гладкого спектра, соответствующего данным эксперимента, можно было бы за счет увеличения времени развития возмущений, однако из-за их затухания степень турбулентности потока стала бы слишком малой. Для сохранения приемлемого уровня турбулентности при $t = 220$ все скорости были увеличены в 5 раз, и расчет продолжен. Аналогичная процедура была проведена еще раз при $t = 440$. В результате при $t = 630$ было получено турбулентное течение с относительно гладким спектром и



Фиг. 1. Спектры пульсаций скорости в начальном турбулентном течении. 1, 2, 3 – спектры u , v , w по α ; 4 – энергетический спектр по Δ ; 5, 6 – спектры u и v по β

параметрами $Tu = 0.0113$, $\lambda = 3520$, $R_t = 39.8$, которое использовалось в качестве исходного для моделирования развития полосчатой структуры в пограничном слое.

Спектральные плотности квадрата пульсаций трех компонент скорости $F_\alpha[u^2]$, $F_\alpha[v^2]$, $F_\alpha[w^2]$ в этом течении показаны на фиг. 1. Они нормированы так, чтобы интеграл от спектральной плотности по α был равен половине среднеквадратичной величины соответствующей компоненты скорости. При их сравнении со спектрами, полученными в эксперименте [2], необходимо учесть различие нормировок. В [2] приведены спектры по приведенной частоте $F = 2\pi f\nu \times 10^6 / u_\infty^2 = \alpha \times 10^6$, которые отличаются от показанных на фиг. 1 в 10^6 раз. С учетом этого замечания спектры, найденные в результате моделирования, достаточно хорошо соответствуют данным эксперимента. На фиг. 1 также показана плотность трехмерного энергетического спектра $E(\Delta)$ и плотности спектров продольной и трансверсальной составляющих скорости по поперечному волновому числу $F_\beta[u^2]$, $F_\beta[v^2]$. У всех спектров заметен линейный участок, который имеет наклон, соответствующий закону Колмогорова – Обухова $F \sim \alpha^{-5/3}$. Этот закон показан прямой линией. Графики $F_\alpha[u^2]$, $F_\beta[v^2]$ практически совпадают

при $\alpha, \beta > 500 \times 10^6$. Это же справедливо относительно $F_\alpha[v^2]$, $F_\alpha[w^2]$ и $F_\beta[u^2]$, что свидетельствует об изотропии турбулентности для мелких масштабов. В крупных масштабах для $\alpha, \beta < 100 \times 10^6$ заметна анизотропность пульсаций, которая проявляется в существенном различии спектров поперечной и вертикальной скорости. Она, вероятно, является следствием разных способов дискретизации решения (2.1), (2.2) по y и z . Заметим, что анизотропия крупномасштабных пульсаций в различной степени характерна для всех реальных турбулентных течений, в том числе и для эксперимента [2].

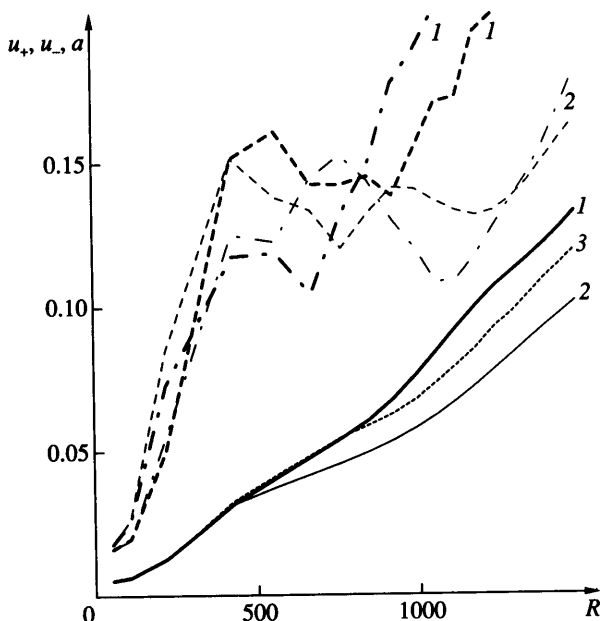
Расчет развития полосчатой структуры в пограничном слое проводился для двух начальных условий. Одни начальные условия соответствуют описанному ранее состоянию турбулентности при $t = 630$, вторые задавались с помощью замены скоростей этого течения на противоположные по направлению. Обращенное течение, использованное для задания вторых начальных условий, очевидно, также является решением уравнений Навье – Стокса. В пограничном слое решения для этих двух начальных условий будем для краткости называть "положительным" и "отрицательным" решениями. Они отличаются не только знаком возмущений скорости, но и их амплитудой из-за несимметрии, обусловленной выделенным направлением движения пластины.

