

УДК 532.529:541.182

© 2004 г. В. Е. БАРАНОВ, С. И. МАРТЫНОВ

ВЛИЯНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НА СКОРОСТЬ ОСАЖДЕНИЯ БОЛЬШОГО ЧИСЛА ЧАСТИЦ В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Рассматривается осаждение большого числа одинаковых сферических частиц, падающих в вязкой жидкости под действием силы тяжести. Учитывается гидродинамическое взаимодействие всех частиц между собой. Численное моделирование задачи проведено для случайно расположенных частиц, образующих различные конфигурации из 1–100 частиц. Получена зависимость средней скорости осаждения частиц от их числа и концентрации в облаке. Дается сравнение с ранее полученными результатами.

Ключевые слова: вязкая жидкость, гидродинамическое взаимодействие, скорость, осаждение, частицы.

Когда однородная смесь частиц и жидкости помещена в контейнер, то под действием силы тяжести частицы начинают оседать на дно контейнера, причем скорость осаждения частиц зависит от их размера, формы и концентрации. Зависимость от концентрации обусловлена гидродинамическим взаимодействием частиц, которое сводится к изменению распределения скорости жидкости вокруг движущейся частицы. Учет только парных взаимодействий частиц дает вклад в выражение для средней скорости осаждения, пропорциональный концентрации частиц в первой степени [1, 2]. Очевидно, что учет многочастичных взаимодействий должен привести к другой зависимости средней скорости осаждения от концентрации. В этом случае проблема заключается в нахождении решений уравнений движения жидкости, удовлетворяющих граничным условиям на множестве частиц. В [3, 4] показано, что даже решение задачи о гидродинамическом взаимодействии трех частиц в принципе нельзя свести к сумме решений задач о парных взаимодействиях этих частиц. Это связано с тем, что условия для скорости жидкости на поверхности каждой частицы являются интегральными в том смысле, что описывают суммарный вклад от гидродинамического взаимодействия выделенной частицы со всеми остальными. Из-за этого в граничных условиях для скорости нельзя отделить результат гидродинамического взаимодействия выделенной частицы с какой-либо другой от результата взаимодействий этой же выделенной частицы со всеми остальными. Погрешность представления гидродинамического взаимодействия всех частиц в виде их парных взаимодействий тем больше, чем больше число частиц, участвующих в таком взаимодействии. Этим объясняется расхождение интегралов, возникающее при попытке учесть взаимодействие бесконечного числа частиц, суммируя результат их парных взаимодействий [1].

В [5] показано, что корректный учет гидродинамического взаимодействия большого числа частиц, помещенных в поток вязкой жидкости, с ростом числа взаимодействующих частиц приводит сначала к количественным, а затем к качественным изменениям свойств решений уравнений гидродинамики. Из анализа этих изменений можно сделать вывод об увеличении скорости осаждения частиц с ростом числа взаимодействующих частиц. Для подтверждения этого рассматривается задача об определении

средней скорости осаждения в вязкой жидкости конечного числа случайно расположенных частиц с учетом их гидродинамического взаимодействия.

1. Постановка задачи. Рассматривается N твердых сферических частиц A^1, \dots, A^N , помещенных в неограниченную несжимаемую жидкость вязкости η и образующих облако конечного размера. Радиусы частиц A^1, \dots, A^N соответственно равны R^1, \dots, R^N . В пространстве введена декартова система координат с началом в точке O , радиусы-векторы центров частиц – $\mathbf{r}^1, \dots, \mathbf{r}^N$. Число Рейнольдса Re предполагаем малым. Скорость невозмущенного потока жидкости представляется в виде

$$U_i(\mathbf{x}) = U_i + U_{ij}x_j + U_{ijm}x_jx_m + \dots = U_i + U_{ij_1}x_{j_1} + U_{ij_1j_2}x_{j_1}x_{j_2} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} U_{ij_1\dots j_k}x_{j_1}\dots x_{j_k}$$

Так как Re мало, запишем уравнения для скорости $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ и давления $p(\mathbf{x})$ возмущения в приближении Стокса

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{1.1}$$

$$\eta \nabla^2 \mathbf{u} = \nabla p \tag{1.2}$$

На поверхности частиц имеем граничные условия

$$|\mathbf{x} - \mathbf{r}^b| = R^b: \quad u_i(\mathbf{x}) + U_i(\mathbf{x}) = V_i^b + \Gamma_{ij}^b(x_j - r_j^b) \\ \Gamma_{ij}^b = \epsilon_{ikj} \omega_k^b \tag{1.3}$$

для всех $i = 1, 2, 3, b = 1, \dots, N$. Здесь через V^b и ω^b обозначены линейная и угловая скорости частицы с номером b . На бесконечности граничные условия

$$|\mathbf{x}| \rightarrow \infty: \quad p(\mathbf{x}) \rightarrow 0, \quad u_i(\mathbf{x}) \rightarrow 0 \tag{1.4}$$

Наличие граничных условий на бесконечности существенно отличает задачу об осаждении облака частиц от осаждения частиц, распределенных по всему объему жидкости. В последнем случае граничные условия на бесконечности отсутствуют.

Обозначим через \mathbf{F}^b и \mathbf{T}^b силу и момент, действующие со стороны жидкости на частицу A^b . Для нахождения скоростей частиц приравняем силу и момент сопротивления, действующие на каждую частицу со стороны жидкости, к сумме всех остальных сил и моментов

$$\mathbf{F}_i^b = -\mathbf{G}_i^b \tag{1.5}$$

$$\mathbf{T}_i^b = -\mathbf{M}_i^b \tag{1.6}$$

где \mathbf{G}^b и \mathbf{M}^b – суммы всех сил и моментов негидродинамического происхождения, действующих на частицу A^b .

