

УДК 532.517.3:519.63

© 2004 г. Е. КИТ, Н. В. НИКИТИН, В. М. ШМИДТ, А. ЯХОТ

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ВИРТУАЛЬНЫХ ГРАНИЦ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ВОЗНИКНОВЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ ЗА ЦИЛИНДРОМ ВБЛИЗИ ПЛОСКОЙ СТЕНКИ

Численно исследованы условия возникновения и характер колебаний за круговым цилиндром, расположенным над плоской стенкой (экраном) и обтекаемым потоком с профилем скорости погранслоя типа. Определена зависимость критического числа Рейнольдса, при котором стационарный режим течения в следе за цилиндром сменяется колебательным, от зазора между цилиндром и экраном, и толщины пограничного слоя набегающего потока.

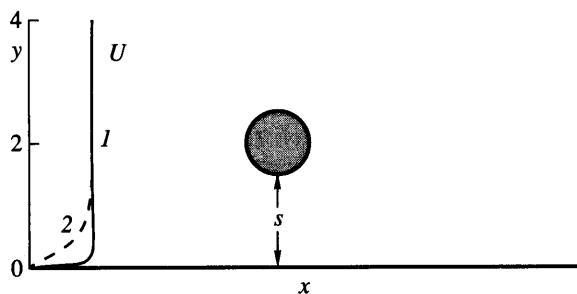
Ключевые слова: двумерные уравнения Навье–Стокса, конечно-разностный метод, нестационарное течение, критическое число Рейнольдса, число Струхала.

Наличие плоского экрана при поперечном обтекании цилиндрического препятствия (фиг. 1) оказывает существенное влияние на картину течения. Это влияние происходит за счет трех основных факторов. Во-первых, условия непротекания на экране препятствует расширению потока, что приводит к появлению конечной подъемной силы, действующей на препятствие по направлению от экрана. Во-вторых, профиль скорости в набегающем потоке – неоднороден. Сдвиг скорости оказывает несимметричное воздействие на цилиндр. В-третьих, условия прилипания на экране искажают течение в следе за цилиндром, изменяя свойства его устойчивости.

Вследствие практической важности, обтекание кругового цилиндра вблизи плоского экрана экспериментально изучалось в целом ряде исследований (см. [1, 2]). В основном эксперименты проводились при высоких числах Рейнольдса $Re = 10^4$ – 10^6 , интересных с точки зрения проектирования наземных конструкций. Установлено, что близость экрана подавляет сход вихрей с цилиндра. Для критического зазора между цилиндром и экраном, при котором в следе пропадают колебания на выделенной частоте, в разных опытах получены значения от 0.125 до 0.9 (в качестве линейного размера всюду используется диаметр цилиндра). Столь большой разброс объясняется различиями в условиях проведения экспериментов: степени турбулентности набегающего потока, толщине погранслоя в месте расположения цилиндра и т.д.

Обтекание цилиндра вблизи плоского экрана при невысоких числах Рейнольдса, $Re \sim 10^2$, рассматриваемое в настоящей работе, интересно не только с фундаментальной, но и с прикладной точки зрения. В качестве примера подобного течения можно привести обтекание подводных трубопроводов на глубинах в несколько десятков метров, т.е. за пределами прибрежной прибойной зоны [3]. Авторам известен лишь один эксперимент [4] в этом диапазоне чисел Рейнольдса: $Re = 170$. При зазоре $s = 0.6$ за цилиндром наблюдалась регулярная двухрядная (Карманова) цепочка вихрей, а при $s = 0.1$ – однорядная. Однако в [4] изучалось движение цилиндра в неподвижной жидкости, таким образом эффекты, связанные с профилем скорости в набегающем потоке, не рассматривались.

