

УДК 532.516

© 2004 г. Л. Д. АКУЛЕНКО, Д. В. ГЕОРГИЕВСКИЙ, С. А. КУМАКШЕВ

РЕГУЛЯРНО ПРОДОЛЖАЕМЫЕ ПО ЧИСЛУ РЕЙНОЛЬДСА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДЖЕФФРИ–ГАМЕЛЯ

Аналитическими и численными методами исследована задача о стационарном течении вязкой жидкости в конфузоре для малых, умеренно больших и асимптотически больших чисел Рейнольдса во всем допустимом диапазоне углов раствора. Основное внимание уделено регулярно продолжаемым решениям задачи, для построения которых разработана высокоточная численно-аналитическая процедура метода ускоренной сходимости и продолжения по параметру. При достаточно больших углах установлено существование трехмодовых симметричных относительно биссектрисы режимов, содержащих участки стока и истока. Изучена эволюция профилей скорости при неограниченном увеличении числа Рейнольдса. Исследованы также режимы течения для критического угла раствора, не допускающие регулярного продолжения по параметру. Установлен и прокомментирован ряд новых гидромеханических эффектов.

Ключевые слова: конфузор, задача Джеффри–Гамеля, вязкая жидкость, стационарное течение.

1. Постановка классической задачи Джеффри–Гамеля и вводные замечания. Опишем весьма кратко постановку задачи и современное состояние численных и аналитических результатов в задаче Джеффри–Гамеля о стационарном радиальном течении вязкой несжимаемой жидкости в плоском конфузоре [1, 2]. Это одна из немногих одномерных задач гидродинамики ньютоновской жидкости, допускающая точное автоматическое решение, поэтому полное исследование во всей области изменения безразмерных параметров – угла раствора конфузора и числа Рейнольдса – представляет большой теоретический и прикладной интерес. Численный анализ проводится на основе предложенного авторами модифицированного метода ускоренной сходимости.

Рассмотрим стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости в области $\Omega = \{(r, \theta): r > 0, |\theta| < \beta\}$ (фиг. 1), имеющее особенность типа источник–сток мощности Q в точке O . В зависимости от знака Q область Ω называется плоским диффузором ($Q < 0$) или плоским конфузуром ($Q > 0$). Жидкость характеризуется плотностью ρ и динамической вязкостью μ ; на стенках выполняются условия прилипания (см. ниже).

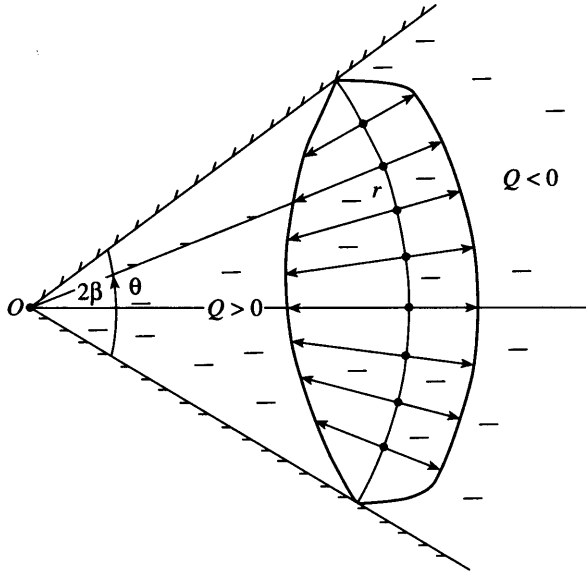
Кроме четырёх величин β, Q, ρ, μ других характерных параметров в задаче нет. Поскольку из данной совокупности невозможно выбрать три размерно независимые величины, так как $[Q] = [\mu]/[\rho]$, полностью обезразмерить последующие уравнения не удается. Имеются два безразмерных параметра – угол раствора $2\beta (0 < \beta < \pi)$ и число Рейнольдса $Re = \rho Q/\mu (-\infty < Re < \infty)$, – от которых будет зависеть решение.

В плоском случае решение, описывающее данное течение, можно искать в автоматическом виде. Поле скорости $\mathbf{v} = (v_r, v_\theta)$ радиально:

$$v_r = -\frac{Q}{r}V(\theta), \quad v_\theta \equiv 0 \quad (1.1)$$

Представление (1.1) обеспечивает выполнение условия несжимаемости. По кинематике (1.1) выписываются отличные от нуля компоненты тензора скоростей деформации

$$v_{rr} = -v_{\theta\theta} = \frac{Q}{r^2}V(\theta), \quad v_{r\theta} = -\frac{Q}{2r^2}V'(\theta) \quad (1.2)$$



Фиг. 1. Характерные профили радиальной скорости при движении вязкой жидкости в конфузоре ($Q > 0$) и диффузоре ($Q < 0$)

Подставляя (1.2) в определяющие соотношения вязкой жидкости

$$\sigma_{\alpha\beta} \equiv -p\delta_{\alpha\beta} + s_{\alpha\beta} = -p\delta_{\alpha\beta} + \frac{2\rho Q}{\text{Re}} v_{\alpha\beta} \quad (1.3)$$

находим поле напряжений

$$\sigma_{rr; \theta\theta} = -p \pm \frac{2\rho Q^2}{r^2 \text{Re}} V(\theta), \quad \sigma_{zz} = -p, \quad \sigma_{r\theta} = -\frac{\rho Q^2}{r^2 \text{Re}} V'(\theta) \quad (1.4)$$

Проекция уравнения Навье–Стокса на радиус и угол с учетом (1.1), (1.4) приводят к обыкновенному дифференциальному уравнению относительно безразмерной функции $V(\theta)$ и выражению для давления p :

$$V'' + 4V - \text{Re}V^2 = C \quad (1.5)$$

$$p = \frac{\rho Q^2}{2r^2 \text{Re}} (C - 4V) \quad (1.6)$$

Из условий прилипания материала на границе Ω следуют равенства

$$V(\pm\beta) = 0, \quad C = V''(\pm\beta) \quad (1.7)$$

Интегральное условие постоянства расхода

$$\int_{-\beta}^{\beta} V(\theta) d\theta = 1 \quad (1.8)$$

служит для определения C .

В результате решения краевой задачи (1.5), (1.7), (1.8) могут быть найдены силовые характеристики течения. Компоненты P_r и P_θ вектора напряжений \mathbf{P} в любой точке дуги окружности $r = \text{const}$, $|\theta| < \beta$, согласно (1.4), (1.6), имеют вид

$$P_r(r, \theta) = \sigma_{rr}(r, \theta) = \frac{\rho Q^2}{r^2 \text{Re}} \left(4V(\theta) - \frac{C}{2} \right) \quad (1.9)$$

$$P_\theta(r, \theta) = \sigma_{r\theta}(r, \theta) = -\frac{\rho Q^2}{r^2 \text{Re}} V'(\theta)$$

Компоненты F_r и F_θ суммарной силы \mathbf{F} (точнее, её плотности вдоль оси z) с учётом выражений (1.9) на расстоянии r равны

$$F_r(r) = \int_{-\beta}^{\beta} r P_r d\theta = \frac{\rho Q^2}{r \text{Re}} (4 - \beta C), \quad F_\theta(r) = \int_{-\beta}^{\beta} r P_\theta d\theta \equiv 0 \quad (1.10)$$

т.е. выражаются через постоянную C .

Аналогично (1.10) вычислим плотность мощности N сил, обусловленных напряжением \mathbf{P} :

$$N = \int_{-\beta}^{\beta} r \sigma_{rr} v_r d\theta = -\frac{\rho Q^3}{r^2 \text{Re}} \int_{-\beta}^{\beta} \left(4V^2 - \frac{CV}{2} \right) d\theta = -\frac{\rho Q^3}{r^2 \text{Re}} \int_{-\beta}^{\beta} \left(\frac{4}{\text{Re}} (V'' + 4V - C) - \frac{CV}{2} \right) d\theta =$$

$$= \frac{\rho Q^3}{r^2 \text{Re}} \left(\frac{C}{2} - \frac{4}{\text{Re}} (V(\beta) - V(-\beta) + 4 - 2\beta C) \right) \quad (1.11)$$

Аналитическому изучению задачи (1.5), (1.7), (1.8) посвящена обширная специальная и учебная литература по гидродинамике [3–8]. Иногда под термином “задача Джеффри–Гамеля” подразумеваются некоторые другие постановки. В частности [9], интегральное условие (1.8) заменяется дополнительным “локальным” условием $V(0) = 1$, т.е. задается не расход, а скорость на оси диффузора–конфузора. Это существенно меняет аналитико-численное исследование задачи и свойства решения, и ниже останавливаться на них не будем.

