

УДК 532.516.5 : 519.63

© 2004 г. А. В. ШАПЕЕВ

НЕСТАЦИОНАРНОЕ АВТОМОДЕЛЬНОЕ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОМ ДИФФУЗОРЕ

Рассмотрена задача о двумерном нестационарном течении вязкой несжимаемой жидкости в секторообразной области. В начальный момент задавалось строго радиальное течение, что позволило искать решения в классе автомодельных течений. Разработан и применен численный метод, основанный на смешанной конечно-разностной и спектральной пространственной дискретизации, который позволяет эффективно решать задачу о нахождении автомодельного решения. Проведено математическое моделирование процесса развития и установления стационарных течений Гамеля–Джеффри и Моффатта.

Ключевые слова: нестационарное, автомодельное течение жидкости в диффузоре, конфузоре; математическое моделирование, численный спектральный метод.

Задача о течении вязкой несжимаемой жидкости в диффузоре, как правило, исследуется в стационарной постановке.

В [1] рассматривалась задача о двумерном течении вязкой несжимаемой жидкости в секторообразной области вблизи угловой точки, вызванном возмущением течения вдали от угловой точки (в угловой точке особенности отсутствуют в отличие от задач течения в диффузоре или конфузоре). При этом сделано предположение о том, что характер возмущений не влияет на поведение решения вблизи угловой точки. В случае, когда величина угла меньше некоторого критического значения, найдены точные решения стационарных уравнений Стокса, состоящие из системы вихрей с уменьшающимися размером и интенсивностью.

В [2] исследованы вопросы существования, единственности и асимптотического поведения решения стационарных уравнений Навье–Стокса в области, состоящей из объединения ограниченной области и нескольких секторообразных областей. В частности, доказано, что решение стационарных уравнений Навье–Стокса в этих секторообразных областях на бесконечности стремится к решению Гамеля–Джеффри.

В серии работ [3–5] аналитически и численно проведены исследования радиальных стационарных течений в конфузоре, в широком диапазоне параметров и численно найдены новые режимы течений.

С точки зрения группового анализа дифференциальных уравнений, плоскопараллельные течения, исследованные в [3–5], инвариантны относительно двух преобразований: переноса по времени и растяжения. Однако можно находить новые решения, сохранив их инвариантность относительно преобразования растяжения и отказавшись от инвариантности относительно переноса по времени [6]. Так, можно получать автомодельные течения, которые будут эволюционировать из радиального течения, и переходить к асимптотическим режимам течения, рассмотренным в приведенных работах. Более того, как будет показано, автомодельные течения при достаточно больших временах могут иметь в качестве асимптотики стационарные нерадиальные движения жидкости, что позволяет изучать развитие и выход течения на режимы, изученные в [1].

Таким образом, на основе автомодельных решений можно изучать эволюцию течения вязкой несжимаемой жидкости в диффузоре с начальным распределением скорости, не имеющим трансверсальной компоненты. Уравнение автомодельных течений является нелинейным уравнением в частных производных с двумя независимыми пе-

ременными – автомодельной переменной и полярным углом. Это уравнение невозможно решить явно, однако оно гораздо проще для численного исследования в отличие от полных уравнений Навье–Стокса.

В настоящей работе численно исследуется развитие течения вязкой несжимаемой жидкости в диффузоре с начальным распределением скорости, не имеющим трансверсальной компоненты. Разработан и применен численный метод, основанный на смешанной конечно-разностной и спектральной дискретизации, который позволяет эффективно решать задачу о нахождении автомодельного решения. Проведено математическое моделирование процесса развития и установления стационарных течений Гамеля–Джеффри и течений, исследованных в [1].