2. Общие выражения для скорости и давления. Следуя [3], получим общие выражения для возмущений скорости и давления. Применяя операцию дивергенции к обеим частям уравнения (1.2) и учитывая, что жидкость несжимаемая, получим уравнение для давления

$$\nabla^2 p = 0$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее условию (1.4) на бесконечности, может быть записано в виде

$$p(\mathbf{x}) = H_i L_i(\mathbf{x}) + H_{ij} L_{ij}(\mathbf{x}) + H_{ijk} L_{ijk}(\mathbf{x}) + \dots = \\ = H_{j_1} L_{j_1}(\mathbf{x}) + H_{j_1 j_2} L_{j_1 j_2}(\mathbf{x}) + H_{j_1 j_2 j_3} L_{j_1 j_2 j_3}(\mathbf{x}) + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} H_{j_1 \dots j_k} L_{j_1 \dots j_k}(\mathbf{x})$$

$$L_{j_1 \dots j_k}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x_{j_1}} \dots \frac{\partial}{\partial x_{j_k}} \left(\frac{1}{|\mathbf{x}|} \right)$$

Здесь $H_i, H_{ij}, H_{ijk}, \dots$ – неизвестные тензорные коэффициенты, $L_{j_1 \dots j_k}(\mathbf{x})$ – мультиполь, $|\mathbf{x}|$ – расстояние от центра сферы до точки в жидкости, где берется значение функции.

В случае N частиц решение должно зависеть от расстояний до центров всех сфер

$$p(\mathbf{x}) = \sum_{b=1}^N \sum_{k=1}^{\infty} H_{j_1 \dots j_k}^b L_{j_1 \dots j_k}(\mathbf{x} - \mathbf{r}^b) \quad (2.1)$$

Тогда выражение для скорости имеет вид

$$\eta u_i(\mathbf{x}) = \sum_{b=1}^N \left[-\frac{2}{3} H_i^b L_0(\mathbf{x} - \mathbf{r}^b) - \frac{1}{6} H_{j_1}^b L_{ij_1}(\mathbf{x} - \mathbf{r}^b) \cdot |\mathbf{x} - \mathbf{r}^b|^2 - \frac{3}{5} H_{ij_1}^b L_{j_1}(\mathbf{x} - \mathbf{r}^b) - \right. \\ \left. - \frac{1}{10} H_{j_1 j_2}^b L_{ij_1 j_2}(\mathbf{x} - \mathbf{r}^b) \cdot |\mathbf{x} - \mathbf{r}^b|^2 - \frac{4}{7} H_{ij_1 j_2}^b L_{j_1 j_1}(\mathbf{x} - \mathbf{r}^b) - \right. \\ \left. - \frac{1}{14} H_{j_1 j_2 j_3}^b L_{ij_1 j_2 j_3}(\mathbf{x} - \mathbf{r}^b) \cdot |\mathbf{x} - \mathbf{r}^b|^2 - \dots \right] = \\ = \sum_{b=1}^N \sum_{k=1}^{\infty} \left[-\frac{k+1}{2k+1} H_{ij_1 \dots j_{k-1}}^b L_{j_1 \dots j_{k-1}}(\mathbf{x} - \mathbf{r}^b) - \frac{1}{4k+2} H_{j_1 \dots j_k}^b L_{ij_1 \dots j_k}(\mathbf{x} - \mathbf{r}^b) \cdot |\mathbf{x} - \mathbf{r}^b|^2 \right]$$

Ряды $\sum_{k=1}^{\infty} \dots$ в выражениях (2.1), (2.2) заведомо сходятся для любого конечного числа частиц. Тогда можно подобрать такое μ , что с заданной точностью выполняются следующие приближенные равенства:

$$p(\mathbf{x}) \approx \sum_{b=1}^N \sum_{k=1}^{\mu} H_{j_1 \dots j_k}^b L_{j_1 \dots j_k}(\mathbf{x} - \mathbf{r}^b) \quad (2.3)$$

$$\eta u_i(\mathbf{x}) \approx \sum_{b=1}^N \sum_{k=1}^{\mu} \left[-\frac{k+1}{2k+1} H_{ij_1 \dots j_{k-1}}^b L_{j_1 \dots j_{k-1}}(\mathbf{x} - \mathbf{r}^b) - \right. \\ \left. - \frac{1}{4k+2} H_{j_1 \dots j_k}^b L_{ij_1 \dots j_k}(\mathbf{x} - \mathbf{r}^b) \cdot |\mathbf{x} - \mathbf{r}^b|^2 \right] \quad (2.4)$$

Здесь отметим, что при $\mu \rightarrow \infty$ приближенные равенства (2.3), (2.4) переходят в точные равенства (2.1), (2.2).

Нетрудно доказать, что сила \mathbf{F}^b и момент \mathbf{T}^b , действующие на произвольную частицу со стороны жидкости, вычисляются по формулам

$$F_i^b = 4\pi H_i^b, \quad T_i^b = \frac{12}{5}\pi\epsilon_{ijk}H_{jk}^b$$

Подставляя в уравнения (1.5), (1.6) полученные выражения, приходим к уравнениям

$$4\pi H_i^b + G_i^b = 0 \quad (2.5)$$

$$\frac{12}{5}\pi\epsilon_{ijk}H_{jk}^b + M_i^b = 0 \quad (2.6)$$

Решение для скорости и давления в виде (2.1), (2.2) всегда удовлетворяет уравнениям движения вязкой жидкости (1.1), (1.2). Осталось определить тензорные коэффициенты, исходя из граничных условий (1.3).