Уравнение (1.5) допускает понижение порядка после домножения на V' и выделения полных производных:

$$\frac{V'^2}{2} + 2V^2 - \text{Re} \frac{V^3}{3} - CV = \frac{V'^2(\mp\beta)}{2} \quad (1.12)$$

Классические результаты связаны с интегрированием в эллиптических функциях уравнения (1.12) [4, 6]. Анализ получающихся эллиптических интегралов, зависящих от нескольких параметров, а также корней системы двух трансцендентных уравнений относительно двух постоянных интегрирования затруднен. Построить явное решение краевой задачи с условием постоянства расхода для произвольных β , Re не удастся.

Считалось, что диффузорное течение ($\text{Re} < 0$) является более сложным и многообразным, чем конфузорное ($\text{Re} > 0$). Для него были известны как несимметричные относительно оси $\theta = 0$ профили скорости, так и многомодовые режимы. Под многомодовостью здесь и далее понимается чередование секторов вытекания и стока жидкости. Наличие многомодовых и несимметричных течений наряду с всегда существующим одномодовым симметричным свидетельствует о неединственности решения нелинейной краевой задачи Джеффри–Гамеля с условием постоянства расхода. Некоторые теоремы о единственности классического одномодового профиля при асимптотически малых числах Рейнольдса доказаны в [10].

Стационарное течение вязкой жидкости в диффузоре при достаточно больших числах Re теряет устойчивость [11], что приводит к наступлению турбулентности.

Как несимметрия, так и многомодовость профиля скорости не были установлены в классической литературе для конфузорного течения. Остался открытым вопрос о возможности таких профилей (фактически о единственности конфузорного течения) и о свойствах соответствующих решений.

На основе модифицированного численно-аналитического метода ускоренной сходимости [12, 13] авторами проведено исследование одно- и многомодовых конфузорных течений в широком диапазоне параметров β и Re [14–18].

Краевая задача (1.5), (1.7), (1.8) может быть записана в терминах безразмерной функции y от безразмерной переменной x :

$$y = 2\beta V, \quad x = 1/2(\theta/\beta + 1), \quad 0 < x < 1 \quad (1.13)$$

Имеем постановку классической задачи Джеффри–Гамеля в переменных x, y с параметрами a, b и неизвестной постоянной λ

$$y'' + a^2 y - by^2 = \lambda, \quad a = 4\beta, \quad b = 2\beta Re \quad (1.14)$$

$$y(0) = y(1) = 0, \quad \int_0^1 y(x) dx = 1 \quad (1.15)$$

Постоянные $\lambda = 8\beta^3 C = y''(0) = y''(1)$ и $\gamma = y'(0)$ неизвестны и подлежат определению при заданной паре параметров a и b . От λ можно избавиться дифференцированием, однако в результате получается нелинейное уравнение третьего порядка.

Введём также функцию $z(x)$, характеризующую расход жидкости согласно (1.15):

$$z' = y - 1, \quad z(0) = z(1) = 0 \quad (1.16)$$

Из (1.6) следует, что давление p связано с $y(x)$ линейным соотношением

$$p(r, \theta) = \frac{2\rho Q^2 \lambda - a^2 y}{r^2 a^2 b} \quad (1.17)$$

Из (1.17) видно, что при $b \rightarrow 0$ ($Re \rightarrow 0$) давление становится неограниченным и имеет место особенность, хотя решение задачи (1.14), (1.15) может быть регулярным. Кроме того, для обеспечения радиальности движения давление на любом расстоянии r должно определенным и заранее неизвестным образом зависеть от угла θ .

2. Аналитические и асимптотические разложения и интегральные оценки. Приведем аналитические выражения $y(x)$ для различных значений параметров a и b (β и Re).

Случай $0 < Re \ll 1$ реализуется при медленном движении очень вязкого материала в различных технологических приложениях (вытяжка металлического листа, выдавливание пластических масс и др.). Решение $y(x)$ задачи (1.14), (1.15) для произвольных углов β может быть найдено в виде разложения по степеням параметра b при конечном a

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n y_n(x), \quad \lambda = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \lambda_n \quad (2.1)$$

и удерживания нескольких первых членов ряда (2.1). В частности, имеем [4]

$$y_0(x) = \frac{2\beta}{D} [\cos(2\beta(2x-1)) - \cos 2\beta] \equiv \frac{1}{1 - (2/a)\text{tg}(a/2)} \left(1 - \cos ax - \text{tg} \frac{a}{2} \sin ax \right) \quad (2.2)$$

$$D = \sin 2\beta - 2\beta \cos 2\beta, \quad \lambda_0 = -\frac{32\beta^3}{D} \cos 2\beta, \quad \gamma_0 = \frac{8\beta^2}{D} \sin 2\beta$$

Нулевое приближение (2.2) теряет смысл при $D = 0$, т.е. при значениях β , являющихся корнями уравнения $\operatorname{tg} 2\beta = 2\beta$. Наименьший положительный корень этого уравнения $\beta = \beta^* \approx 2.247$ соответствует вполне определенному конфузору с развернутым углом раствора (см. разд. 3).

Для последующих приближений $y_n(x)$, $n \geq 1$ могут быть поставлены линейные краевые задачи вида

$$y_n'' + a^2 y_n = \lambda_n + F_n(y_0, y_1, \dots, y_{n-1}), \quad \beta \neq \beta^* \tag{2.3}$$

$$y_n(0) = y_n(1) = 0, \quad \int_0^1 y_n(x) dx = 0$$

с неизвестными постоянными $\lambda_n = y_n''(0) = y_n''(1)$ и с известной функцией F_n . Так, например, $F_1(y_0) = y_0^2$. Вычисления при $n \geq 1$ становятся громоздкими [14] и при $b \sim 1$ иррациональными из-за низкой точности.

Случай $0 < \beta \ll 1$, $0 < \operatorname{Re} \sim 1$ или $0 < a \ll 1$, $0 < b \ll 1$ соответствует почти параллельным стенкам конфузора. В краевой задаче (1.14)–(1.16) асимптотические регулярные разложения по степеням β

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n y_n(x), \quad \lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n \lambda_n \tag{2.4}$$

приводят к аппроксимации решения многочленами по x :

$$y_0(x) = 6x(1-x), \quad y_1(x) = \frac{6\operatorname{Re}}{35} x(14x^5 - 42x^4 + 35x^3 - 9x + 2) \tag{2.5}$$

$$\lambda_0 = -12, \quad \lambda_1 = -\frac{108}{35} \operatorname{Re}$$

Профиль $y_0(x)$ в (2.5) условно отвечает течению Пуазейля между двумя параллельными плоскостями. Степень каждого многочлена $y_n(x)$ нарастает довольно быстро и равна $4n + 2$.

Случай $\operatorname{Re} \gg 1$, $\beta \sim 1$ формально означает предельный переход к идеальной жидкости. При $\operatorname{Re} = \infty$ имеет место разрывное в граничных точках решение

$$y_{\infty}(x) \equiv 1, \quad 0 < x < 1, \quad y_{\infty}(0) = y_{\infty}(1) = 0 \tag{2.6}$$

Наличие малого параметра $1/b$ при старшей производной в уравнении (1.14) требует привлечения сингулярных асимптотических методов [19, 20]. В первом по $1/b$ приближении решение может быть представлено формулой Н.Е. Кочина [4, 21]

$$y(x) = 1 - \frac{6}{1 + \operatorname{ch}[\operatorname{arch} 5 + \sqrt{b/2}(1 - |2x - 1|)]}, \quad \gamma(b) = \sqrt{\frac{4b}{3}}, \quad \lambda(b) = -b \tag{2.7}$$

Данная формула приводит к удовлетворительной точности уже при $b \sim 10^3 - 10^4$.

Пусть $0 < \beta \ll 1$, но $b \sim 1$, что соответствует течению с большими числами Рейнольдса между почти параллельными стенками. В нулевом приближении левая часть уравнения (1.14) не содержит члена $a^2 y$. Однако интегрирование получающейся краевой задачи, как и в общем случае, приводит к эллиптическим функциям. Некоторое упрощение состоит лишь в том, что решение зависит от одного параметра b .