Зависимости среднеквадратичной амплитуды возмущений продольной компоненты скорости a , а также их максимального u_+ и модуля минимального значения u_- от числа Рейнольдса $R = \sqrt{t}$ показаны на фиг. 2. Эти результаты соответствуют значению авто-модельной переменной $\eta = z/\sqrt{t} = 1.6$, при котором наблюдается максимум пульсаций скорости по z . Использование числа Рейнольдса, вычисленного по характерной толщине пограничного слоя в качестве независимой переменной, облегчает сравнение результатов с экспериментом, где наблюдается линейная зависимость a от R . На фиг. 2 также показана среднеквадратичная амплитуда пульсаций, найденная в линейном приближении. Она получена путем умножения на 100 решения для уменьшенных в 100 раз начальных возмущений.

Сравнение этих трех решений показывает, что нелинейность совсем не проявляется только при очень малых числах Рейнольдса $R < 200$, когда максимальная скорость для "положительного" решения совпадает с минимальной для "отрицательного" и наоборот. При $200 < R < 400$ экстремальные значения скорости значительно отличаются однако среднеквадратичные пульсации для всех трех решений остаются одинаковыми. После $R = 500$ нелинейность влияет и на среднеквадратичную амплитуду пульсаций. В это время она еще очень мала ($a \sim 0.03$), но экстремальные значения возмущений превышают 10% скорости движения пластины. Именно в окрестностях максимумов возмущений, по-видимому, начинает проявляться нелинейность. При больших числах Рейнольдса различие решений уже значительно. Среднеквадратичная амплитуда пульсаций различается на 20%, а экстремальные значения для "положительного" решения почти в 2 раза больше, чем для "отрицательного".

Различие решений для прямого и обращенного течений является проявлением зависимости нелинейных процессов не только от амплитуд отдельных гармоник начального распределения скорости но и от их фаз. Существует бесконечно много различных состояний начального турбулентного течения, имеющих одинаковый спектр, но различные соотношения фаз между гармониками. Все они должны порождать разные решения в пограничном слое, характеризующиеся различными зависимостями a от R . Эти состояния модельного турбулентного течения соответствуют отдельным местам бесконечного поля реального турбулентного потока.

Для нахождения характеристик возмущений пограничного слоя, индуцированных реальной турбулентностью, необходимо осреднить параметры достаточно большого количества таких решений. Аналогичные результаты можно получить, если увеличить размеры расчетной области L_x, L_y, L_z так, чтобы они во много раз превышали со-



Фиг. 2. Зависимости a , u_+ , u_- от R . Штриховые линии – u_+ , штрихпунктирные u_- , остальные – a . 1, 2, 3 – "положительное", "отрицательное" и линейное решения