3. Алгоритм вычисления тензорных коэффициентов. Рассмотрим случай обтекания единичной твердой сферической частицы в произвольном потоке неограниченной вязкой жидкости. В пространстве задана система координат, начало которой совпадает с центром частицы. Скорость невозмущенного потока задана в виде функции координат

$$U_i(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} D_{ij_2\dots j_k} x_{j_2} \dots x_{j_k}$$

В этом случае уравнения (1.1), (1.2) и граничные условия на бесконечности (1.4) остаются теми же, а граничное условие на поверхности частицы запишется так

$$|\mathbf{x}| = R: u_i(\mathbf{x}) + U_i(\mathbf{x}) = V_i + \Gamma_{ij}x_j$$

Распределения скорости и давления ищем в виде

$$p(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} H_{j_1\dots j_k} L_{j_1\dots j_k}(\mathbf{x})$$

$$\eta u_i(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[-\frac{k+1}{2k+1} H_{ij_1\dots j_{k-1}} L_{j_1\dots j_{k-1}}(\mathbf{x}) - \frac{1}{4k+2} H_{j_1\dots j_k} L_{ij_1\dots j_k}(\mathbf{x}) \cdot |\mathbf{x}|^2 \right]$$

Граничное условие на поверхности частицы запишется так

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}| = R: \sum_{k=1}^{\infty} \left[-\frac{k+1}{2k+1} H_{ij_1\dots j_{k-1}} L_{j_1\dots j_{k-1}}(\mathbf{x}) - \frac{1}{4k+2} H_{j_1\dots j_k} L_{ij_1\dots j_k}(\mathbf{x}) \cdot |\mathbf{x}|^2 \right] = \\ = -\eta U_i(\mathbf{x}) + \eta V_i + \eta \Gamma_{ij}x_j \end{aligned}$$

В случае одной частицы тензорные коэффициенты $H_{i_1}, H_{i_1 i_2}, H_{i_1 i_2 i_3}, \dots$ определяются точно методом неопределенных коэффициентов. Нахождение их в общем случае является довольно сложной задачей.

Для начала рассмотрим более простой случай, когда линейная и угловая скорости частицы равны нулю, а скорость невозмущенного потока задана в виде

$$U_i(\mathbf{x}) = W_{ij_2\dots j_k} x_{j_2} \dots x_{j_k}$$

Описание алгоритма нахождения тензорных коэффициентов разобьем на несколько этапов.

1) Так как жидкость несжимаемая, то при $k \geq 2$

$$\sum_{j=1}^3 W_{jj i_3 \dots i_k} = 0$$

2) Из уравнения Стокса вытекают следующие равенства:

$$\nabla^2 \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} - \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \right) = 0, \quad \nabla^2 \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3} - \frac{\partial U_3}{\partial x_1} \right) = 0, \quad \nabla^2 \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_3} - \frac{\partial U_3}{\partial x_2} \right) = 0$$

Из этих уравнений можно получить, что симметричен тензор

$$B_{i_1 \dots i_{k-2}} = \sum_{j=1}^3 W_{i_1 \dots i_{k-2} j j} \quad (3.1)$$

Тензор $B_{i_1 \dots i_{k-2}}$ вводится в рассмотрение только если $k \geq 3$.

3) Если $k \geq 3$, введем дополнительный тензор $A_{i_1 \dots i_k}$ такой, что

$$\sum_{j=1}^3 A_{j j i_3 \dots i_k} = 0, \quad \sum_{j=1}^3 A_{i_1 \dots i_{k-2} j j} = B_{i_1 \dots i_{k-2}}$$

Этим условиям удовлетворяет

$$A_{i_1 \dots i_k} = a_k (B_{i_1 \dots i_{k-2}} \delta_{i_{k-1} i_k} + \dots) + b_k (B_{i_2 \dots i_{k-1}} \delta_{i_1 i_k} + \dots) \quad (3.2)$$

В этой записи “+...” в первой и второй скобке означает, что осуществляется суммирование по всем $(k-1)!$ перестановкам индексов $i_2 \dots i_k$, индекс i_1 остается на месте. Коэффициенты a_k и b_k определяются по формулам

$$a_k = \frac{k+1}{2(2k^2 - 3k + 1)(k-3)!}, \quad b_k = \frac{1}{(2k^2 - 3k + 1)(k-3)!}$$

4) Если $k < 3$, введем дополнительный тензор $A_{i_1 \dots i_k} = 0$ для того, чтобы дальнейшая запись не зависела от k .

5) Введем дополнительный тензор

$$C_{i_1 \dots i_k} = W_{i_1 \dots i_k} - A_{i_1 \dots i_k} \quad (3.3)$$

Можно доказать, что

$$\sum_{j=1}^3 C_{j j i_3 \dots i_k} = \sum_{j=1}^3 C_{i_1 \dots i_{k-2} j j} = 0$$

6) Введем дополнительный тензор $E_{i_1 \dots i_k}$, который получается из тензора $C_{i_1 \dots i_k}$ в результате его симметризации:

$$E_{i_1 \dots i_k} = \frac{1}{k!} (C_{i_1 \dots i_k} + \dots) \quad (3.4)$$

Здесь запись “+...” означает, что осуществляется суммирование по всем $k!$ перестановкам индексов $i_1 \dots i_k$. Очевидно равенство

$$\sum_{j=1}^3 E_{jji_3 \dots i_k} = \sum_{j=1}^3 E_{i_1 \dots i_{k-2} jj} = 0$$

7) Теперь всего готово для записи решения. Неравные нулю тензорные коэффициенты определяются по формулам

$$H_{i_1 \dots i_{k-2}} = \varphi_k R^{2k-3} \eta B_{i_1 \dots i_{k-2}} \quad (k \geq 3)$$

$$H_{i_1 \dots i_k} = \psi_k R^{2k-1} \eta A_{i_1 \dots i_k} + \tau_k R^{2k-1} \eta C_{i_1 \dots i_k} \quad (3.5)$$

$$H_{i_1 \dots i_{k+2}} = \gamma_k R^{2k+1} \eta (E_{i_1 \dots i_k} \delta_{i_{k+1} i_{k+2}} + \dots)$$