Численное исследование обтекания цилиндра пограничным слоем над плоской пластиной проведено в [5] для диапазона $Re = 80$ – 1000 (число Рейнольдса определялось через скорость на бесконечности и диаметр цилиндра). Во всех расчетах центр цилиндра



Фиг. 1. Схема течения и профили скорости набегающего потока: 1 – тонкий, 2 – толстый пограничные слои

дра располагался на расстоянии 16 от передней кромки пластины, таким образом, толщина пограничного слоя в месте контакта потока с цилиндром была однозначно связана с числом Рейнольдса. Рассчитана зависимость критического числа Рейнольдса Re^* от зазора, причем при $s < 0.2$ колебаний за цилиндром не наблюдалось вплоть до $Re = 1000$. Аналогичный результат получен в [6], где рассчитывалось течение за цилиндром в плоском канале при $Re < 300$. При профиле скорости Пуазейля набегающего потока сход вихрей прекращался при приближении цилиндра к одной из стенок канала ближе, чем на $s = 0.25$. Отметим, что в этих исследованиях не была определена зависимость результатов, в частности $Re^*(s)$, от вида профиля скорости в набегающем потоке.

Цель настоящей работы – численное исследование влияния профиля скорости набегающего потока $U(y)$ на устойчивость обтекания цилиндра вблизи плоского экрана. Для этого проведены расчеты критического числа Рейнольдса $Re^*(s)$ для профилей скорости погранслоного типа $U(y) = th(y/d)$ при двух значениях параметра d , характеризующего толщину пограничного слоя. Показано, что толщина погранслоя в набегающем потоке имеет существенное значение.

В [5] применялся конечно-разностный метод расчета на неортогональной сетке, адаптированной к границам цилиндра и экрана. В [6] использовался метод конечных элементов. Оба численных метода позволяют сгущать сетку вблизи препятствия и точно удовлетворять граничным условиям на твердых границах. Вместе с тем сложная сетка заметно снижает эффективность алгоритма. В частности, для решения эллиптических задач (при определении функции тока через завихренность или вычислении давления) приходится пользоваться итерационными процедурами.

В настоящем исследовании применяется альтернативный подход – метод виртуальных границ. В этом методе уравнения Навье–Стокса решаются в прямоугольной области на простой ортогональной сетке. Имеющиеся в области решения препятствия произвольно сложной формы моделируются введением в уравнения специальным образом распределенных искусственных сил так, чтобы обеспечить нулевые скорости (для случая условий прилипания) на заданных поверхностях внутри области решения (на виртуальных границах). Преимущества такого подхода по сравнению с методами, использующими адаптивные сетки, включают значительное упрощение вычислительных программ, простоту генерации расчетной сетки (даже в случае подвижных препятствий), заметное сокращение необходимой памяти, ускорение работы алгоритмов. В частности, эллиптические задачи могут решаться прямыми (безытерационными) быстрыми методами. Поскольку границы препятствий в общем случае не проходят через узлы сетки, то формулировка граничных условий требует тех или иных способов интерполяции. Способ интерполяции значений скорости в узлах сетки на точки

границы препятствия и способ введения искусственных сил определяют конкретный метод виртуальных границ.

В настоящей работе используется вариант, близкий к разработанному в [7]. От других аналогичных методов (их обзор имеется в [7]) он отличается устойчивостью интерполяции, а главное тем, что искусственные силы прикладываются лишь к тем узлам сетки, которые лежат внутри (или на поверхности) препятствий. Таким образом, метод не вносит нефизических возмущений в область движения жидкости. Другое отличие метода [7] – введение источников (стоков) массы (при нулевой интегральной интенсивности) во внутрь препятствий, существенно повышающее точность решения.