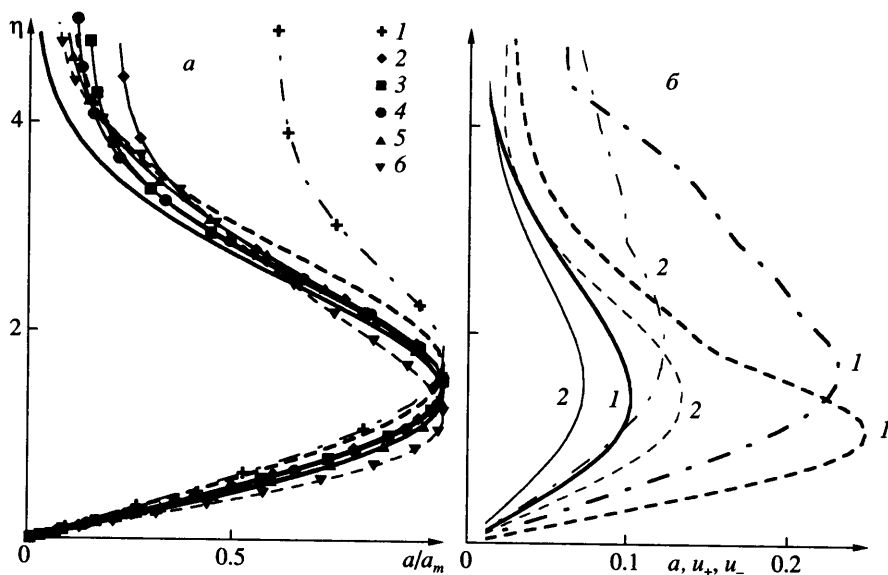
ответствующие масштабы возмущений в пограничном слое. Оба способа нахождения осредненного решения требуют неприемлемого увеличения объема вычислений. Имеющиеся два решения позволяют только полагать, что осредненное решение находится в промежутке между ними. Неплохим приближением для среднеквадратичной амплитуды осредненного решения можно считать, например, линейное решение, которое лежит почти в середине между двумя нелинейными. Оно, вероятно, лучше описывает реальную зависимость $a(R)$, чем произвольно взятое нелинейное решение.

Вертикальные профили пульсаций скорости при разных R для "положительного" решения показаны на фиг 3,а. Все они, кроме первого и последнего, практически совпадают. В пространственном пограничном слое такие профили хорошо описываются асимптотическим решением [17]. Аналогичное решение для нарастающего по времени пограничного слоя

$$a \sim \eta \frac{dU_0}{d\eta} \sim \eta e^{-\eta^2/2}$$

показано жирной сплошной линией на фиг. 3,а. Оно действительно хорошо описывает форму профилей пульсаций скорости во внутренней части пограничного слоя, где они совпадают между собой. Профили, найденные в линейном приближении, незначительно отличаются от показанных на фиг. 3, а при $R < 600$. По мере увеличения времени максимум профиля линейного решения смещается от стенки, как это видно из профиля для линейного решения при $R = 1174$, построенного жирной штриховой линией. "Отрицательное" решение также дает сдвиг максимума пульсаций от стенки при больших R , хотя он гораздо слабее, чем для линейного решения.

На фиг. 3,б представлены профили среднеквадратичных пульсаций, а также максимальных и минимальных значений скорости при $R = 1174$ для положительного и отри-

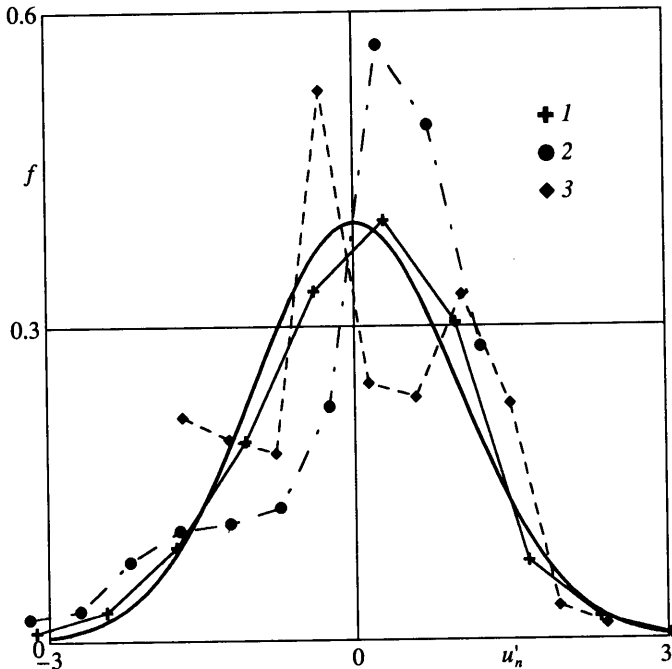


Фиг. 3. Вертикальные профили возмущений скорости: а – для "положительного решения" при $R = 216, 560, 844, 990, 1174, 1474$ (кривые 1–6), б – a, u_+, u_- для "положительного" (1) и "отрицательного" (2) решений при $R = 1174$. Обозначения аналогичны фиг. 2

цательного решений. В обоих случаях во внешней части пограничного слоя максимальные отрицательные отклонения скорости заметно превышают положительные. В нижней его части имеет место обратное соотношение. Ввиду того, что эта закономерность наблюдается для обоих начальных условий, она является общим свойством нелинейных решений. Дополнительный аргумент в пользу этого вывода – отсутствие такого свойства у линейного решения, для которого $u_- > u_+$ во всем пограничном слое.