Все функции (2.2), (2.5), (2.7) симметричны относительно середины отрезка $x = 1/2$, т.е. биссектрисы угла раствора $\theta = 0$. Краевая задача (1.14)–(1.16) эквивалентна изопериметрической вариационной задаче

$$\frac{1}{2} \int_0^1 (y^2 - a^2 y^2 + \frac{2}{3} b y^3) dx \rightarrow \min, \quad y(0) = y(1) = 0, \quad \int_0^1 y(x) dx = 1 \quad (2.8)$$

На основе (2.8) могут быть построены интегральные оценки $y(x)$, λ и γ . Для любой функции $f(x) \in C^1 [0; 1]$ справедливо равенство

$$\int_{x_1}^{x_2} (y'' + a^2 y - b y^2) f' dx = \lambda (f(x_2) - f(x_1)) \quad (2.9)$$

где $0 \leq x_1 < x_2 \leq 1$. Выберем в качестве x_1 и x_2 произвольные различные корни $y(x)$:

$$y(x_1) = y(x_2) = 0 \quad (2.10)$$

Таковые заведомо существуют; в частности, можно взять $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

Пусть $f(x) = y(x)$, тогда после интегрирования (2.9) по частям с учётом (2.10) получим

$$y'(x_2) = \pm y'(x_1) \quad (2.11)$$

Если $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, то нижний знак в (2.11) соответствует классическому одномодовому режиму (или нечетномодовому [15]), а верхний – несимметричному четномодовому режиму [15]. Условие $y'(1) = y'(0)$ влечёт за собой возможность многомодовости и несимметричности профиля скорости $y(x)$ относительно $x = 1/2$.

Пусть $f' = y$, $f(0) = 0$, тогда с учётом неравенства Фридрикса [22]

$$\int_{x_1}^{x_2} y'^2 dx \geq \frac{\pi^2}{(x_2 - x_1)^2} \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx \quad (2.12)$$

из (2.9) имеем верхнюю оценку параметра λ :

$$\lambda \int_{x_1}^{x_2} y dx = \int_{x_1}^{x_2} (-y^2 + a^2 y^2 - b y^3) dx \leq \left(a^2 - \frac{\pi^2}{(x_2 - x_1)^2} \right) \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx - b \int_{x_1}^{x_2} y^3 dx \quad (2.13)$$

Оценка (2.13) оказывается весьма точной для случая одномодового течения ($x_1 = 0$, $x_2 = 1$).

Пусть $f = y'$, тогда, интегрируя (2.9) по частям, запишем равенство

$$n \lambda y'(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} (y''^2 - a^2 y'^2 + 2 b y y') dx \quad (2.14)$$

где $n = 0$ для функций $y(x)$, у которых в (2.11) следует выбрать верхний знак, и $n = -2$, если нижний. При $n = 0$, т.е. для функций с граничными условиями

$$y^{(m)}(x_1) = y^{(m)}(x_2), \quad m = 0, 1, 2 \quad (2.15)$$

справедливо ещё одно неравенство Фридрикса

$$\int_{x_1}^{x_2} y''^2 dx \geq \frac{4\pi^2}{(x_2 - x_1)^2} \int_{x_1}^{x_2} y'^2 dx$$

Из него и (2.14) следует оценка

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{4\pi^2}{(x_2 - x_1)^2} - a^2 + 2by \right] y'^2 dx \leq 0 \quad (2.16)$$

Для некоторых значений x_1, x_2, a, b равенство в оценке (2.16) достигается; например при $x_1 = 0, x_2 = 1, a = 2\pi, b = 0$ (условия (2.15) выполнены).

3. Численно-аналитическое исследование задачи Джеффри–Гамеля. Для весьма важных в прикладном аспекте значений угла $\beta \sim 0.1 - 1$ и чисел Рейнольдса $Re \sim 0.1 - 10^3$ ($b \sim 10^{-2} - 10^3$) применение формул (2.2), (2.5), (2.7) приводит к недопустимо большим погрешностям. Эти выражения могут служить в качестве оценок или начальных приближений при использовании высокоточных вычислительных процедур, поэтому необходима разработка эффективных численно-аналитических подходов к решению задачи (1.14)–(1.16).

Предлагается модифицированный метод ускоренной сходимости типа метода Ньютона [12–14] в сочетании с процедурой продолжения по параметрам. Он позволяет за одну-две итерации посредством относительно небольших вычислительных затрат получать высокоточные значения искомых величин. В результате получается практически точное решение с относительной погрешностью $10^{-5} - 10^{-7}$, которая может быть при необходимости уменьшена. Алгоритм метода заключается в вычислении неизвестных значений $\gamma = y'(0)$ и $\lambda = y''(0)$, для определения функции $y(x)$ как решения задачи Коши (1.14)–(1.16) для фиксированных a, b , т.е. β, Re .

На начальном этапе алгоритма предполагаются известными достаточно точные оценки γ_0, λ_0 указанных величин γ, λ . Они могут быть найдены с помощью вариационного подхода на основе функционалов (2.8) и удачно подобранной пробной функции $y_0(x)$ [12–14]. Как показывают расчеты, функция $y(x, a, b)$ имеет довольно простой вид. Применяется процедура продолжения по параметрам a, b (или β, Re): для фиксированного значения $a = 4\beta > 0$ берутся γ_0, λ_0 как начальные приближения $\gamma_0(b_1), \lambda_0(b_1)$ при достаточно малом $b_1 > 0$. Посредством рекуррентного алгоритма ускоренной сходимости с требуемой точностью определяются $\gamma_1 = \gamma(b_1), \lambda_1 = \lambda(b_1)$, которые принимаются в качестве начальных приближений $\gamma_0(b_2), \lambda_0(b_2)$ для $b_2 > b_1$, и т.д.

Итерационный алгоритм уточнения искомых величин $\gamma(b), \lambda(b)$ на первом и последующих шагах заключается в интегрировании задач Коши, которые описываются общими уравнениями для y, z (1.14)–(1.16) с условиями

$$y(0) = z(0) = 0, \quad y'(0) = \gamma_n(b), \quad \lambda = \lambda_n(b), \quad n = 0, 1, \dots, \quad b \in \{b_k\} \quad (3.1)$$

и уравнениями для функций чувствительности v, w и u, s , т.е. производных решения $y(x), z(x)$ по γ и λ соответственно

$$v'' + a^2 v - 2byv = 0, \quad w' = v, \quad v(0) = w(0) = 0, \quad v'(0) = 1 \quad (3.2)$$

$$u'' + a^2 u - 2byu = 1, \quad s' = u, \quad u(0) = u'(0) = s(0) = 0$$

Задачи Коши (1.14)–(1.16), (3.1) и (3.2) интегрируются совместно или порознь и определяются функции $y_n(x), z_n(x)$. Для уточнения величин $\gamma_n(b), \lambda_n(b)$, требуется знание функций $y_n, z_n, v_n, w_n, u_n, s_n$ в конечной точке $x = 1$ при $b \in \{b_k\}$. Стандартная схема метода Ньютона имеет вид

$$\gamma_{n+1}(b) = \gamma_n(b) + \delta\gamma_n(b), \quad \lambda_{n+1}(b) = \lambda_n(b) + \delta\lambda_n(b)$$

$$\delta\gamma_n = -[y_n(1)s_n(1) - z_n(1)u_n(1)]\Delta_n^{-1}(1) \quad (3.3)$$

$$\delta\lambda_n = [y_n(1)w_n(1) - z_n(1)v_n(1)]\Delta_n^{-1}(1), \quad n = 0, 1, \dots$$

$$\Delta_n(x) = v_n(x)s_n(x) - u_n(x)w_n(x), \quad \Delta_n(1) \neq 0$$

Рекуррентный процесс по n (3.1)–(3.3) продолжается до достижения требуемой точности, т.е. достаточной малости невязок $y_n(1)$, $z_n(1)$. Специфической особенностью предложенной модификации метода ускоренной сходимости является дополнительная проверка сходимости процесса по абсциссам ξ_n , η_n , т.е. по величинам $|\varepsilon_n|$, $|\mu_n|$

$$\varepsilon_n = 1 - \xi_n, \quad \mu_n = 1 - \eta_n; \quad \xi_n = \arg y_n(x), \quad \eta_n = \arg z_n(x) \quad (3.4)$$

Значения ξ_n , η_n суть ближайшие к $x = 1$ корни (нули) функций $y_n(x)$, $z_n(x)$. Конструктивно проверяемые условия $|\varepsilon_0|, |\mu_0| \ll 1$, $|\varepsilon_n|, |\mu_n| \rightarrow 0$ свидетельствуют о существовании искомого решения краевой задачи (1.14)–(1.16) и о сходимости алгоритма (3.1)–(3.3), имеющего ускоренный (квадратичный) характер, при этом

$$y_n(1) = -\gamma_n \varepsilon_n, \quad |\varepsilon_{n+1}| \sim \varepsilon_n^2, \quad |\mu_{n+1}| \sim \mu_n^2, \quad z_n(1) = -\mu_n, \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.5)$$

Заметное нарушение характера оценок (3.4), (3.5) требует дополнительного анализа, обычно связанного со свойством вырождения стандартного алгоритма: $\Delta_n(1) \approx 0$ (например, при $b \rightarrow \infty$). Совместное определение невязок $y_n(1)$, $z_n(1)$ и ε_n , μ_n позволяет проводить эффективные высокоточные вычисления искомых параметров $\gamma(b)$, $\lambda(b)$ для произвольного фиксированного значения $0 < \beta \leq \pi$. Аналогично реализуется процедура продолжения по параметру β , $\beta \in \{\beta_j\}$. При необходимости могут быть построены зависимости $\gamma(\beta, \text{Re})$, $\lambda(\beta, \text{Re})$ продолжением по β , Re ($0 < \beta \leq \pi$; $0 \leq \text{Re} \leq \text{Re}^* < \infty$).