1. Постановка и метод решения задачи. Рассматривается плоское течение вязкой несжимаемой жидкости в прямоугольной области

$$(x, y) \in \{0 \leq x \leq X_m, 0 \leq y \leq Y_m\}$$

с круглым препятствием (цилиндром), с центром в точке (x_c, y_c) . В сечении $x = 0$ (входное сечение) считается заданным распределение скорости $\mathbf{v} = (U(y), 0)$ (фиг. 1). Течение описывается двумерными нестационарными уравнениями Навье–Стокса

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{v} - \nabla p + \mathbf{F} \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1.2)$$

Здесь $\mathbf{v} = (u, v)$ – поле скорости, p – кинематическое давление, t – время, Re – число Рейнольдса. В качестве масштабов длины и скорости выбираются диаметр цилиндра и максимальная скорость во входном сечении. На нижней стенке ($y = 0$) и на поверхности препятствия ставятся условия прилипания, а на верхней границе ($y = Y_m$) – условия свободного проскальзывания. В выходном сечении, которое считается достаточно удаленным от препятствия, ставятся мягкие граничные условия $\partial^2 u / \partial x^2 = \partial v / \partial x = 0$.

В правую часть уравнений (1.1) добавлена искусственная сила $\mathbf{F} = (-U''(y)/\text{Re}, 0)$ для того, чтобы в отсутствие препятствия поле скорости $\mathbf{v} = (U(y), 0)$ являлось решением во всей области. Таким образом устраняется зависимость профиля скорости набегающего на препятствие потока от числа Рейнольдса и расстояния от входного сечения. В качестве $U(y)$ в настоящей работе выбран профиль скорости погранслоного типа

$$U(y) = \text{th} \frac{y}{d} \quad (1.3)$$

Параметр d , характеризующий толщину погранслоя, связан с толщиной вытеснения δ и толщиной потери импульса θ соотношениями

$$\delta = d \ln 2, \quad \theta = d(1 - \ln 2)$$

С целью устранения проблемы начальных данных решение задачи проводилось из состояния покоя: $\mathbf{u}(t=0) = 0$. Поток разгонялся на начальном отрезке времени $\tau \sim 1$ путем гладкого изменения входных граничных условий

$$\mathbf{v}(x=0) = f(t)(U(y), 0), \quad f(0) = 0, \quad f(t \geq \tau) = 1$$

$$f'(0) = f''(0) = f'(\tau) = f''(\tau) = 0$$

При варьировании числа Рейнольдса (без изменения геометрических и сеточных параметров) в качестве начальных данных брались результаты расчетов при близких Re .

Для численного решения задачи применялся метод виртуальных границ, близкий к разработанному в [7]. От оригинального варианта он отличается схемой интегрирования по времени и несущественным изменением процедуры интерполяции, повыша-

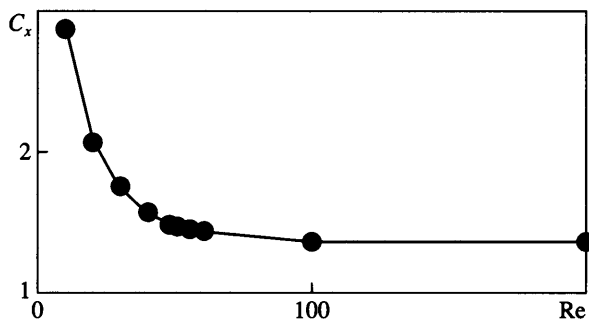
Re	X_m, Y_m, X_c	$I_m \cdot J_m$	$I_c \cdot J_c$	C_x	C_y'	St	Ссылки
40	50, 30, 15	128 · 96	16 · 16	1.57	–	–	–
40	50, 30, 15	256 · 192	32 · 32	1.57	–	–	–
40	50, 30, 15	512 · 384	64 · 64	1.56	–	–	–
40	100, 60, 30	256 · 192	16 · 16	1.53	–	–	–
100	50, 30, 15	256 · 192	32 · 32	1.365	0.33	0.167	–
200	50, 30, 15	256 · 192	32 · 32	1.36	0.68	0.199	–
200	50, 30, 15	512 · 384	64 · 64	1.35	0.68	0.198	–
200	100, 60, 30	512 · 384	32 · 32	1.34	0.66	0.196	–
40	–	–	–	1.51	–	–	[7]
40	–	–	–	1.51	–	–	[16]
100	–	–	–	1.33	0.32	0.165	[7]
100	–	–	–	1.33	0.33	0.165	[16]