Наиболее явно это свойство пульсаций скорости отражает их плотность вероятности f . Ее зависимости от нормированной величины отклонения скорости $u'_n = (u - \langle u \rangle)/a$ для положительного решения при трех характерных расстояниях от стенки построены на фиг. 4. Вдали от стенки при $\eta = 12$ функция распределения практически совпадает с гауссовой, показанной сплошной линией. При $\eta = 3$ ее максимум смещен в сторону положительных u'_n , однако большие отрицательные отклонения скорости случаются чаще, чем такие же положительные. Вблизи стенки наблюдается обратная закономерность.

Спектры пульсаций скорости по продольному и поперечному волновым числам для "положительного" решения при $\eta = 1.6$ показаны на фиг. 5 и 6 соответственно. Для удобства сравнения между собой продольные спектры, построенные на фиг. 5, а, нормированы на свой максимум. Отчетливо заметна тенденция сужения спектров с ростом числа Рейнольдса. Выделение низких частот в спектрах пульсаций внутри пограничного слоя отмечалось во всех экспериментах. В [4] было замечено, что продольные спектры, измеренные на разных расстояниях x от передней кромки, ложатся на одну кривую, если их отнести к $x^{3/2}$ и построить в зависимости от волнового числа $\alpha^* = \alpha \delta^*$, где δ^* – толщина вытеснения пограничного слоя в месте измерения. В слу-



Фиг. 4. Плотность вероятности отклонения скорости от среднего значения при $R = 1174$ для "положительного" решения. Кривые 1, 2, 3 соответствуют $\eta = 12, 3, 1$; жирная линия – нормальное распределение

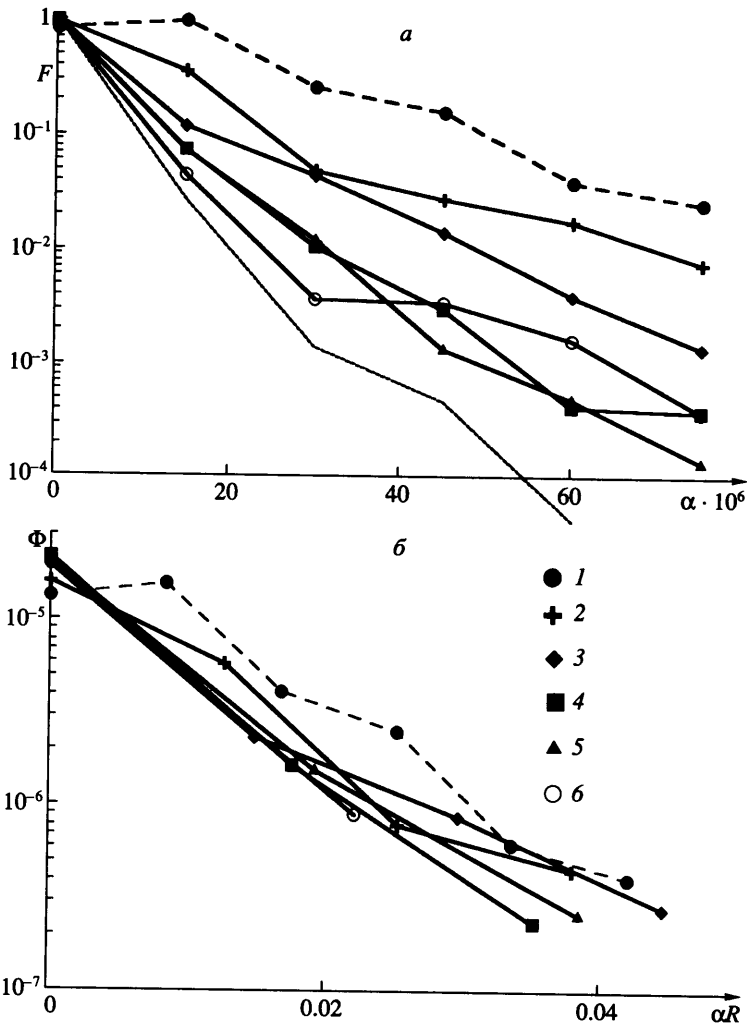
чае временного развития возмущений это значит, что преобразованная спектральная плотность

$$\Phi(\alpha^*) = F[u^2](\alpha^*/R, R)/R^3; \quad \alpha^* = \alpha R \quad (3.1)$$