В последней записи “+...” означает, что осуществляется суммирование по всем $(k+2)!$ перестановкам индексов $i_1 \dots i_{k+2}$. Через φ_k , ψ_k , τ_k и γ_k обозначены числовые коэффициенты

$$\varphi_k = \frac{(-1)^k (2-k)}{2(2k-7)!!}, \quad \psi_k = \frac{(-1)^{k+1} (2k+1)(2k-3)}{4(k+1)(2k-5)!!}, \quad \tau_k = \frac{(-1)^{k+1} (2k+1)}{(k+1)(2k-3)!!}$$

$$\gamma_k = \frac{(-1)^k (2k+5)}{4k!(k+1)^2(k+3)(2k-3)!!}$$

Теперь рассмотрим более общий случай, когда линейная и угловая скорости частицы могут быть отличны от нуля, а скорость невозмущенного потока жидкости раскладывается в ряд по координатам

$$U_i(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} D_{ij_2 \dots j_k} x_{j_2} \dots x_{j_k}$$

Тогда граничное условие запишется в виде

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}| = R: \quad & \sum_{k=1}^{\infty} \left[-\frac{k+1}{2k+1} H_{ij_1 \dots j_{k-1}} L_{j_1 \dots j_{k-1}}(\mathbf{x}) - \frac{1}{4k+2} H_{j_1 \dots j_k} L_{ij_1 \dots j_k}(\mathbf{x}) \cdot |\mathbf{x}|^2 \right] = \\ & = -\eta \sum_{k=1}^{\infty} D_{ij_2 \dots j_k} x_{j_2} \dots x_{j_k} + \eta V_i + \eta \Gamma_{ij} x_j \end{aligned} \quad (3.6)$$

Введем обозначение

$$W_{i_1 \dots j_k} = \begin{cases} D_{i_1} - V_{i_1}, & k = 1 \\ D_{i_1 i_2} - \Gamma_{i_1 i_2}, & k = 2 \\ D_{i_1 \dots i_k}, & k \geq 3 \end{cases}$$

Принимая во внимание линейность уравнений движения жидкости и граничных условий по скорости, используя найденное выше решение (3.5) для более простого слу-

чая, можно получить следующую формулу для нахождения тензорных коэффициентов H_{i_1} , $H_{i_1 i_2}$, $H_{i_1 i_2 i_3}$, ... :

$$H_{i_1 \dots i_k} = \varphi_k + 2R^{2k+1} \eta B_{i_1 \dots i_k} + \psi_k R^{2k-1} \eta A_{i_1 \dots i_k} + \tau_k R^{2k-1} \eta C_{i_1 \dots i_k} + \gamma_{k-2} R^{2k-3} \eta (E_{i_1 \dots i_{k-2}} \delta_{i_{k-1} i_k} + \dots) \quad (3.7)$$

Последнее слагаемое (оно записывается, только если $k \geq 3$) включает сумму по всем $k!$ перестановкам индексов i_1, \dots, i_k . Тензоры $B_{i_1 \dots i_k}$, $A_{i_1 \dots i_k}$, $C_{i_1 \dots i_k}$ и $E_{i_1 \dots i_{k-2}}$ находятся по формулам (3.1) – (3.4). Таким образом, по формуле (3.7) можно точно определить все тензорные коэффициенты H_{i_1} , $H_{i_1 i_2}$, $H_{i_1 i_2 i_3}$... для частицы, произвольным образом движущейся в произвольном потоке неограниченной жидкости при малых Re .

4. Преобразование граничных условий на поверхности частицы. С помощью разложения в ряд и алгебраических преобразований можно привести граничное условие (1.3) к виду, подобному граничному условию для случая единичной частицы. При этом будет учтено гидродинамическое взаимодействие частиц друг с другом.

Перепишем граничное условие (1.3) для частицы A^b с учетом приближенного выражения для скорости (2.4)

$$|\mathbf{x} - \mathbf{r}^b| = R^b: \sum_{k=1}^{\mu} \sum_{d=1}^N \left[-\frac{k+1}{2k+1} H_{ij_1 \dots j_{k-1}}^d L_{j_1 \dots j_{k-1}} (\mathbf{x} - \mathbf{r}^d) - \frac{1}{4k+2} H_{j_1 \dots j_k}^d L_{ij_1 \dots j_k} (\mathbf{x} - \mathbf{r}^d) \cdot |\mathbf{x} - \mathbf{r}^d|^2 \right] = -\eta U_i(\mathbf{x}) + \eta V_i^b + \eta \Gamma_{ij}^b (x_j - r_j^b) \quad (4.1)$$

Введем обозначения

$$\mathbf{x}^b = \mathbf{x} - \mathbf{r}^b$$

$$U_i^b(\mathbf{x}^b) = U_i(\mathbf{x}^b + \mathbf{r}^b)$$

$$\mathbf{r}^{db} = \mathbf{r}^b - \mathbf{r}^d$$

Тогда

$$\mathbf{x} - \mathbf{r}^d = \mathbf{x}^b + \mathbf{r}^{db}$$

Используя новые обозначения в (4.1), получим

$$|\mathbf{x}^b| = R^b: \sum_{k=1}^{\mu} \left[-\frac{k+1}{2k+1} H_{ij_1 \dots j_{k-1}}^b L_{j_1 \dots j_{k-1}} (\mathbf{x}^b) - \frac{1}{4k+2} H_{j_1 \dots j_k}^b L_{ij_1 \dots j_k} (\mathbf{x}^b) \cdot |\mathbf{x}^b|^2 \right] + \sum_{k=1}^{\mu} \sum_{\substack{d=1 \dots N \\ d \neq b}} \left[-\frac{k+1}{2k+1} H_{ij_1 \dots j_{k-1}}^d L_{j_1 \dots j_{k-1}} (\mathbf{x}^b + \mathbf{r}^{db}) - \frac{1}{4k+2} H_{j_1 \dots j_k}^d L_{ij_1 \dots j_k} (\mathbf{x}^b + \mathbf{r}^{db}) \cdot |\mathbf{x}^b + \mathbf{r}^{db}|^2 \right] = -\eta U_i^b(\mathbf{x}^b) + \eta V_i^b + \eta \Gamma_{ij}^b x_j^b \quad (4.2)$$