ющим ее устойчивость. В этом методе дискретизация задачи по пространственным переменным производится стандартным конечно-разностным методом 2-го порядка, использующим перемежающиеся сетки [8]. В соответствии с принципом перемежающихся сеток давление отыскивается в узлах, лежащих в центрах расчетных ячеек, а компоненты скорости – в узлах, сдвинутых на половину шага сетки в направлении, соответствующем направлению данной компоненты. Различные аспекты, касающиеся техники вывода и свойств разностных уравнений, можно найти, например, в [9–11]. Как и в [7], интегрирование по времени проводилось по полуявной схеме, основанной на методе Рунге–Кутты 3-го порядка точности. Однако вместо схемы [12], применявшейся в [7], в данной работе использовалась схема, разработанная в [13], которая при той же требуемой памяти ЭВМ допускает простой и эффективный способ оценки локальной погрешности и автоматического управления шагом интегрирования [14].

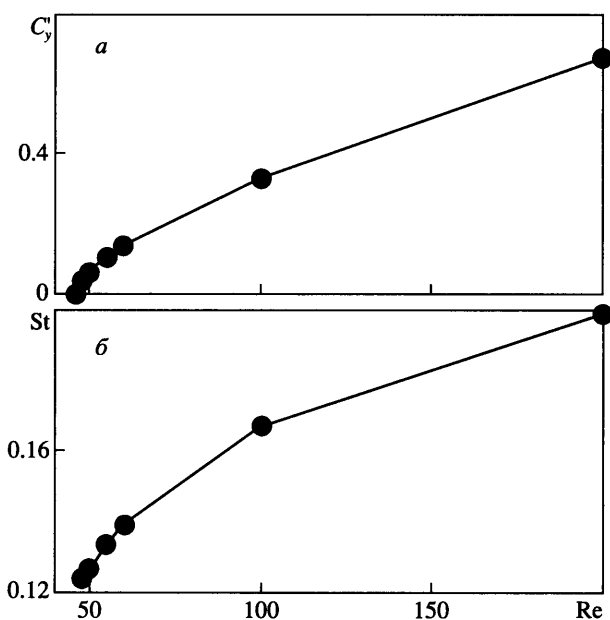
Решение уравнения Пуассона при определении давления на неравномерной в обоих направлениях сетке проводилось прямым быстрым методом циклической редукции [15].

2. Обтекание цилиндра равномерным потоком в отсутствие экрана. С целью изучения возможностей и свойств вычислительной процедуры, а также определения значений алгоритмических параметров был проведен обширный комплекс расчетов обтекания цилиндра в отсутствие экрана. Входной поток в этих расчетах задавался равномерным, на нижней границе расчетной области так же, как и на верхней, ставились условия свободного проскальзывания. Кроме числа Рейнольдса варьировались размеры расчетной области X_m, Y_m , расстояние от входного сечения до центра цилиндра X_c , число узлов расчетной сетки $I_m \times J_m$. Узлы сетки сгущались к центру цилиндра в каждом из направлений, степень сгущения задавалась числом узлов $I_c \times J_c$, приходящихся на описанный около обтекаемого цилиндра квадрат. Расчеты проводились в диапазоне чисел Рейнольдса от 10 до 200, при которых согласно имеющимся экспериментальным данным обтекание цилиндра остается двумерным.