должна быть универсальной функцией, не зависящей от числа Рейнольдса. Такие преобразованные спектры построены на фиг. 5, б. При достаточно малых α^* они, за исключением спектра при малом $R = 560$, действительно удовлетворительно совпадают. Влияние нелинейности на спектры проявляется в их расширении по сравнению с линейным решением, которое особенно заметно при больших R . Это демонстрирует спектр для линейного решения при $R = 1174$, построенный пунктирной линией на фиг. 5, а. Следует отметить, что именно нелинейность приводит к совпадению спектров при преобразовании (3.1). В линейном приближении преобразованные спектры при больших R затухают по α^* существенно быстрее, чем при малых.

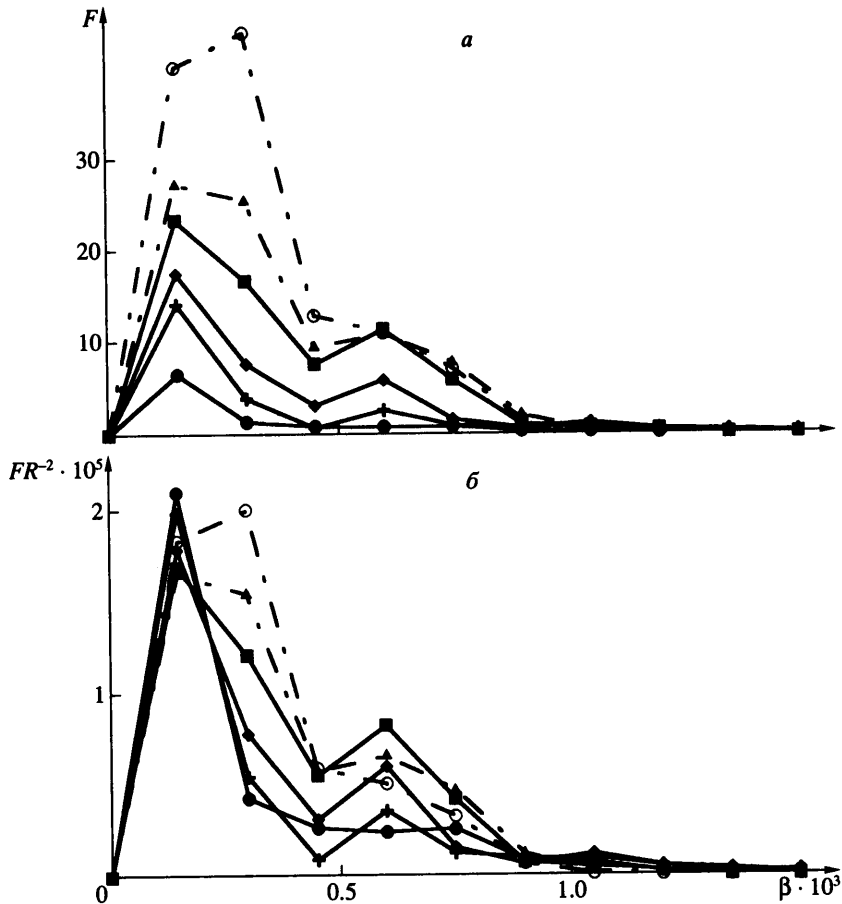
Спектры по поперечному волновому числу приблизительно сохраняют свою форму при увеличении R . Это их свойство также отмечено в [4], где показано, что они приобретают универсальный вид, если их разделить на квадрат среднеквадратичной амплитуды или на R^2 . Нормированные таким образом поперечные спектры построены на фиг. 6, б. Они действительно меньше различаются, чем исходные, однако совпадают недостаточно хорошо. В частности, четко проявляется тенденция к возрастанию доли мелкомасштабных возмущений при увеличении R .