1. Уравнение автомодельных течений. Рассматривается задача о нестационарном течении вязкой жидкости в диффузоре с углом раствора α . Пусть безразмерные переменные t – время, (r, θ) – полярные координаты на плоскости, а $\varphi(t, r, \theta)$ – функция тока. Тогда начально-краевая задача, описывающая движение жидкости в области $0 < \theta < \alpha$, $0 < r < +\infty$, имеет вид

$$-\frac{\partial \Delta_r \varphi}{\partial t} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\text{Re}} \Delta_r \right) \Delta_r \varphi = 0 \quad (1.1)$$

$$\varphi|_{r=0} = \varphi_0(\theta) \quad (1.2)$$

$$\varphi|_{\theta=0} = 0, \quad \varphi|_{\theta=\alpha} = -Q, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0} = \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\alpha} = 0 \quad (1.3)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \varphi = \varphi_0(\theta), \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0 \quad (1.4)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = 0 \quad (1.5)$$

$$\Delta_r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right)$$

Здесь Q – суммарный безразмерный расход жидкости, Re – число Рейнольдса, $\varphi_0(\theta)$ – распределение функции тока в начальный момент (начальная трансверсальная скорость $\partial \varphi_0 / \partial r$ при этом равна нулю). Условия (1.4) означают, что в бесконечно удаленной точке течение является радиальным и совпадает с начальным. Условия (1.5) обеспечивают корректность постановки задачи и выражают собой регулярность поведения трансверсальной компоненты скорости в окрестности угловой точки.

Так как в начальный момент скорость течения зависит только от θ , течение будет автомодельным, т.е. φ будет зависеть только от $\zeta = \log(r/\sqrt{t})$ и θ . После перехода к автомодельным переменным φ, ζ, θ исходная задача (1.1)–(1.5) примет окончательный вид

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial \zeta} + \left(\text{Re} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \zeta} - \text{Re} \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \Delta \right) (e^{-2\zeta} \Delta \varphi) = 0 \quad (1.6)$$

$$\varphi|_{\theta=0} = 0, \quad \varphi|_{\theta=\alpha} = -Q, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0} = \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\alpha} = 0 \quad (1.7)$$

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} \varphi = 0, \quad \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} = 0 \quad (1.8)$$

$$\lim_{\zeta \rightarrow -\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} = 0, \quad \lim_{\zeta \rightarrow -\infty} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} = 0 \tag{1.9}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}$$

2. Численный метод. Трудность при численном решении подобных уравнений представляет собой наличие четвертых производных по пространственным переменным. Это делает классические итерационные методы малоприменимыми для решения таких задач из-за большого количества итераций, необходимых для достижения нужной точности.

Предложенный численный метод для решения задачи (1.6)–(1.9) заключается в смешанной спектрально-разностной дискретизации; при этом в направлении оси ζ вводится конечно-разностная дискретизация, а в направлении оси θ – спектральная дискретизация [7].

Для нахождения приближенного решения условия на бесконечности переносятся на границы конечного интервала (ζ_l, ζ_r) :

$$\varphi|_{\zeta = \zeta_r} = \varphi_0(\theta), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta = \zeta_r} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta = \zeta_l} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} \Big|_{\zeta = \zeta_l} = 0 \tag{2.1}$$

Точки ζ_l и ζ_r выбираются из условия, чтобы перенос краевых условий с бесконечности не внес существенных погрешностей в приближенное решение. В результате получилась задача численного решения уравнения (1.6) в области $\Omega = \{(\zeta, \theta): 0 < \theta < \alpha, \zeta_l < \zeta < \zeta_r\}$ с краевыми условиями (1.7), (2.1).

Пусть задано приближенное решение $\chi = \chi(\zeta, \theta)$. При каждом ζ из области Ω уточненное решение $\varphi = \varphi(\zeta, \theta)$ линеаризованного уравнения

$$L_\chi(\varphi) \equiv \frac{1}{2} \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial \zeta} + \left(\text{Re} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \zeta} - \text{Re} \frac{\partial \chi}{\partial \zeta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \Delta \right) (e^{-2\zeta} \Delta \varphi) = 0 \tag{2.2}$$

ищется в виде конечного ряда

$$\varphi(\zeta, \theta) = \frac{Q}{\alpha^3} \theta^2 (2\theta - 3\alpha) + \sum_{i=1}^{N_\theta} c_i(\zeta) f_i(\theta) \tag{2.3}$$