Результаты некоторых расчетов представлены в таблице, где приведены значения коэффициента сопротивления C_x , амплитуды колебаний коэффициента подъемной силы C_y' и числа Струхала St. Для двух значений $Re = 40$ и 200 показана зависимость результатов от размера расчетной области и параметров расчетной сетки. Во всем исследованном диапазоне чисел Рейнольдса сетка 256×192 при $X_m = 50$ и $Y_m = 30$ дает



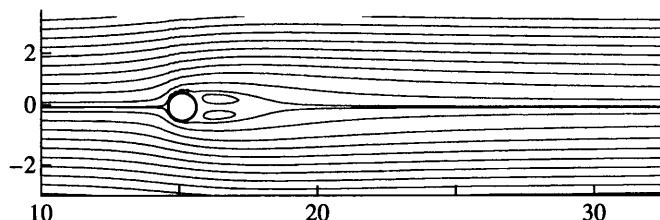
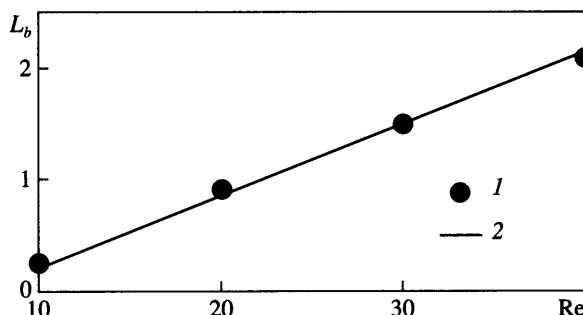
Фиг. 2. Закон сопротивления обтекания цилиндра



Фиг. 3. Амплитуды колебаний коэффициента подъемной силы (а) и число Струхаля (б) при обтекании цилиндра

удовлетворительные результаты. Большинство представляемых далее результатов получено именно при этих значениях параметров. Кроме результатов настоящей работы в таблице для сопоставления включены результаты расчетов [7, 16] для $Re = 40$ и 100. Различия составляют 3–4% по коэффициенту сопротивления и менее 1% по C'_y и St . Следует отметить, что имеющиеся в литературе результаты вычислений и экспериментальных измерений обладают значительно большим разбросом.

Полученный закон сопротивления $C_x(Re)$ приведен на фиг. 2. На фиг. 3 изображены зависимости $C'_y(Re)$ и $St(Re)$ для колебательных режимов, которые в настоящей работе наблюдались начиная с $Re = Re^* = 46$. Все представленные результаты, включая критическое число Рейнольдса, лежат в пределах разброса имеющихся в литературе данных.

Фиг. 4. Линии тока стационарного обтекания цилиндра ($Re = 40$)

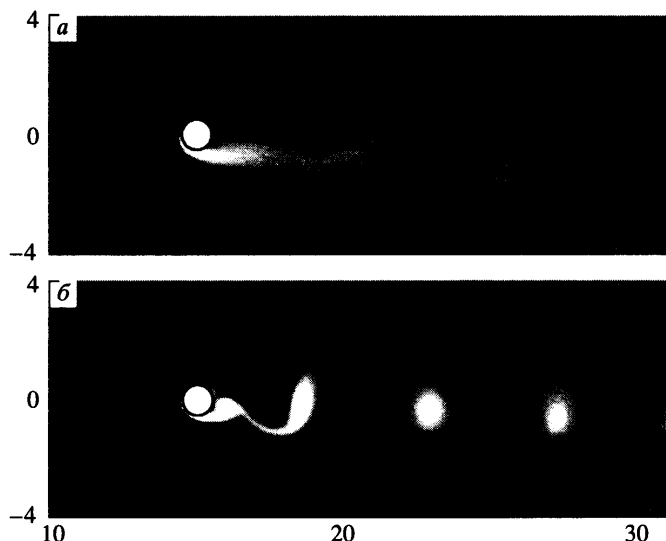
Фиг. 5. Длина зоны возвратного течения за цилиндром: 1 – результаты расчетов, 2 – экспериментальные данные [17]

В стационарных режимах за цилиндром образуется зона обратного течения в виде пары симметричных вихрей противоположного знака (фиг. 4, $Re = 40$). Длина зоны возвратного течения L_b как функция числа Рейнольдса представлена на фиг. 5 и хорошо согласуется с экспериментальной зависимостью $L_b = 0.065 (Re - 7)$ [17].