Рассмотрим подробнее вторую сумму по всем частицам, кроме выделенной частицы b . В мультиполях $L_0(\mathbf{x}^b + \mathbf{r}^{db})$, $L_{j_1}(\mathbf{x}^b + \mathbf{r}^{db})$, $L_{j_1 j_2}(\mathbf{x}^b + \mathbf{r}^{db})$, ... вектор \mathbf{r}^{db} постоянен, а вектор \mathbf{x}^b имеет постоянную длину R^b (рассматривается только данное граничное условие). Так как частицы не могут иметь более одной общей точки, для любых частиц A^b и A^d выполнено неравенство $|\mathbf{x}^b| = R^b < |\mathbf{r}^{db}|$. Можно доказать, что при выполнении этого условия верно следующее разложение в ряд:

$$\frac{1}{|\mathbf{x}^b + \mathbf{r}^{db}|} = L_0(\mathbf{x}^b + \mathbf{r}^{db}) = L_0(\mathbf{r}^{db}) + \frac{1}{1!} L_i(\mathbf{r}^{db}) x_i^b + \frac{1}{2!} L_{ij}(\mathbf{r}^{db}) x_i^b x_j^b +$$

$$+ \frac{1}{3!} L_{ijk}(\mathbf{r}^{db}) x_i^b x_j^b x_k^b + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} L_{s_1 \dots s_k}(\mathbf{r}^{db}) x_{s_1}^b \dots x_{s_k}^b$$

С помощью теоремы о почленном дифференцировании функционального ряда и алгебраических преобразований получим разложения

$$L_{j_1 \dots j_{k-1}}(\mathbf{x}^b + \mathbf{r}^{db}) = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{q!} L_{j_1 \dots j_{k-1} s_1 \dots s_q}(\mathbf{r}^{db}) x_{s_1}^b \dots x_{s_q}^b$$

$$L_{ij_1 \dots j_k}(\mathbf{x}^b + \mathbf{r}^{db}) \cdot |\mathbf{x}^b + \mathbf{r}^{db}|^2 = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{q!} M_{s_1 \dots s_q}^{ij_1 \dots j_k}(\mathbf{r}^{db}) x_{s_1}^b \dots x_{s_q}^b \tag{4.3}$$

$$M_{s_1 \dots s_q}^{ij_1 \dots j_k}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x_{s_1}} \dots \frac{\partial}{\partial x_{s_q}} (L_{ij_1 \dots j_k}(\mathbf{x}) \cdot |\mathbf{x}|^2)$$

Все записанные ряды сходятся, причем скорость сходимости зависит от отношения $c = R^b/|\mathbf{r}^{db}|$, чем ближе оно к нулю, тем скорее сходятся ряды.

В дальнейшем будем считать, что суммы всех рядов (4.3) достаточно точно представляются своими первыми ξ членами, причем ξ для всех рядов одно и то же. Тогда для всех $k \geq 1$

$$L_{j_1 \dots j_{k-1}}(\mathbf{x}^b + \mathbf{r}^{db}) \approx \sum_{q=0}^{\xi-1} \frac{1}{q!} L_{j_1 \dots j_{k-1} s_1 \dots s_q}(\mathbf{r}^{db}) x_{s_1}^b \dots x_{s_q}^b$$

$$L_{ij_1 \dots j_k}(\mathbf{x}^b + \mathbf{r}^{db}) \cdot |\mathbf{x}^b + \mathbf{r}^{db}|^2 \approx \sum_{q=0}^{\xi-1} \frac{1}{q!} M_{s_1 \dots s_q}^{ij_1 \dots j_k}(\mathbf{r}^{db}) x_{s_1}^b \dots x_{s_q}^b \tag{4.4}$$

Обозначим через $U^b(\mathbf{x}^b)$ скорость невозмущенного потока в каждой точке пространства, если систему координат привязать к центру частицы A^b . Разложим функцию $U^b(\mathbf{x}^b)$ в ряд вблизи точки $\mathbf{x}^b = 0$ – коэффициенты этого разложения совпадают с коэффициентами разложения $U(\mathbf{x})$ в ряд вблизи точки $\mathbf{x} = \mathbf{r}^b$. Предположим далее, что ряд для $U_i^b(\mathbf{x}^b)$ с достаточной степенью точности представляется первыми ξ членами

$$U_i^b(\mathbf{x}^b) \approx \sum_{k=0}^{\xi-1} U_{ij_1 \dots j_k}^b x_{j_1}^b \dots x_{j_k}^b \tag{4.5}$$

где U_i^b , $U_{ij_1}^b$, $U_{ij_1 j_2}^b$, ... – тензорные коэффициенты, значения которых известны.