Приведем высокоточные решения задачи Джеффри–Гамеля, построенные с помощью метода ускоренной (квадратичной) сходимости.

Изложенный выше алгоритм метода ускоренной сходимости позволяет сравнительно просто строить решения задачи Джеффри–Гамеля, допускающие регулярное неограниченное продолжение по параметру b ($0 < b < \infty$), т.е. числу Рейнольдса $\text{Re} > 0$. В качестве начальной точки принимается значение $b = 0$, для которой решение имеет вид (2.2) и зависит также от параметра a , т.е. от угла β . Функция $y_0(x)$ является гладкой по аргументу x ($0 \leq x \leq 1$) при всех $0 < \beta \leq \pi$, кроме $\beta = \beta^*$:

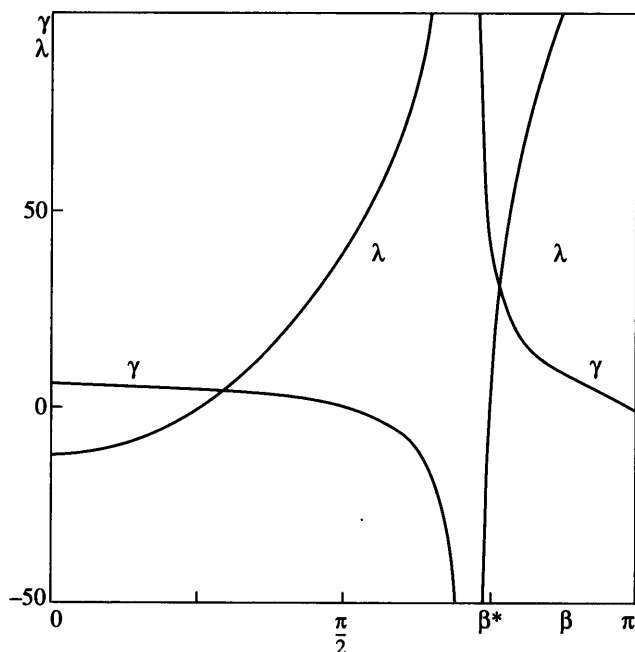
$$\beta^* = \arg D(\beta) \approx 2.2467047 \approx (128.7)^\circ \quad (3.6)$$

для которого знаменатель D в (2.2) обращается в нуль, при этом β^* не зависит от аргумента x .

Случай сингулярности решения при $b \rightarrow 0$, $a \rightarrow a^* = 4\beta^*$ требует отдельного численного анализа, отличного от исследований в ситуации регулярной зависимости для всех $b \geq 0$, $a \neq a^*$. Ниже проводится исследование течений для полного диапазона углов раствора $0 < 2\beta \leq 2\pi$, в том числе изучение течений для так называемых “экзотических” значений $\beta = \pi/2$, π . Случаю $\beta = \pi/2$ отвечает течение в полупространстве со щелью-стокком, а $\beta = \pi$ – во всем пространстве с неподвижными предельно близкими полуплоскостями, между которыми осуществляется сток жидкости.

В научной литературе обычно изучался диапазон малых углов $\beta \sim 5^\circ - 10^\circ$, имеющий важные технологические приложения. Исследование течений при больших значениях β представляет естественно-научный интерес. Заметим, что увеличение угла между стенками конфузора приводит к кардинальной перестройке профиля скорости $y(x)$ и новым качественным эффектам.

Предлагаемый подход к исследованию течения связан с нахождением неизвестных значений параметров $\gamma(b) = y'(0)$, $\lambda(b) = y''(0)$, которые будут также зависеть от фиксированной величины a , т.е. угла β . При $b = 0$ указанные параметры имеют вид $\gamma(0) = \gamma_0(\beta)$, $\lambda(0) = \lambda_0(\beta)$ (см. (2.2)). Для наглядности дальнейших построений эти кривые представлены на фиг. 2. При $\beta = \beta^*$ (3.6) они претерпевают разрыв второго рода. Для $b = 0$, $a = a^*$ линейная краевая задача не имеет решения и соответствующее решение для $b > 0$ не может быть построено методом регулярных возмущений или с помощью процедуры продолжения по параметру.



Фиг. 2. Зависимости параметров $\gamma_0(\beta)$, $\lambda_0(\beta)$ от угла полураствора конфузора β при $b = 2\beta Re = 0$

Хотя критическое значение $\beta = \beta^*$ соответствует реальному конфузору (с углом раствора бóльшим развернутого; $3\pi/2 > 2\beta \approx 4.5 > \pi$), невозможность стационарного течения вполне объяснима предельной ситуацией $Re \rightarrow 0$; при возрастании $Re > 0$ свойство сингулярности исчезает. То обстоятельство, что оно не проявляется при $\beta \neq \beta^*$ для $Re = 0$, следует принять как математический результат. Нерегулярность профиля течения $y(x)$ и его производных $\gamma(b)$, $\lambda(b)$ при $x = 0$ для $\beta = \beta^*$ и $b \rightarrow 0$ является гидромеханическим эффектом, подлежащим теоретическому исследованию и экспериментальной проверке.

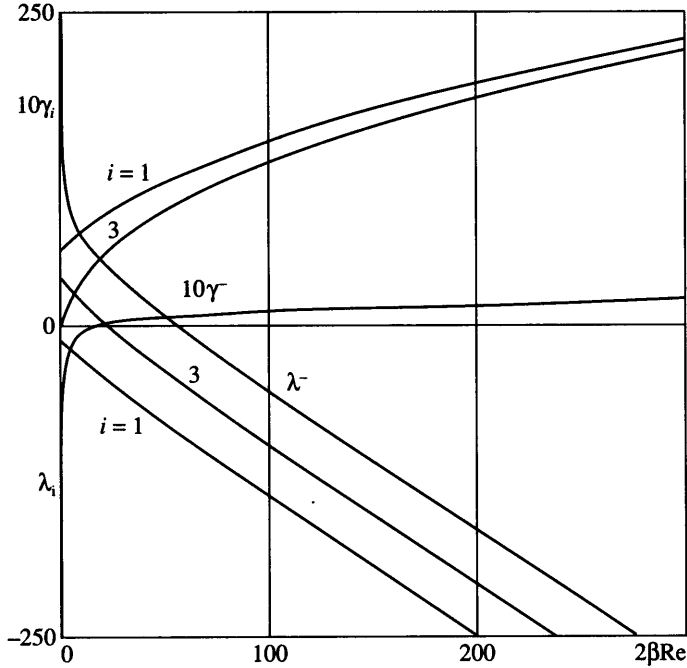
С помощью функций $\gamma_0(\beta)$, $\lambda_0(\beta)$ (фиг. 2) весь интервал $0 < \beta \leq \pi$ разбивается на пять качественно различных подинтервалов, отвечающих сменам знаков этих функций:

$$\begin{aligned}
 &1) \ 0 < \beta \leq \frac{\pi}{4}, \quad 2) \ \frac{\pi}{4} < \beta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 3) \ \frac{\pi}{2} \leq \beta < \beta^* \\
 &4) \ \beta^* < \beta \leq \frac{3\pi}{4}, \quad 5) \ \frac{3\pi}{4} < \beta \leq \pi
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Области (3.7) приводят к различным профилям скорости $y_0(x)$ и режимам течения $y(x)$ при достаточно малых значениях $b \geq 0$.