Структура течения в нестационарных режимах демонстрируется на фиг. 6, где изображены мгновенные поля завихренности $\omega = \partial v / \partial x - \partial u / \partial y$ для двух чисел Рейнольдса $Re = 50$ и 200 . Темные области на фигурах соответствуют отрицательным значениям ω , а светлые – положительным. Распределения ω наглядно показывают наличие двухрядной вихревой дорожки Кармана, образующейся за цилиндром.

3. Обтекание цилиндра вблизи экрана. Вычисления проводились для двух значений параметра d , характеризующего толщину пограничного слоя в набегающем потоке (1.3): $d = 0.1$ (тонкий погранслой) и 0.5 (толстый). Эти значения соответствуют диапазону, рассмотренному в экспериментах [2]. Основная цель исследования – определение зависимости критического числа Рейнольдса Re^* возникновения колебаний от величины зазора s между цилиндром и экраном. Размеры расчетной области и значения других алгоритмических параметров устанавливались в соответствии с результатами методических расчетов для неограниченной области.

При варьировании числа Рейнольдса с целью определения его критического значения при заданных параметрах d, s в качестве начального состояния выбирался один из трех вариантов: *a* – состояние покоя с последующим разгоном и установлением потока, *б* – стационарное течение при меньшем Re , *в* – установившееся нестационарное течение при большем Re . Вариант (*a*) при околокритических числах Рейнольдса требует очень большого времени расчета вследствие малости коэффициента роста (затухания) возмущений, вариант (*в*) в этом смысле оказывается предпочтительным. Обнаружено, что в большинстве случаев вариант (*б*) дает Re^* , превышающее Re^* , получен-

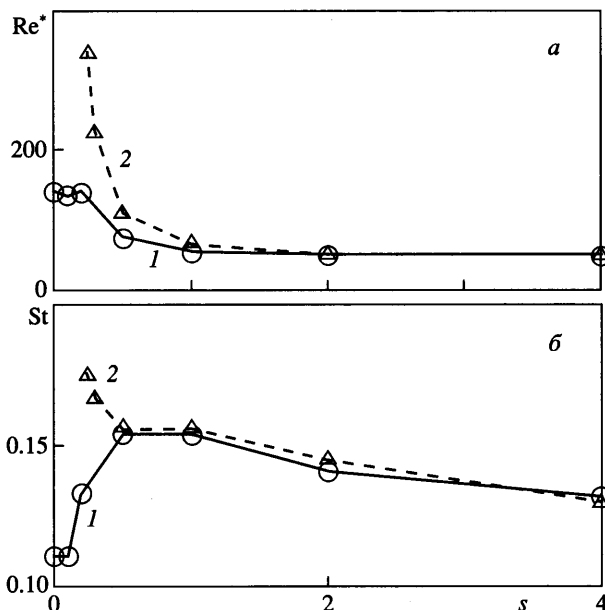


Фиг. 6. Мгновенные поля завихренности при обтекании цилиндра: $a - Re = 50$, $b - 200$

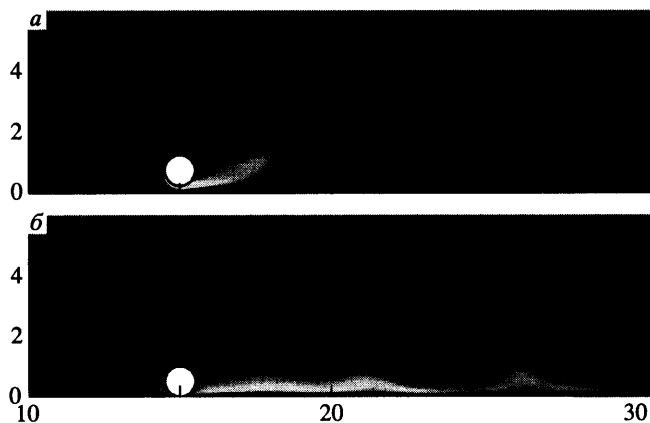
ное по варианту (в). Таким образом, при одном и том же числе Рейнольдса получались как стационарные, так и нестационарные течения. Объяснением этого наблюдения может быть жесткое возбуждение колебаний. Не исключено и влияние численных эффектов, связанных с особенностями применяемого вычислительного алгоритма. Для прояснения этого вопроса необходимы дополнительные исследования, выходящие за рамки настоящей работы.