Подставляя формулы (4.4), (4.5) в последний вариант граничного условия (4.2) и проведя небольшие преобразования, перепишем граничное условие для частицы A^b в виде

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}^b| = R^b: & \sum_{k=1}^{\mu} \left[\frac{k+1}{2k+1} H_{ij_1 \dots j_{k-1}}^b L_{j_1 \dots j_{k-1}}(\mathbf{x}^b) - \frac{1}{4k+2} H_{j_1 \dots j_k}^d L_{ij_1 \dots j_k}(\mathbf{x}^b) \cdot |\mathbf{x}^b|^2 \right] + \\ & + \sum_{q=0}^{\xi-1} x_{s_1}^b \dots x_{s_q}^b \times \\ & \times \left[\frac{1}{q!} \sum_{\substack{k=1, d=1 \dots N \\ d \neq b}}^{\mu} \left(\frac{k+1}{2k+1} H_{ij_1 \dots j_{k-1}}^b L_{j_1 \dots j_{k-1} s_1 \dots s_q}(\mathbf{r}^{db}) - \frac{1}{4k+2} H_{j_1 \dots j_k}^d M_{s_1 \dots s_q}^{ij_1 \dots j_k}(\mathbf{r}^{db}) \right) \right] = \\ & = -\eta \sum_{q=0}^{\xi-1} U_{is_1 \dots s_q}^b x_{s_1}^b \dots x_{s_q}^b + \eta V_i^b + \eta \Gamma_{ij}^b x_j^b \end{aligned} \quad (4.6)$$

Введем обозначение

$$\begin{aligned} D_{is_1 \dots s_q}^b &= U_{is_1 \dots s_q}^b + \\ & + \frac{1}{\eta q!} \sum_{k=1, d=1 \dots N}^{\mu} \sum_{d \neq b} \left(\frac{k+1}{2k+1} H_{ij_1 \dots j_{k-1}}^d L_{j_1 \dots j_{k-1} s_1 \dots s_q}(\mathbf{r}^{db}) - \frac{1}{4k+2} H_{j_1 \dots j_k}^d M_{s_1 \dots s_q}^{ij_1 \dots j_k}(\mathbf{r}^{db}) \right) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Тогда граничное условие (4.6) записывается в виде

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}^b| = R^b: & \sum_{k=1}^{\mu} \left[\frac{k+1}{2k+1} H_{ij_1 \dots j_{k-1}}^b L_{j_1 \dots j_{k-1}}(\mathbf{x}^b) - \frac{1}{4k+2} H_{j_1 \dots j_k}^b L_{ij_1 \dots j_k}(\mathbf{x}^b) \cdot |\mathbf{x}^b|^2 \right] = \\ & = -\eta \sum_{k=1}^{\xi} D_{ij_2 \dots j_k}^b x_{j_2}^b \dots x_{j_k}^b + \eta V_i^b + \eta \Gamma_{ij}^b x_j^b \end{aligned} \quad (4.8)$$

Сравнивая приближенное граничное условие (4.8) для частицы A^b с граничным условием (3.6) для единичной частицы, находим, что они отличаются лишь тем, что для единичной частицы тензоры D_i , D_{ij_2} , $D_{ij_2 j_3}$, ... были известны заранее, а для частицы A^b они в свою очередь выражаются через тензорные коэффициенты $H_{j_1}^d$, $H_{j_1 j_2}^d$, ... по формуле (4.7). Это позволяет составить систему линейных уравнений для неизвестных тензорных коэффициентов и скоростей частиц.

5. Система уравнений для определения параметров движения. Объединим следующие из ранее записанных уравнений в систему.

1) Уравнение (4.7) позволяет выразить тензоры $D_{i_1}^b$, $D_{i_1 i_2}^b$, ..., $D_{i_1 \dots i_{\xi}}^b$ через тензорные коэффициенты $H_{i_1}^b$, $H_{i_1 i_2}^b$, ..., $H_{i_1 \dots i_{\mu}}^b$.

2) Уравнения (3.1) – (3.4), (3.7) позволяют выразить тензорные коэффициенты $H_{i_1}^b$, $H_{i_1 i_2}^b$, ..., $H_{i_1 \dots i_{\mu}}^b$ через тензоры $D_{i_1}^b$, $D_{i_1 i_2}^b$, ..., $D_{i_1 \dots i_{\xi}}^b$ и скорости частиц V_i^b , ω_i^b .

Таблица 1

ϵ	Точное решение	Метод отражений	$\xi = 6, \mu = 8$
0.50000000	0.64500000	0.64658991	0.64516130
0.44340943	0.65963461	0.65974465	0.65963332
0.32402714	0.70245211	0.70249745	0.70245303
0.21254802	0.76777914	0.76778115	0.76777919
0.13290111	0.83620498	0.83619387	0.83620489
0.08153562	0.89158513	0.89158529	0.89158527
0.04966396	0.93079470	0.93079478	0.93079472
0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000

3) Уравнения (2.5) – (2.6) отражают связь тензорных коэффициентов $H_{i_1}^b, H_{j_1 j_2}^b$ и сил и моментов негидродинамического происхождения.

Полученная система линейных уравнений содержит неизвестные $D_{i_1}^b, D_{i_1 i_2}^b, \dots, D_{i_1 \dots i_\xi}^b, H_{i_1}^b, H_{i_1 i_2}^b, \dots, H_{i_1 \dots i_\mu}^b, V_i^b, \omega_i^b$. Система всегда совместна и имеет единственное решение. Найденное решение будет приближенным; при увеличении ξ и μ точность растет. Однако при увеличении ξ и μ растет и число компонент неизвестных тензоров.

Результаты, полученные данным методом, хорошо согласуются с результатами, полученными методами [3, 4, 6] для двух и трех частиц. В табл. 1 сравниваются результаты для задачи о движении двух одинаковых частиц вдоль линии центров, полученные различными методами. Здесь $\lambda(\epsilon) = F/(6\pi\eta R V)$, F – сила сопротивления, R – радиус частиц, V – скорость частиц, $\epsilon = R/l$, l – расстояние между центрами частиц. Значения $\lambda(\epsilon)$ для метода отражений и точного решения приведены по [6].