На фиг. 3, 4 представлены величины $\gamma_i(b)$ и $\lambda_i(b)$ для характерных возрастающих углов полураствора β_i из областей (3.7) и умеренно больших значений параметра b : $0 \leq b \leq 300$. Для определенности были рассмотрены значения

$$\begin{aligned}
 \beta_1 &= \frac{\pi}{180} = 1^\circ, \quad \beta_2 = \frac{\pi}{4} = 45^\circ, \quad \beta_3 = \frac{\pi}{2} = 90^\circ \\
 \beta_4 &= \beta^- = 2.2 \approx (126.2)^\circ, \quad \beta_5 = \beta^+ = 2.3 \approx (131.6)^\circ \\
 \beta_6 &= \frac{3\pi}{4} = 135^\circ, \quad \beta_7 = 2.88 \approx 165^\circ, \quad \beta_8 = \pi = 180^\circ
 \end{aligned} \tag{3.8}$$



Фиг. 3. Зависимости параметров $\gamma_i(b)$, $\lambda_i(b)$ и $\gamma^-(b)$, $\lambda^-(b)$ для $\beta_1 = 1^\circ$, $\beta_3 = 90^\circ$ и $\beta = \beta^*$ ($b = 2\beta Re$). Переменные γ_i , γ^- представлены в увеличенном масштабе ($10\gamma_i$, $10\gamma^-$)

Их выбор соответствует разбиению (3.7) и комментируется ниже при анализе режимов течения. Чтобы не загромождать графическое представление семейства (3.8), кривые для $i = 2, 4$ (фиг. 3) и $i = 5, 7$ (фиг. 4) не представлены.

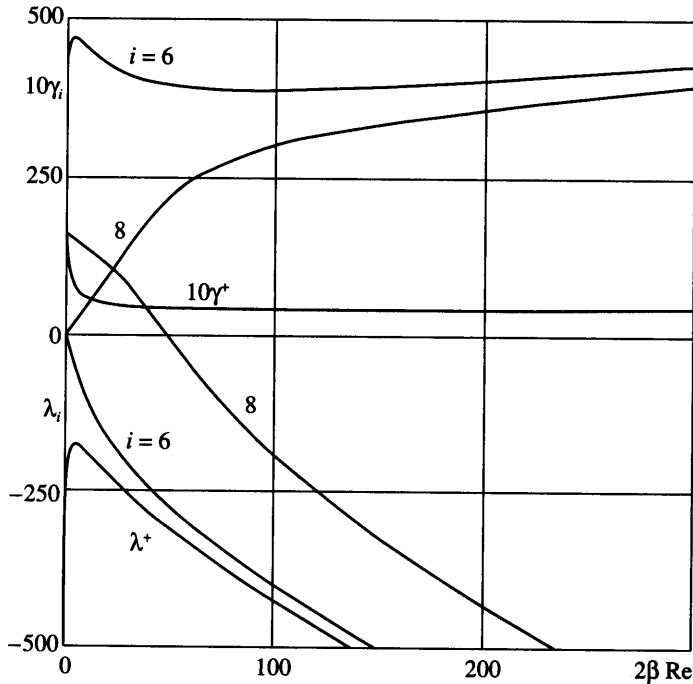
Построение функций $\gamma_i(b)$, $\lambda_i(b)$ для значений β_i (3.8) является важным вычислительным результатом работы, позволяющим сравнительно просто определять все существенные характеристики течений, а также проводить сравнения и сопоставления различных режимов. Общим свойством семейств кривых $\gamma_i(b)$, $\lambda_i(b)$ является следование асимптотике Н.Е. Кочина (2.7) для значений $b \gg 1$; значительные отличия и вариации имеют место при $b \sim 1-100$.

Кривые $\gamma_i(b)$ монотонно возрастают, а $\lambda_i(b)$ монотонно убывают при $b \rightarrow \infty$ для $i = 1, 2, 3, 4$. Поведение кривых $\gamma_i(b)$ и $\lambda_i(b)$ для $i = 5, 6, 7, 8$ существенно меняется, что приводит к изменению режимов течения.

В целом формы кривых довольно просты, однако их построение связано с весьма трудоемкими высокоточными расчетами: относительная погрешность вычислений порядка $10^{-5}-10^{-7}$. Начиная же с $b \sim 100$ имеют место типичные пограничные эффекты. Попытки построения искомого решения с помощью табулирования эллиптических интегралов не приводят к требуемой точности даже при $b \sim 10$.

Дальнейшие исследования течений вязкой жидкости в конфузоре связаны с анализом профилей скорости $u_i(x)$ для значений β_i (3.8) и различных величин $b \geq 0$, иллюстрирующих эволюцию и перестройку режимов в зависимости от числа Рейнольдса $Re > 0$.

Проведем построение профилей скорости и анализ режимов течения жидкости. Интересные гидродинамические эффекты проявляются при анализе кинематических и динамических свойств течений посредством функций $u(x) = 2\beta V(\theta)$, (1.13). С помощью этих функций определяются давление $p(r, \theta)$ (1.17) и другие динамические характеристики движения вязкой жидкости в конфузоре.



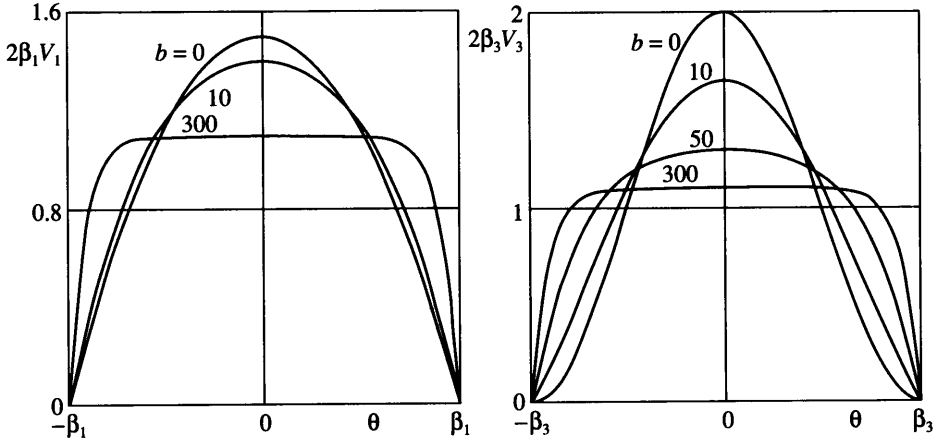
Фиг. 4. Зависимости параметров $\gamma_i(b)$, $\lambda_i(b)$ и $\gamma^*(b)$, $\lambda^*(b)$ для $\beta_6 = 135^\circ$, $\beta_8 = 180^\circ$ и $\beta = \beta^*(b = 2\beta Re)$. Переменные γ_i , γ^* представлены в увеличенном масштабе ($10\gamma_i$, $10\gamma^*$)

Соответствующие семейства профилей скорости $V_i(\theta)$ для характерных значений b представлены на фиг. 5, 6. Основное общее свойство этих функций заключается в симметричности профилей $V(\theta)$ скорости течения относительно оси конфузора $\theta = 0$.

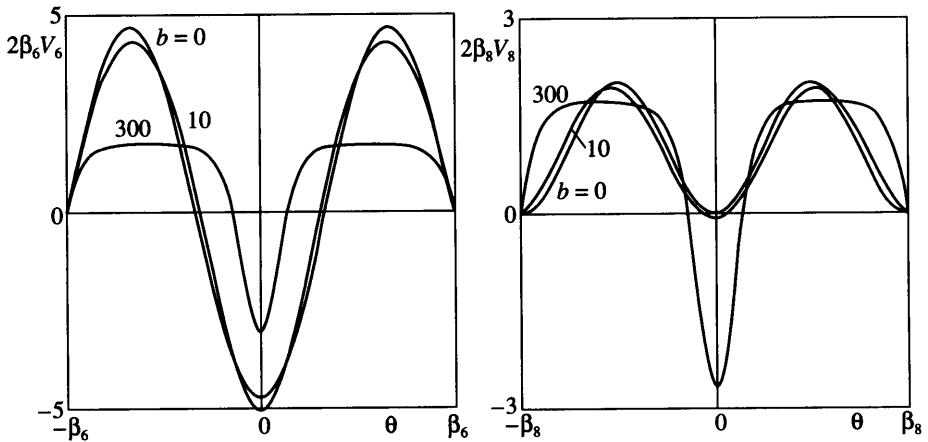
Семейство кривых $V_1(\theta)$ для $\beta = \beta_1$ и значений $b = 0, 10, 300$ (фиг. 5) иллюстрирует эволюцию режима течения “сильно вязкой” жидкости ($Re \approx 0$) к режиму, отвечающему “слабо вязкой” жидкости ($Re \sim 10^4$). Этот случай малого угла β между стенками конфузора характеризует “переход” течения Пуазейля к течению Джеффри–Гамеля. При увеличении угла ($0 < \beta < \pi/4$) качественных особенностей в режиме течения не возникает. Для значения β_2 (3.8) семейство кривых $V_2(\theta)$ при $b = 0, 10, 300$ и режим течения близки к рассмотренным для $\beta_1 = 1^\circ$ и по этой причине не представлены. Основное отличие заключается в том, что кривизна кривой $V_2(\theta)$ в точках $\theta = \pm\beta_2$ при $b = 0$ равна нулю, т.е. $\lambda_2 = 0$. При возрастании параметра $b > 0$ это свойство исчезает и форма кривой становится типичной (выпуклость вверх).