Зависимости критического числа Рейнольдса Re^* от зазора для обоих рассмотренных профилей скорости набегающего потока, полученные по варианту (в), представлены на фиг. 7, а. При увеличении зазора $Re^*(s)$ в каждом случае приближается к $Re^* = 46$, отвечающему отсутствию экрана. Как и следовало ожидать, зависимость $Re^*(s)$ для толстого погранслоя более сильная, чем для тонкого. Наименьший зазор, при котором получены регулярные периодические режимы для толстого погранслоя в рассмотренном диапазоне чисел Рейнольдса, $Re \leq 500$, составляет $s = 0.25$. При $s = 0.2$ численное решение выходило либо на стационарный режим, либо при наибольших Re на режим слабых периодических колебаний с периодом на порядок большем, чем при других зазорах. В последних режимах колебания наблюдались только в области дальнего следа вблизи выходной границы расчетной области, что может объясняться влиянием поставленных искусственных выходных граничных условий. Полное подавление колебаний при малых зазорах и толстом погранслое соответствует численным расчетам [5, 6] и результатам ряда экспериментальных исследований. В случае тонкого погранслоя в набегающем потоке регулярные колебания возникают при любом зазоре, включая $s = 0$, т.е. когда цилиндр касается экрана. В этом предельном случае критическое число Рейнольдса равно 140.

Числа Струхала St возбуждающихся колебаний при $Re = Re^*(s)$ представлены на фиг. 7,б как функции зазора для обоих исследованных толщин погранслоя. Можно предположить, что St растет с увеличением Re и падает с уменьшением s . В случае толстого погранслоя это в итоге ведет к монотонному росту числа Струхала при утоньшении зазора. Для тонкого погранслоя рост Re^* при уменьшении s не столь быстрый, и в результате получается немонотонное поведение $St(s)$.



Фиг. 7. Зависимости критического числа Рейнольдса (а) и числа Струхала (б) от зазора между цилиндром и экраном: 1 – $d = 0.1$, 2 – 0.5 (тонкий и толстый пограничные слои)



Фиг. 8. Мгновенные поля завихренности: а – $d = 0.5$, $s = 0.25$, $Re = 350$; б – 0.1 , 0 , 140

Мгновенные поля завихренности при минимальных зазорах и наименьших сверхкритических числах Рейнольдса ($s = 0.25$, $Re = 350$ и $s = 0$, 140 для толстого и тонкого погранслоев изображены на фиг. 8. Характерная черта в обоих случаях – однородная вихревая структура, образующаяся в верхней части следа за цилиндром. Наиболее вероятный механизм возбуждения таких колебаний – неустойчивость Кельвина–Гельмгольца, возникающая в слое смешения на границе внешнего течения в верхней части потока и застойной зоны в области за цилиндром. При увеличении зазора однородная вихревая структура постепенно трансформируется в двухрядную, и уже при $s = 2$ поля завихренности в области за цилиндром для обеих толщин погранслоя визуально не отличаются от случая отсутствия экрана (фиг. 6).

Заключение. Численно исследованы условия возникновения и структура колебаний при обтекании кругового цилиндра, расположенного вблизи плоского экрана. Рассмотрено два профиля скорости набегающего потока. Показано, что при малых зазорах критическое число Рейнольдса существенно зависит от толщины погранслоя в набегающем потоке. В частности, если для толстого погранслоя приближение к экрану полностью подавляет возникновение колебаний, то в случае тонкого погранслоя это лишь увеличивает критическое число Рейнольдса.