Как видно из табл. 1, метод, описанный в настоящей работе, дает хорошее приближение точного решения, причем с лучшей точностью, чем метод отражений.

6. Результаты численного моделирования осаждения частиц. Рассмотрим осаждение конечного числа частиц. Выделим в неограниченной жидкости некоторый ограниченный объем и рассмотрим случай, когда все частицы случайно распределены в этом объеме. Это означает, что каждая частица с равной вероятностью может оказаться в любой точке выделенного объема, если эта точка еще не занята другой частицей. Назовем концентрацией частиц n отношение занимаемого ими объема к выделенному объему. Это не совсем обычная объемная концентрация, так как облако частиц находится в неограниченной жидкости.

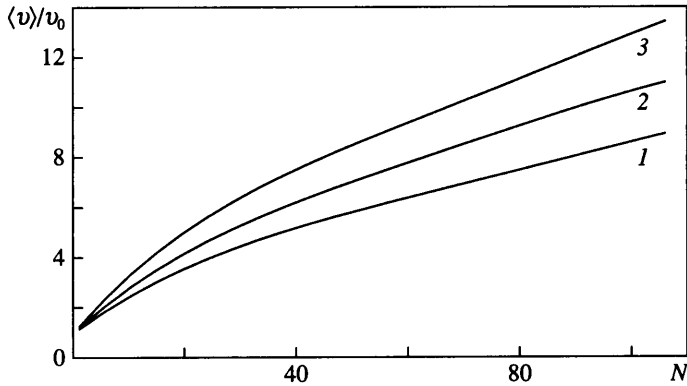
Средняя скорость осаждения частиц в облаке $v = \langle V \rangle$ зависит от концентрации n , от числа частиц в облаке N и от конкретного расположения частиц относительно друг друга – конфигурации облака l_N :

$$v = v(n, N, l_N)$$

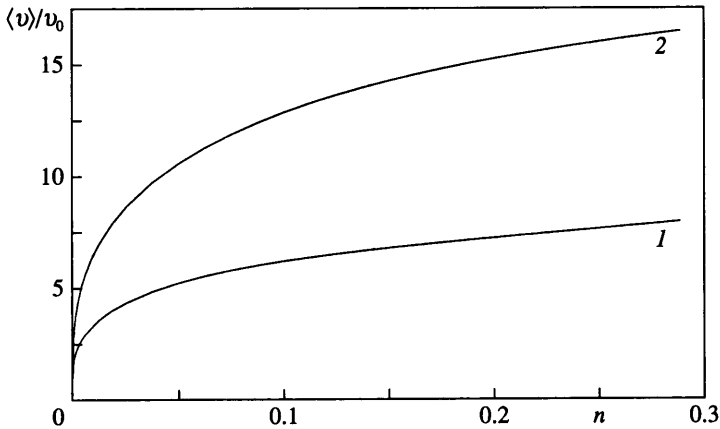
Усредняя эту величину по конфигурациям облака, получим среднюю скорость осаждения $\langle v \rangle$, зависящую только от концентрации и числа частиц

$$\langle v \rangle = \langle v \rangle(n, N)$$

Величина $\langle v \rangle$ уже не зависит от случайной конфигурации облака. Исследуем ее изменение при изменении числа частиц и постоянной концентрации. Исходные данные – численные решения задачи осаждения для различных конфигураций. Результаты рас-



Фиг. 1. Зависимость средней скорости осаждения от числа частиц при постоянной концентрации: 1 – $n = 0.025$, 2 – 0.05 , 3 – 0.1



Фиг. 2. Зависимость средней скорости осаждения от концентрации при постоянном числе частиц: 1 – $N = 30$, 2 – 100

четов для концентраций 0.1, 0.05 и 0.025 приведены на фиг. 1 в координатах N и безразмерной величины $\langle v \rangle / v_0$, где v_0 – скорость одной осаждающейся частицы по закону Стокса. Очевидно, $\langle v \rangle(n, 1) / v_0 = 1$. Остальные точки графика найдены приближенно с помощью численных вычислений.

Поведение функции $\langle v \rangle$ при изменении концентрации и постоянном числе частиц приведено на фиг. 2 для $N = 30$ и 100 . Исходные данные получены аналогично данным для фиг. 1.

Результаты на фиг. 1 и 2 подтверждают вывод [4]: средняя скорость осаждения $\langle v \rangle$ для облака, состоящего из конечного числа частиц, увеличивается с ростом числа частиц и с ростом концентрации. Это вытекает из условия, что с ростом числа частиц уменьшается скалярный коэффициент EA в тензоре $H_i = \eta V_i EA$ [4]. Тензор H_i линейно зависит от скорости частицы V_i . Сумма сил, действующих на частицу, удовлетворяет условию (2.5). Так как при осаждении частиц на них действует сила тяжести, из условия ее постоянства получим, что скорость частицы обратно пропорциональна коэффициенту EA . Отсюда следует, что с ростом числа частиц должна увеличиваться их скорость осаждения. Аналогичный вывод следует и из метода отражений [6]. Однако

Таблица 2

Величина	I	II	III	IV
V_{\min}	0.310	0.350	0.327	0.345
$\langle V \rangle$	0.454	0.444	0.458	0.458
V_{\max}	0.568	0.553	0.560	0.554
σ	0.00277	0.00254	0.00260	0.00264

количественные значения существенно расходятся из-за представления гидродинамического взаимодействия частиц в виде парных взаимодействий.

Кроме средней скорости частиц интерес представляет распределение частиц по скоростям в осаждающемся облаке. В табл. 2 приведены некоторые характеристики четырех случайных конфигураций облака для $n = 0.025$ и $N = 100$. Здесь V_{\min} и V_{\max} – минимальное и максимальное значения, $\langle V \rangle$ и σ – среднее и дисперсия для скоростей осадения частиц облака. Во всех рассмотренных случаях частица, обладающая наибольшей скоростью, находится внутри облака, а частица с наименьшей скоростью – на его краю.