Дальнейшее увеличение угла ($\beta_2 < \beta < \beta_3 = \pi/2$) приводит к изменению знака λ и резкому возрастанию локальной кривизны $V(\theta)$ в точках $\theta = \pm\beta$. Для сравнительно небольших значений $b > 0$ будет выполняться неравенство $\lambda(b) > 0$. Однако параметр γ_0 с ростом β уменьшится и в предельной точке $\beta_3 = \pi/2$, соответствующей плоскости со щелью-стоком, величина γ_3 равна нулю. В средней части интервала $\theta \approx 0$ имеет место выпуклость вверх, как и в предыдущем случае (первый интервал (3.7)). Увеличение параметра b уменьшает λ и увеличивает γ (см. кривые γ_3 и λ_3 на фиг. 3) и при достаточно большом b кривые $V_i(\theta)$ становятся выпуклыми вверх. Соответствующие $\beta_3 = \pi/2$ профили $V_3(\theta)$ представлены на фиг. 5 для $b = 0, 10, 50, 300$.

Неожиданные качественно новые свойства течения начинают проявляться при дальнейшем возрастании угла β , когда угол между стенками конфузора становится



Фиг. 5. Эволюция профилей скорости $V_i(\theta)$ для значений угла β_i , $i = 1, 3$, в зависимости от параметра b , $0 \leq b \leq 300$



Фиг. 6. Эволюция профилей скорости $V_i(\theta)$ для значений β_i , $i = 6, 8$ в зависимости от параметра b , $0 \leq b \leq 300$

больше развернутого. Для третьего интервала (3.7) $\pi/2 < \beta < \beta^*$ построено семейство кривых $V_3(\theta)$, соответствующее $\beta_3 = \pi/2$ (описано выше); кривые для β_4 ($\beta_4 < \beta^*$, см. (3.8)) не приведены для упрощения картины. Увеличение β приводит к уменьшению $\gamma_0 = \gamma(0) < 0$ и дальнейшему росту $\lambda_0 = \lambda(0) > 0$ (фиг. 2). По краям интервала $-\beta < \theta < \beta$ появляются симметричные зоны возвратных течений (исток), т.е. $V(\theta) < 0$; в середине интервала $V(\theta) > 0$ (сток). Ширина этих зон и амплитуды скорости монотонно возрастают при $\beta \rightarrow \beta^*$ (амплитуды становятся неограниченными). Для фиксированного β (взято значение β_4 , близкое к β^*) при увеличении $Re > 0$ форма профиля сперва принимает вид, соответствующий второму интервалу (3.7), например при $b = 20$, а затем первому при достаточно большом b ($b = 300$).

Кардинальная перестройка режимов течения вязкой жидкости в конфузоре происходит при дальнейшем увеличении угла β : $\beta^* < \beta \leq \pi$ (фиг. 2). Искомые недостающие параметры $\gamma_i(b)$ и $\lambda_i(b)$ для характерных значений β_i , $i = 6, 8$ (3.8), представлены на фиг. 4,

а семейства профилей скорости $V_i(\theta)$ при аналогичных величинах параметра b – на фиг. 6. Кривые для $i = 5, 7$ не приведены для упрощения. Наблюдаются существенные отличия этих профилей от рассмотренных выше для $0 < \beta < \beta^*$. Все режимы течения являются трехмодовыми, и это свойство не исчезает при увеличении b или числа Рейнольдса. Кроме того, вблизи стенок конфузора осуществляется сток жидкости, а в некоторой окрестности оси $\theta = 0$ имеет место исток как при диффузорном течении. Амплитуды скорости как стока, так и истока неограниченно возрастают при $\beta \rightarrow \beta^*$, $b \rightarrow 0$. Суммарная величина стока и истока, конечно, равна единице (с погрешностью 10^{-7} – 10^{-9}). Амплитуда скорости стока при достаточно больших b монотонно уменьшается и стремится к единице при $b \rightarrow \infty$ согласно асимптотической формуле Н.Е. Кочина (2.7). Амплитуда скорости возвратных течений немонотонно зависит от параметра b , т.е. может увеличиваться с возрастанием Re (немонотонность стока существенно меньше). Однако для достаточно больших $b \gg 1$ в соответствии с выражением (2.7), не зависящим от угла β , амплитуда и ширина зоны истока должны неограниченно уменьшаться, что наблюдается при $b = 300$.

Прокомментируем отмеченные выше особенности течений вязкой жидкости в конфузоре с большим углом раствора $\beta > \beta^*$ на иллюстративных примерах (фиг. 6). Для четвертого интервала (3.7) значений β приведено семейство кривых $V_6(\theta)$, отвечающее $\beta = \beta_6$ в (3.8). Значение $\beta_5 = \beta^*$ на величину порядка 0.05 больше критического и приводит к значительным амплитудам скорости $V_5(\theta)$ стока и истока при $b \ll 1$; семейство $V_5(\theta)$ не представлено. Увеличение параметра $b \sim 1$ приводит к довольно быстрому уменьшению этих амплитуд, поскольку $\gamma_5(b)$ резко убывает с ростом b (представлено V_5 для $b = 10$). Затем в соответствии с асимптотикой (2.7) происходит эволюция кривых $V_5(\theta)$ ($b = 300$); поведение кривых $\gamma_5(b)$ и $\gamma_5(b)$ также отвечает асимптотическим формулам.

Значительный интерес в гидродинамическом аспекте представляет семейство профилей скорости $V_6(\theta)$ в предельной точке четвертого интервала (3.7) $\beta = \beta_6 = 3\pi/4$. Как видно из фиг. 4, в этой точке $\lambda_6 = 0$ и, кроме того, зависимость $\gamma_6(b)$ весьма плавная, что свидетельствует о сравнительно медленной эволюции семейства $u_6(x)$ при $b \sim 10$. В частности, можно сравнить изменения амплитуд для $b = 0$ и $b = 10$ при $\beta = \beta^*$ и $\beta = \beta_6$. Амплитуда стока убывает монотонно с ростом параметра b , а зависимость амплитуды истока немонотонная.

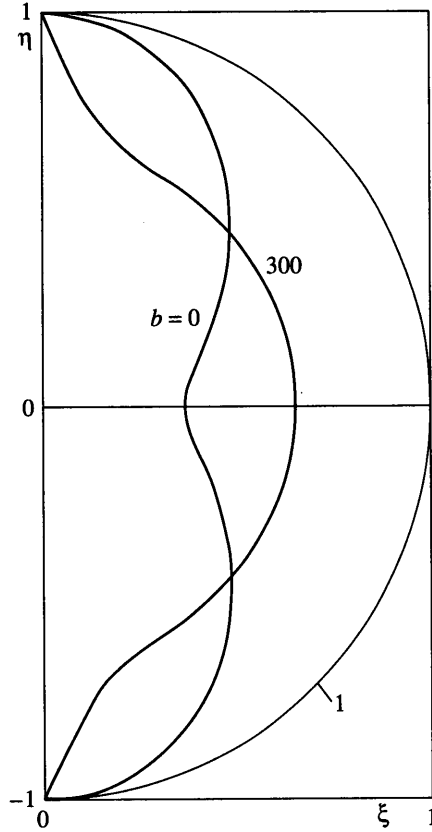
Пятый интервал значений угла β (3.7) соответствует предельно большим областям течения жидкости. Основной особенностью течений, в частности при $\beta = \beta_{7,8}$ (фиг. 6), является сравнительно медленная эволюция профилей для $b \sim 10$, как и в отмеченной выше ситуации $\beta = \beta_6$. Семейство $V_7(\theta)$ не приведено. При увеличении b ($b = 300$) наблюдается заметное возрастание амплитуды возвратного течения (истока); амплитуды же скорости стока по краям конфузора (у стенок) убывают. В пределе при $b \rightarrow \infty$ справедлива асимптотика (2.7). Интересно отметить, что явно выраженные максимумы скорости стока имеют место при $\theta = 90^\circ, -90^\circ$ для значений b вплоть до 100.