Колебательное движение за цилиндром при малых зазорах характеризуется наличием однорядной вихревой дорожки, возникающей, по-видимому, в результате неустойчивости Кельвина – Гельмгольца слоя смешения между внешним потоком и застойной зоной в области за цилиндром. При удалении цилиндра от экрана течение приобретает вид двухрядной вихревой дорожки Кармана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 02-01-00492) и Израильского научного фонда (гранты 240/01, 159/02).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бычков Н.М., Диковская Н.Д., Ларичкин В.В. Взаимодействие поперечно обтекаемого цилиндра с близко расположенным экраном // Изв. СО АН СССР. Сер. техн. н. 1990. Вып. 1. С. 57–63.
2. Price S.J., Sumner D., Smith J.G., Leong K., Paidoussis M.P. Flow visualization around a circular cylinder near to a plane wall // J. Fluids and Structures. 2002. V. 16. № 2. P. 175–191.
3. Kit E., Sladkevich M. Structure of offshore currents on Mediterranean coast of Israel // 6-th Workshop on physical processes in natural waters. Ed. Casamitjana X. Girona, Spain. 2001. P. 97–100.
4. Taneda S. Experimental investigation of vortex streets // J. Phys. Soc. Japan. 1965. V. 20. № 9. P. 1714–1721.
5. Lei C., Cheng L., Armfield S.W., Kavanagh K. Vortex shedding suppression for flow over a circular cylinder near a plane boundary // Ocean Engineering. 2000. V. 27. № 10. P. 1109–1127.
6. Zovatto L., Pedrizzetti G. Flow about a circular cylinder between parallel walls // J. Fluid Mech. 2001. V. 440. P. 1–25.
7. Kim J., Kim D., Choi H. An immersed-boundary finite-volume method for simulations of flow in complex geometries // J. Comput. Phys. 2001. V. 171. № 1. P. 132–150.
8. Harlow F.H., Welch J.E. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface // Phys. Fluids. 1965. V. 8. № 12. P. 2182–2189.
9. Williams G. Numerical integration of the three-dimensional Navier–Stokes equations for incompressible flow // J. Fluid Mech. 1969. V. 37. Pt. 4. P. 727–750.
10. Schumann U. Subgrid scale model for finite difference simulations of turbulent flows in plane channels and annuli // J. Comput. Phys. 1975. V. 18. № 4. P. 376–401.
11. Kim J., Moin P. Application of a fractional-step method to incompressible Navier–Stokes equations // J. Comput. Phys. 1985. V. 59. 2. P. 308–323.
12. Spalart P.R., Moser R.D., Rogers M.M. Spectral methods for the Navier–Stokes equations with one infinite and two periodic directions // J. Comput. Phys. 1991. V. 96. № 2. P. 297–324.
13. Никитин Н.В. Статистические характеристики пристенной турбулентности // Изв. РАН. МЖГ. 1996. 3. С. 32–43.
14. Никитин Н.В. Спектрально-конечно-разностный метод расчета турбулентных течений несжимаемой жидкости в трубах и каналах // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1994. Т. 34. № 6. С. 909–925.
15. Swartztrauber P.N. A direct method for the discrete solution of separable elliptic equations // SIAM J. Numer. Analysis. 1974. V. 11. № 6. P. 1136–1150.
16. Park J., Kwon K., Choi H. Numerical solutions of flow past a circular cylinder at Reynolds number up to 160 // KSME Intern. J. 1998. V. 12. 6. P. 1200–1205.
17. Taneda S. Experimental investigation of the wakes behind cylinders and plates at low Reynolds numbers // J. Phys. Soc. Japan. 1956. V. 11. № 3. P. 302–307.