где $f_i(\theta)$ – собственные функции краевой одномерной задачи

$$\frac{d^4 f}{d\theta^4} = \lambda^4 f, \quad f(0) = f'(0) = f(\alpha) = f'(\alpha) = 0 \tag{2.4}$$

соответствующие возрастающей последовательности собственных чисел $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < +\infty$. Представленное таким образом приближенное решение автоматически удовлетворяет условиям при $\theta = 0$ и $\theta = \alpha$. После подстановки функции φ из (2.3) в линеаризованное уравнение (2.2), домножения его на f_m и интегрирования по θ от 0 до α , получим

$$\int_0^\alpha L_\chi \sum_{i=1}^{N_\theta} c_i(\zeta) f_i(\theta) f_m(\theta) d\theta = \frac{Q}{\alpha^3} \int_0^\alpha L_\chi (\theta^2 (3\alpha - 2\theta) f_m(\theta)) d\theta$$

где $1 \leq m \leq N_\theta$. Последнее равенство представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка относительно функций $c_i(\zeta)$. После конечно-разностной дискретизации со вторым порядком этих уравнений совместно с краевыми условиями получается система линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов c_i в узлах сетки по оси ζ . Эта система решается методом отражений с учетом разреженности матрицы системы. Для получения решения исходного нелинейного уравнения использовался метод итераций по нелинейности, заключающийся в подстановке на каждой итерации вместо χ решения, полученного на предыдущей итерации.

Если N_ζ – число точек сетки по оси ζ , то время расчета численного решения есть $O(N_\zeta N_\theta^3)$. Спектральная дискретизация по оси θ позволяет брать в сравнении с разностной дискретизаци-

ей существенно меньшее N_θ для достижения требуемой точности, что многократно уменьшает время, необходимое для вычисления приближенного решения. В связи с этим построенный метод оказался очень эффективным для данной задачи.

3. Результаты расчетов. Проведено численное исследование развития течения жидкости в диффузоре при различных режимах: втекания ($Q < 0$), вытекания ($Q > 0$) и нулевого расхода ($Q = 0$).

Во всех случаях численное решение искалось при $\zeta_l = -2$, $\zeta_r = 6$, $N_\theta = 13$, $N_\zeta = 240$. Такой выбор параметров сделан из условий того, чтобы уменьшение шагов сетки (точнее, увеличение размерности пространства сеточных функций) и увеличение расчетного интервала по ζ не вносили существенных изменений в численное решение.

В случае течения с нулевым расходом ($Q = 0$) в диффузоре с углом раствора $\alpha = \pi/6$ обнаружено стационарное течение, отличное от радиального [1]. Число Рейнольдса в расчетах $Re = 30$. В качестве начального режима течения было взято антисимметричное радиальное течение, задаваемое симметричной функцией тока

$$\varphi|_{r=0} = \varphi_0(\theta) = \theta^2(\alpha - \theta)^2(16/\alpha^4)$$

Рассчитанные линии тока в различные моменты времени приведены на фиг. 1. Как видно из приведенных рисунков, с ростом времени, благодаря силе вязкости, появляется трансверсальная компонента скорости, а радиальная компонента скорости затухает. Такое течение способствует образованию системы вихрей с уменьшающейся интенсивностью. Возникающие первыми вихри с относительно большой интенсивностью несимметричны ввиду действия сил инерции. Следующие вихри имеют малую интенсивность, поэтому действие силы инерции на них незначительно и они остаются симметричными.

Анализируя полученные результаты, можно заключить, что при $t \rightarrow \infty$ течение выходит на режимы, исследованные в [1]. В частности, можно говорить о том, что при значениях α , меньших некоторого критического, возмущение покоящейся жидкости вызывает течение, состоящее из системы вихрей с уменьшающимися размером и интенсивностью.

В следующем численном эксперименте рассматривалось сходящееся течение в конфузоре с углом раствора $\alpha = \pi/6$ и $Re = -100$. Скорость стационарного радиального течения для таких параметров всюду отрицательна [8].