С помощью найденных решений $V_i(\theta)$ могут быть построены геометрические наглядные (ненормированные) картины профилей течения или так называемые “физические” картины. Для “малых” углов раствора ($\beta \leq \pi/4$) можно ограничиться представлениями профиля $V_1(\theta)$, на фиг. 5. При больших углах $\beta > \pi/2$ происходит значительная деформация кривых $V_i(\theta)$, $i \geq 3$, обусловленная существенным искривлением нулевого профиля $V \equiv 0$.

Искомый “физический” профиль течения представим соотношениями

$$X = (r + v_r \delta t) \cos \theta, \quad Y = (r + v_r \delta t) \sin \theta \quad (3.9)$$

где X, Y – фиксированные декартовы координаты, δt – некоторая единица времени, компонента $v_r(r, \theta)$ определена согласно (1.1) ($v_\theta \equiv 0$), значение r фиксировано. После



Фиг. 7. Физические профили скорости течения в декартовой системе координат (ξ, η) для развернутого угла раствора конфузора: $\beta = \beta_3 = \pi/2$, (плоскость со щелью-сток в начале координат, вытекающая жидкость справа от оси η); 1 – нулевой опорный уровень

подстановки указанного выражения для v , в (3.9) и нормировки на постоянную $r > 0$ получаются соотношения

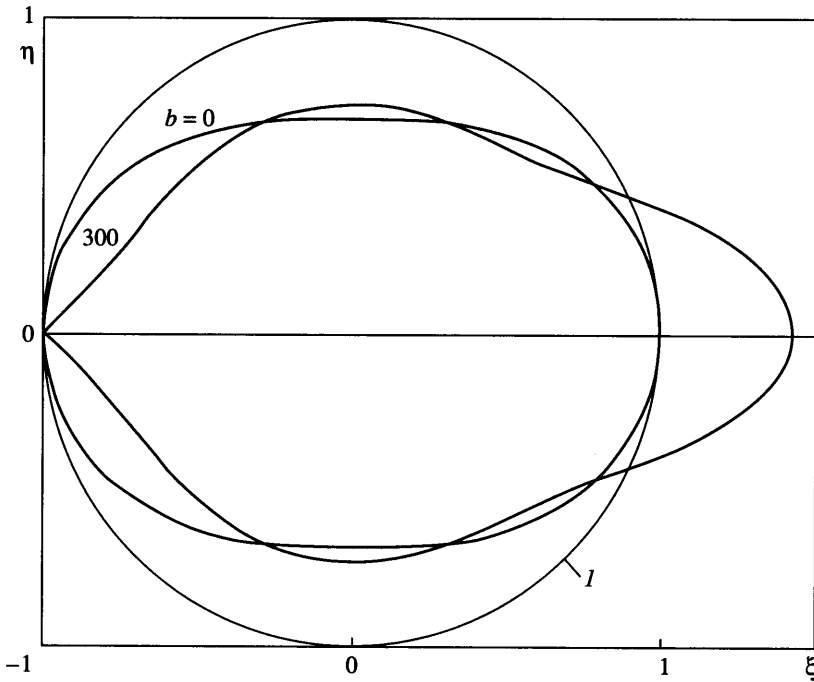
$$\frac{X}{r} = \xi(\theta) = (1 - \varepsilon V(\theta)) \cos \theta, \quad \frac{Y}{r} = \eta(\theta) = (1 - \varepsilon V(\theta)) \sin \theta \quad (3.10)$$

$$x = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\theta}{\beta} \right), \quad \varepsilon = \frac{Q}{r^2} \delta t = \text{const} > 0$$

которые параметрически задают искомую кривую. Параметр ε может варьироваться и выбираться из соображений наглядности.

На фиг. 7, 8 представлены профили (3.10) для $\beta_3 = \pi/2$, $\beta_8 = \pi$ соответственно при $\varepsilon = 1$. Для определенности, чтобы не загромождать картину, взяты предельные значения $b = 0$ и $b = 300$ (отмечены на профилях). Кривые ведут себя необычно и свидетельствуют об интересных гидродинамических эффектах.

Исследуем течения вязкой жидкости в конфузоре для критического угла раствора. Как установлено, предельное решение $y_0(x)$ при $b \rightarrow 0$ задачи Джеффри–Гамеля (2.2) не существует для критического угла β^* (3.6). Искомое решение при $b > 0$ существует,

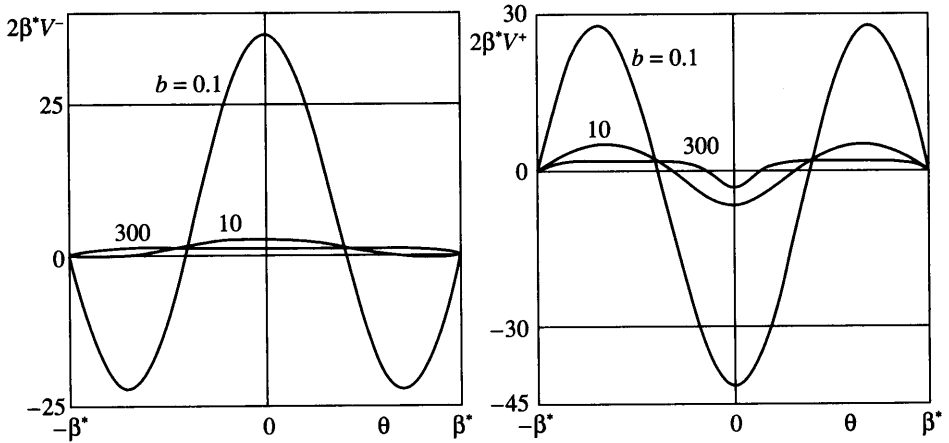


Фиг. 8. Физические профили скорости течения в декартовой системе координат (ξ, η) для полного угла раствора конфузора: $\beta = \beta_8 = \pi$, (две “бесконечно близкие” полуплоскости (отрицательная полуось ξ), между которыми осуществляется сток; жидкость занимает все пространство); 1 – нулевой опорный уровень

но не может быть построено с помощью изложенной выше стандартной процедуры продолжения по параметру. Для $\beta = \beta^*$ и некоторого фиксированного значения $b = b^* > 0$ можно использовать метод ускоренной сходимости применительно к порождающим решениям, отвечающим $\beta^- < \beta^*$ и $\beta^+ > \beta^*$, достаточно близким к β^* (см. (3.8)). Для определенности взято $b^* = 10$. Затем применяется процедура продолжения по параметру b для $0 < b < b^*$ и $b^* < b < \infty$. При помощи этого подхода построено искомое высокоточное решение $\gamma^*(b), \lambda^*(b), u(x)$ с относительной погрешностью 10^{-7} – 10^{-9} для критического значения β^* (3.6) в пределах $0.1 \leq b \leq 300$.

Расчеты свидетельствуют, что углу β^* отвечают два решения: $\gamma^* = \gamma^\mp(b), \lambda^* = \lambda^\mp(b)$ которые являются продолжением по параметру β решений $\gamma_{4,5}(b), \lambda_{4,5}(b)$, построенных выше для $\beta_{4,5} = \beta^\mp$ (фиг. 3, 4). Интересно, что $\gamma^\mp(b) \rightarrow \mp\infty, \lambda^\mp(b) \rightarrow \pm\infty$ при $b \rightarrow 0$, т.е. при достаточно малых числах Рейнольдса стационарное течение вырождается. Имеет место явление типа “заклинивания”, представляющее интерес в гидродинамическом аспекте. Давление и суммарные усилия, подсчитываемые по формулам (1.10)–(1.13), становятся неограниченными. Отметим, что функция $\gamma(b)$ имеет весьма слабо выраженный минимум при $b \sim 100$ ($\gamma^\mp \sim \sqrt{4b/3} \rightarrow \infty$ при $b \rightarrow \infty$), а функция $\lambda^+(b)$ имеет резко выраженный максимум при $b \sim 3$ ($\lambda^\mp \sim -b \rightarrow \infty$ при $b \rightarrow \infty$).

Семейства профилей скорости $V^*(\theta) = V^\mp(\theta)$, отвечающие разным режимам течения γ^\mp, λ^\mp , для $b = 0.1, 10, 300$ представлены на фиг. 9. Их анализ при $b \sim 1$ и $b \gg 1$ при-



Фиг. 9. Эволюция профилей скорости $V^{\mp}(\theta)$ для угла $\beta = \beta^*$ в зависимости от параметра $b = 2\beta^*Re$

водит к выводам, аналогичным для профилей $V_{4,5}(\theta)$. Однако при $b \ll 1$ (взято $b = 0.1$) наблюдается большой размах скоростей стока и истока, который неограниченно увеличивается при $b \rightarrow 0$. Расчёты при $b < 0.1$ затруднительны, так как величины γ^{\mp} , λ^{\mp} резко возрастают.