Если в поперечном спектре энергия всегда распределена по большому количеству гармоник, то продольные спектры становятся очень узкими при больших R . Напри-



Фиг. 5. Спектры пульсаций скорости в пограничном слое по продольному волновому числу (а); преобразованные по (3.1) спектры (б). Кривые 1–6 соответствуют $R = 560, 844, 990, 1174, 1474$

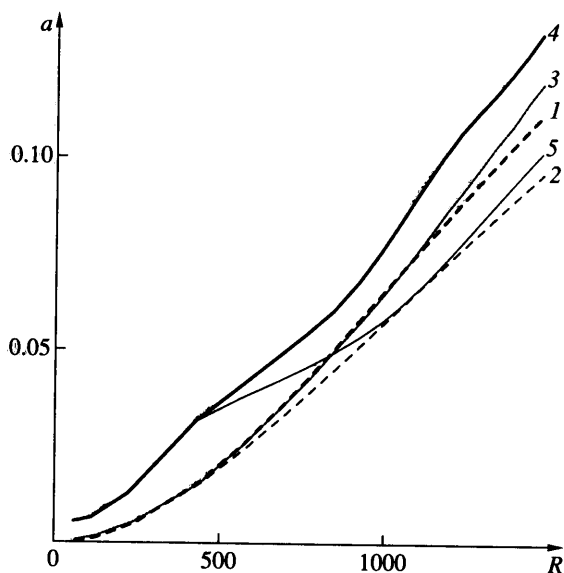
мер, при $R > 1000$ на нулевую гармонику приходится более 90% энергии пульсаций. Это обстоятельство широко известно и послужило основанием для моделирования взаимодействия турбулентности с пограничным слоем на основе анализа нелинейного развития стационарных возмущений в [12]. Во временной постановке такой подход означает рассмотрение однородных по x возмущений, которые соответствуют $m = 0$ в (2.1). Зависимости a от R , полученные в таком однородном приближении для положительных и отрицательных начальных условий, показаны на фиг. 7. Их сравнение с решениями, учитывающими все гармоники, также построенными на этой фигуре, показывает, что в однородном приближении амплитуда пульсаций несколько меньше. Это различие максимально при малых R и постепенно уменьшается со временем. Сравнение нелинейных решений, найденных в однородном приближении с аналогич-



Фиг. 6. Спектры пульсаций скорости в пограничном слое по поперечному волновому числу (а); отнесенные к R^2 спектры (б). Обозначения аналогичны фиг. 5

ным линейным решением, показывает, что в этом приближении нелинейность приводит к замедлению роста возмущений. В результате линейное однородное приближение дает лучшую оценку амплитуды пульсаций, чем нелинейное.

Важной особенностью всех решений, найденных в этой работе, является практически линейное нарастание амплитуды возмущений, по крайней мере, при больших R . В этом они соответствуют данным эксперимента и качественно отличаются от решения [10], скорость роста которого замедляется при увеличении расстояния от передней кромки. Сравнение линейных и нелинейных решений, показанных на фиг. 2, 7, позволяет заключить, что нелинейность не приводит к увеличению скорости роста возмущений. Следовательно, причина расхождения теории [10] с экспериментом — не линейность постановки задачи, а неправильная оценка характеристик спектра пульсаций поперечной составляющей скорости по имеющимся данным эксперимента. Вероятно, доля крупномасштабных пульсаций в реальной и получаемой с помощью моделирования турбулентности значительно больше, чем дают оценки, основанные на теории однородной изотропной турбулентности, использованные в [10].



Фиг. 7. Сравнение точного и однородного по x решений для $a(R)$: 1, 2, 3 – "положительное", "отрицательное" и линейное решения в однородном приближении; 4, 5 – "положительное" и "отрицательное" точные решения

Несмотря на то, что зависимость a от R может быть найдена в линейном приближении, учет нелинейности необходим для описания более детальных характеристик пульсаций таких, как плотность вероятности и спектры. Эти характеристики могут оказаться весьма важными для понимания процессов, приводящих к турбулизации течения.