В качестве начального режима течения было взято антисимметричное отклонение от симметричного течения так, чтобы присутствовали как участки втекания, так и участки вытекания:

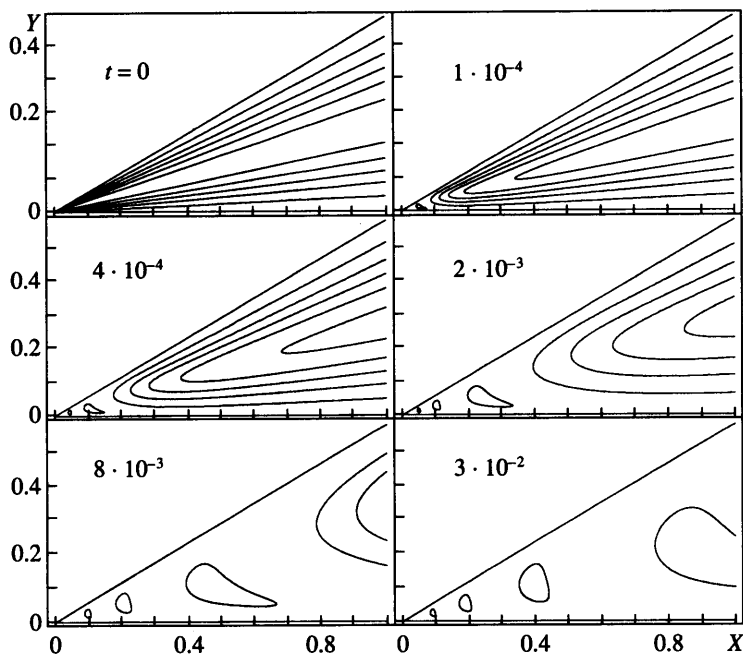
$$\varphi|_{r=0} = \varphi_0(\theta) = \frac{Q}{\alpha^3} \theta^2(3\alpha - 2\theta) - f_1(\theta)$$

где f_1 – собственная функция задачи (2.4), соответствующая λ_1 , всюду положительная и нормированная так, чтобы $f_1(\alpha/2) = 1$.

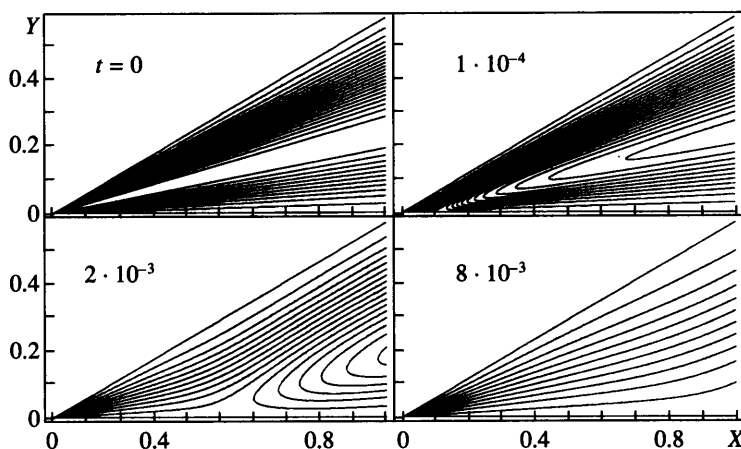
Здесь с ростом времени наблюдается уменьшение зоны втекания до ее исчезновения и установление стационарного режима течения без участков втекания (фиг. 2).

Большой интерес представляет случай вытекания. Рассмотрено течение в диффузоре с углом раствора $\alpha = \pi/6$ и $Re = 40$. При таких значениях параметров стационарное решение с необходимостью имеет участки втекания [8], и поэтому интересен процесс образования участков втекания из решения, имеющего в начальный момент скорость, направленную всюду от угловой точки:

$$\varphi|_{r=0} = \varphi_0(\theta) = \frac{Q}{\alpha^3} \theta^2(3\alpha - 2\theta)$$