Таким образом, установлено новое свойство стационарных течений сильно вязкой жидкости в плоском конфузоре, требующее дальнейшего теоретического и экспериментального исследования. Наличие двух режимов течения при $\beta = \beta^*$, $b > 0$ приводит к необходимости исследования их устойчивости и возможности реализации.

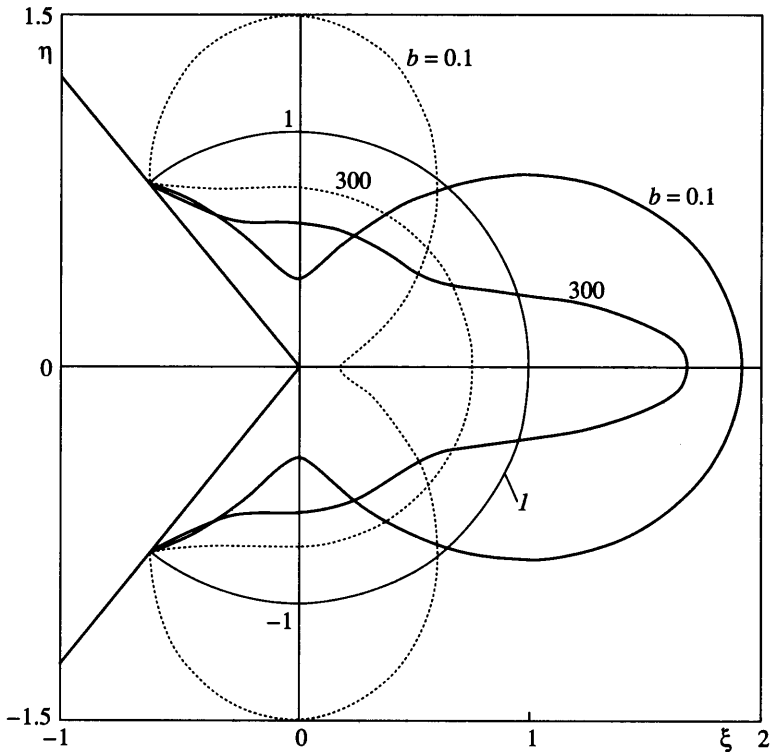
Соответствующие двум решениям $V^{\mp}(\theta)$ "физические" профили $\xi^{\mp}(\theta)$, $\eta^{\mp}(\theta)$ (штриховые и сплошные линии) построены согласно (3.10) и представлены на фиг. 10 для указанных предельных значений $b = 0.1, 300$ (отмечены на графиках). Поскольку для $b = 0.1$ вариации $V^{\mp}(\theta)$ на порядок больше, чем при $b \gg 1$, с целью наглядности взято значение коэффициента $\epsilon = 0.1$; для $b = 300$ полагается $\epsilon = 1$, как и выше (фиг. 7, 8).

Трехмодовые течения характеризуются весьма экзотическим поведением профилей и представляют несомненный интерес для гидромеханики вязкой жидкости. Мера (площадь) областей вытекания для профиля ξ^{\pm} , η^{\pm} оказывается существенной при всех рассмотренных значениях b , в том числе при $b \sim 10^2 - 10^3$.

Заключение. Аналитическими и численно-аналитическими методами проведено полное исследование стационарных вязких течений для задачи Джеффри-Гамеля в классической постановке при произвольных допустимых углах раствора конфузора и чисел Рейнольдса. Основное внимание уделено так называемым регулярно продолжаемым по числу Рейнольдса решениям задачи.

Аналитически установлено существование критического угла раствора, при котором регулярность режима течения нарушается для $Re \rightarrow 0$. В этом случае имеет место неединственность решения (два решения при $Re > 0$).

Показано, что при достаточно больших углах раствора (начиная с $\beta > \pi/2$) режимы течения имеют зоны стока и истока, т.е. профили являются симметричными трехмодовыми. Для $0 < \beta \leq \pi/2$ профили оказываются всегда одномодовыми и выпуклыми при достаточно большом Re . Одномодовые и трехмодовые профили скорости симметричны относительно оси (биссектрисы) конфузора.



Фиг. 10. Физические профили скорости течения $\xi^-(\theta)$, $\eta^-(\theta)$ (пунктирная линия) и $\xi^+(\theta)$, $\eta^+(\theta)$ (сплошная линия) в декартовой системе (ξ, η) для $\beta = \beta^*$, отвечающие $\gamma^\mp(b)$, $\lambda^\mp(b)$, $V^\mp(\theta)$; 1 – нулевой опорный уровень

Существенное внимание уделено ситуации больших углов раствора конфузора, в том числе экзотических: $\beta = \pi/2$ и $\beta = \pi$. Эти исследования позволили установить качественные особенности течений (возвратные течения, многомодовость).

Авторы благодарны А.А. Бармину за существенные замечания, касающиеся стиля изложения результатов работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№02-01-00252, 02-01-00157, 02-01-00780, 03-01-96539).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Jeffery G.B. The two-dimensional steady motion of a viscous fluid // Phil. Mag. 1915. Ser. 6. V. 29. № 172. P. 455–465.
2. Hamel G. Spiralförmige Bewegungen zahen Flüssigkeiten // Jahres.-ber. Deutsch. Math. Ver. 1917. Bd 25. S. 34–60.
3. Rosenhead L. The steady two-dimensional radial flow of viscous fluid between two inclined plane walls // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1940. V. 175. № 963. P. 436–467.
4. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Ч.2. М.: Физматгиз, 1963. 727 с.
5. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 758 с.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
7. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 840 с.

8. Слезкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: Гостехиздат, 1955. 520 с.
9. Millsaps K., Pohlhausen K. Thermal distributions in Jeffery–Hamel flows between nonparallel plane walls // J. Aeronaut. Sci. 1953. V. 2. № 3. P. 187–196.
10. Rivkind L., Solonnikov V.A. Jeffery–Hamel asymptotics for steady state Navier–Stokes flow in domains with sector-like outlets to infinity // J. Math. Fluid Mech. 2000. V. 2. № 4. P. 324–352.
11. Eagles P.M. The stability of a family of Jeffery–Hamel solutions for divergent channel flow // J. Fluid Mech. 1966. V. 24. Pt. 1. P. 191–207.
12. Акуленко Л.Д., Нестеров С.В. Эффективное численно-аналитическое решение вариационных задач механики // Докл. РАН. 2000. Т. 374. № 5. С. 624–627.
13. Акуленко Л.Д., Кумакишев С.А., Нестеров С.В. Эффективное численно-аналитическое решение изопериметрических вариационных задач механики методом ускоренной сходимости // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 5. С. 723–741.
14. Акуленко Л.Д., Георгиевский Д.В., Кумакишев С.А., Нестеров С.В. Численно-аналитическое исследование стационарного течения вязкой жидкости в плоском конфузоре // Докл. РАН. 2000. Т. 374. № 1. С. 44–48.
15. Акуленко Л.Д., Георгиевский Д.В., Кумакишев С.А., Нестеров С.В. Несимметричные конфузорные течения в задаче Джеффри–Гамеля // Тр. Мат. центра им. Н.И. Лобачевского. Казань: ДАС, 2000. Т. 7. С. 340–341.
16. Акуленко Л.Д., Георгиевский Д.В., Кумакишев С.А. Новые несимметричные и многомодовые решения задачи о течении вязкой жидкости в плоском конфузоре // Докл. РАН. 2002. Т. 383. № 1. С. 46–50.
17. Акуленко Л.Д., Георгиевский Д.В., Кумакишев С.А. Течение вязкой жидкости в конфузоре с большим углом раствора // Докл. РАН, 2002. Т. 386. № 3. С. 333–337.
18. Акуленко Л.Д., Георгиевский Д.В., Кумакишев С.А., Нестеров С.В. Несимметричные и многомодовые конфузорные течения в задаче Джеффри–Гамеля // Вестн. МГУ. Сер. Математика, механика. 2003. № 2. С. 29–31.
19. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310 с.
20. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981. 398 с.
21. Георгиевский Д.В. Устойчивость процессов деформирования вязкопластических тел. М.: УРСС, 1998. 175 с.
22. Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике. М.: Мир, 1985. 589 с.

Москва

Поступила в редакцию
5.III.2003