Определим функцию распределения $F(u)$ частиц по скоростям следующим образом: $F(u)$ равна доле частиц, скорость осадения которых меньше u . Графики функций распределения частиц по скоростям для конфигураций I, II, III из табл. 2 изображены на фиг. 3.

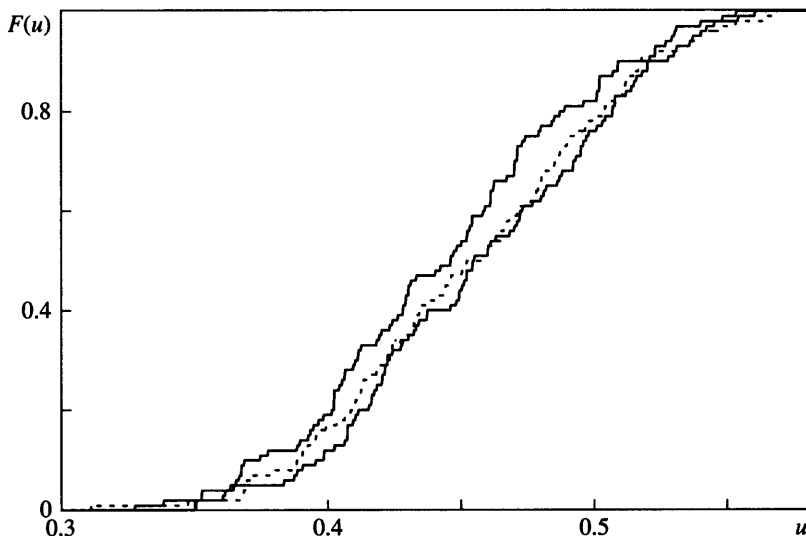
Как видно из табл. 2 и фиг. 3, распределение частиц по скоростям достаточно сильно зависит от конкретной конфигурации облака, однако некоторые общие закономерности все же могут быть выделены. Например, средняя скорость и дисперсия скоростей частиц почти не меняются при изменении концентрации, что и позволяет строить графики, подобные графикам на фиг. 1 или 2.

Полученные результаты по осадению большого числа частиц, образующих облако конечных размеров в бесконечной жидкости, качественно отличаются от результатов, полученных для распределения частиц по всему объему жидкости. Многие теоретические работы, касающиеся определения скорости осадения монодисперсной суспензии, дают зависимость $\langle v \rangle / v_0$ от концентрации n в форме [6]

$$\frac{\langle v \rangle}{v_0} = (1 + \alpha n^\beta)$$

где значения постоянных α , β зависят от структуры суспензии. Значение $\beta = 1$ получено для слабоконцентрированной суспензии случайно расположенных частиц одного размера в [1] с учетом только парных взаимодействий частиц и применимо для $n < 0.05$. Существенно другой результат получается для периодической системы, для которой $\beta = 1/3$ [6]. Условие периодичности позволяет получить решение, учитывающее многочастичное взаимодействие. Однако при этом граничные условия не используются, что позволяет обойти проблему сходимости. В [7] получено выражение для скорости осадения частиц с учетом только парных взаимодействий, однако результат применим для более широкого диапазона концентраций, чем в [1]. Во всех рассмотренных случаях $\alpha < 0$, что приводит к уменьшению скорости оседания частиц с ростом их концентрации.

Заключение. Предложен метод для численного нахождения линейных и угловых скоростей конечного числа сферических частиц в потоке вязкой жидкости, скорость которого представляется в виде многочлена произвольной степени по координатам, с учетом гидродинамического взаимодействия всех частиц между собой. На примере



Фиг. 3. Распределение частиц по скоростям осаждения

точного решения задачи о движении двух частиц вдоль линии, соединяющей их центры, показано, что предложенный метод дает более точное приближение, чем метод отражений. Численно решена задача об осаждении под действием силы тяжести в вязкой жидкости облака частиц, образующих произвольную конфигурацию в пространстве. Получено, что при конечном числе частиц в неограниченной жидкости средняя скорость их осаждения возрастает при росте числа частиц и их концентрации в облаке. Этот результат качественно отличается от результатов по осаждению большого числа частиц, распределенных по всей области, занимаемой жидкостью.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 01-01-00435).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Batchelor G.K.* Sedimentation in a dilute dispersion of spheres // *J. Fluid Mech.* 1972. V. 52. Pt 2. P. 245–268.
2. *Batchelor G.K., Wen C.-S.* Sedimentation in a dilute polydisperse system of interacting spheres. Pt 2. Numerical results // *J. Fluid Mech.* 1982. V. 124. P. 495–528.
3. *Мартынов С.И.* Гидродинамическое взаимодействие частиц // *Изв. РАН. МЖГ.* 1998. № 2. С. 112–119.
4. *Мартынов С.И.* Взаимодействие частиц в течении с параболическим профилем скорости // *Изв. РАН. МЖГ.* 2000. № 1. С. 84–91.
5. *Мартынов С.И.* Течение вязкой жидкости через периодическую решетку сфер // *Изв. РАН. МЖГ.* 2002. № 6. С. 48–54.
6. *Happel J., Brenner H.* *Low Reynolds Number Hydrodynamics.* Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1965. = *Ханпель Д., Бреннер Г.* *Гидродинамика при малых числах Рейнольдса.* М.: Мир, 1976. 630 с.
7. *Brady J.F., Durlofsky L.J.* The sedimentation rate of disordered suspensions // *Phys. Fluids.* 1988. V. 31. № 4. P. 717–727.