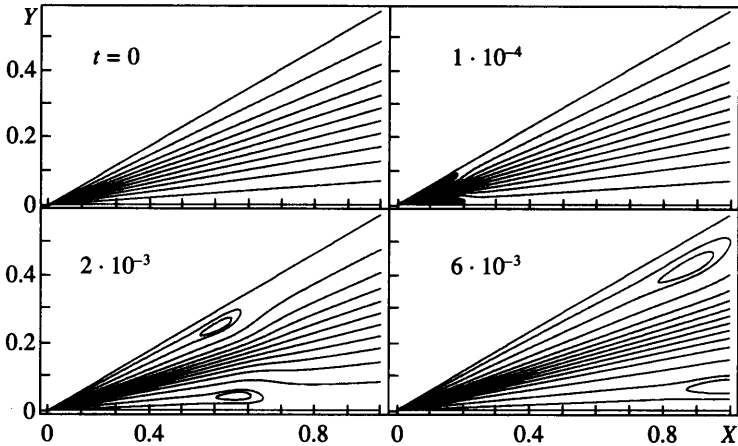
Фиг. 1. Линии тока при $Q = 0$ и $Re = 30$ в моменты времени $0, 1 \cdot 10^{-4}, 4 \cdot 10^{-4}, 2 \cdot 10^{-3}, 8 \cdot 10^{-3}, 3 \cdot 10^{-2}$



Фиг. 2. Линии тока при $Q < 0$ и $Re = -100$ в моменты времени $0, 1 \cdot 10^{-4}, 2 \cdot 10^{-3}, 8 \cdot 10^{-3}$

В процессе развития течения жидкость у стенок в том месте, где должны быть участки противотока, начинает замедляться и обращать свою скорость на противоположную (фиг. 3). При этом образуются два вихря, симметричные относительно оси диффузора, вокруг которых формируется течение с линиями тока, начинающимися и заканчивающимися в угловой точке диффузора.

Заключение. Рассмотрена задача о двумерном нестационарном автомодельном течении вязкой несжимаемой жидкости в секторообразной области. Предложен числен-



Фиг. 3. Линии тока при $Q > 0$ и $Re = 40$ в моменты времени $0, 1 \cdot 10^{-4}, 2 \cdot 10^{-3}, 6 \cdot 10^{-3}$

ный алгоритм, основанный на смешанной конечно-разностной и спектральной пространственной дискретизации. Исследован процесс развития и установления стационарных течений для различных величин расхода жидкости. В случае нулевого расхода в процессе эволюции возникает несимметричное течение, состоящее из полубесконечной системы вихрей и при достаточно больших временах выходящее на симметричные режимы, найденные Моффатом. В случае ненулевого расхода изучена эволюция течений в зонах втекания и вытекания.

Автор выражает благодарность В.В. Пухначеву за постановку задачи и плодотворное обсуждение работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Moffatt H.K.* Viscous and resistive eddies near a sharp corner // *J. Fluid Mech.* 1964. V. 18. № 1. P. 1–18.
2. *Rivkind L., Solonnikov V.A.* Jeffery-Hamel asymptotics for steady state Navier-Stokes flow in domains with sector-like outlets to infinity // *J. Math. Fluid Mech.* 2000. V. 2. № 4. P. 324–352.
3. *Акуленко Л.Д., Георгиевский Д.В., Кумакшев С.А.* Течение вязкой жидкости в конфузоре с большим углом раствора // Докл. РАН. 2002. Т. 386. № 3. С. 333–337.
4. *Акуленко Л.Д., Георгиевский Д.В., Кумакшев С.А.* Новые несимметричные и многомодовые решения задачи о течении вязкой жидкости в плоском конфузоре // Докл. РАН. 2002. Т. 383. № 1. С. 46–50.
5. *Акуленко Л.Д., Георгиевский Д.В., Кумакшев С.А., Нестеров С.В.* Численно-аналитическое исследование стационарного течения вязкой жидкости в плоском конфузоре // Докл. РАН. 2000. Т. 374. № 1. С. 44–48.
6. *Pukhnachev V.V.* Symmetries in the Navier-Stokes equations // Intern. Conf. “Navier-Stokes Equations and Related Topics”. St. Petersburg, Russia, september 11–18, 2002. Abstracts. P. 62–63.
7. *Canuto C., Hussaini M.Y., Quarteroni A., Zang T.A.* Spectral Methods in Fluid Dynamics. N.Y.: Springer, 1988. 557 p.
8. *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 758 с.