Заключение. Методом прямого численного моделирования найдены возмущения, порождаемые внешней турбулентностью в пограничном слое на пластине, внезапно приведенной в движение. Рассмотренная задача моделирует начальную стадию ламинарно-турбулентного перехода в пограничном слое, вызванного турбулентностью набегающего потока. При достаточно больших временах t с начала движения амплитуда пульсаций в пограничном слое растет пропорционально \sqrt{t} или числу Рейнольдса, вычисленному по толщине пограничного слоя. Их спектры по продольному волновому числу становятся универсальными, если в качестве независимой переменной использовать волновое число, умноженное на толщину пограничного слоя. Эти свойства решения качественно соответствуют данным эксперимента. Учет конечности продольного размера возмущений внешнего течения и правильное задание их спектра необходимо для корректного описания закона нарастания пульсаций в пограничном слое. Нелинейность развития возмущений слабо влияет на интегральные пульсации, но существенно изменяет их спектры.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№ 01-01-00614) и Государственной программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ – 1984.2003.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Morkovin M.V.* The many faces of transition // *Viscous drag reduction* / Ed. by C.S. Wells. N.Y.: Plenum Press, 1969. P. 1–30.
2. *Westin K.J.A., Boiko A.V., Klingmann B.G., Kozlov V.V., Alfredsson P.H.* Experiments in a boundary layer subjected to freestream turbulence. Pt I: Boundary layer structure and receptivity // *J. Fluid Mech.* 1994. V. 281. P. 193–218.

3. Гуляев А.Н., Козлов В.Е., Кузнецов В.Р., Минеев Б.И., Секундов А.Н. Взаимодействие ламинарного пограничного слоя с внешней турбулентностью // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 5. С. 55–65.
4. Matsubara M., Alfredsson P.H. Disturbance growth in boundary layers subjected to free-stream turbulence // *J. Fluid Mech.* 2001. V. 430. P. 149–168.
5. Bertolotti F.P. Response of the Blasius boundary layer to free-stream vorticity // *Phys. Fluids.* 1997. V. 9. № 8. P. 2286–2299.
6. Andersson P., Berggren M., Henningson D.S. Optimal disturbances and bypass transition in boundary layers // *Phys. Fluids.* 1999. V. 11. № 1. P.134–150.
7. Luchini P. Reynolds-number-independent instability of the boundary layer over a flat surface: optimal perturbations // *J. Fluid Mech.* 2000. V. 404. P. 289–309.
8. Никитин Н.В. Численное исследование ламинарно-турбулентного перехода в круглой трубе под действием периодических входных возмущений // Изв. РАН. МЖГ. 2001. № 2. С. 42–55.
9. Bertolotti F.P., Kendall J.M. Response of the Blasius boundary layer to controlled free-stream vortices of axial form // AIAA paper. 1997. № 97–2018.
10. Leib S.J., Wundrow D.W., Goldstein M.E. Effects of free-stream turbulence and other vortical disturbances on a laminar boundary layer // *J. Fluid Mech.* 1999. V. 380. P. 169–203.
11. Устинов М.В. Восприимчивость пограничного слоя на плоской пластине к турбулентности набегающего потока // Изв. РАН. МЖГ. 2003. № 3. С. 56–68.
12. Wundrow D.W., Goldstein M.E. Effect on a laminar boundary layer of small-amplitude streamwise vorticity in the upstream flow // *J. Fluid Mech.* 2001. V. 426. P. 229–262.
13. Rozhdestvensky B.L., Simakin I. N. Secondary flows in a plane channel: their relationship and comparison with turbulent flows // *J. Fluid Mech.* 1987. P. 261–289.
14. Kida S., Marakani Y. Kolmogorov similarity in freely decaying turbulence // *Phys. Fluids.* 1987. V. 30. № 7. P. 2030–2039.
15. Устинов М.В. Влияние стационарной периодической неоднородности скорости на устойчивость пограничного слоя // Изв. РАН. МЖГ. 1995. № 4. С. 45–52.
16. Устинов М.В. Исследование субгармонического перехода в плоском канале методом прямого численного моделирования // Изв. АН СССР. МЖГ. 1993. № 3. С. 46–53.
17. Crow S.C. The spanwise perturbations of two-dimensional boundary layers // *J Fluid Mech.* 1965. V. 24. Pt 1. P.153–164.

Москва

E-mail: ustinov@stb.aerocentr.msk.su

Поступила в редакцию

3.VI.2003