

УДК532.528

© 2004 г. В.П. КАРЛИКОВ, С.Л. ТОЛОКОННИКОВ

СТРУЙНО-КАВИТАЦИОННОЕ ОБТЕКАНИЕ “ЖИДКИХ ЦИЛИНДРОВ”

Исследован новый класс плоских стационарных течений идеальной невесомой несжимаемой жидкости при наличии точечных особенностей внутри потока и областей с постоянным давлением. Построены решения задач о струйном или кавитационном обтекании “атмосфер” этих особенностей. Использованы метод особых точек Чаплыгина и схема Эфроса для замыкания кавитационных полостей при положительных числах кавитации. Рассмотрен также случай отрицательных чисел кавитации. Сделаны параметрический и численный анализ найденных решений. Изученные течения можно трактовать как струйное или кавитационное обтекание криволинейных контуров специальной формы. Они могут быть использованы также для построения новых схем замыкания развитых кавитационных полостей.

Ключевые слова: несжимаемая жидкость, кавитационное обтекание, диполь, вихрь, источник.

Значительное место в теории плоских потенциальных установившихся течений идеальной жидкости занимает исследование обтекания безграничным поступательным потоком различного вида точечных особенностей или их комбинаций – например, диполя, комбинации источника и стока, пары вихрей и др.

Характерное свойство таких течений – наличие в окрестности этих особенностей цилиндрических областей течения, называемых далее “жидкими цилиндрами” или “атмосферами” особенностей, образующие которых представляют замкнутые линии тока. При обтекании диполя однородным безграничным потоком эта линия тока представляет собой окружность, для совокупности последовательно расположенных источника и стока равной интенсивности – овал Рэнкина, а в случае пары точечных вихрей с одинаковыми по величине, но противоположными по знаку циркуляциями она ограничивает “атмосферу” вихрей [1].

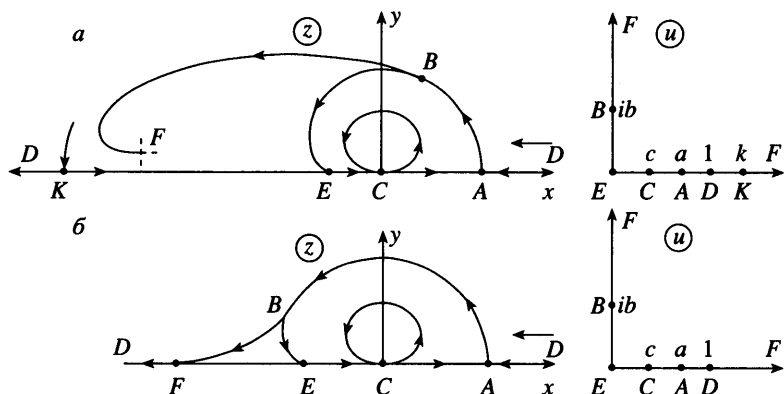
Течения вне “жидких цилиндров” обычно рассматривают как безотрывное обтекание имеющих такую же форму твердых препятствий.

Решению задач о струйном или кавитационном обтекании криволинейных препятствий посвящено большое число исследований, весьма полный обзор которых представлен в монографиях [2] и [3]. В этих работах обсуждаются проблемы существования и единственности решений, а также способы их построения.

Одна из особенностей решения задач о струйно-кавитационном обтекании замкнутых контуров – возможность весьма произвольного выбора положения точек отрыва потока от контура.

Нахождение физически допустимых решений связано обычно с необходимостью выполнения одного или двух условий Бриллюэна [3]. Первое из них требует, чтобы при кавитационном обтекании контура ни в одной из его точек, вплоть до точки отрыва потока величина скорости не превышала значение ее на свободной границе. Второе условие Бриллюэна не допускает пересечения свободной линией тока границы области, занимаемой обтекаемым препятствием, т.е. оно исключает возможность появления неоднородного течения в этой области.

В настоящей работе представлен численно-параметрический анализ задачи о струйно-кавитационном обтекании “жидких цилиндров”, выполненный с учетом условий Бриллюэна.



Фиг 1. Схемы течений и параметрические области для струйно-кавитационного обтекания диполя при положительных (а) и отрицательных (б) числах кавитации

В найденных решениях к “жидким цилиндрам” примыкают застойные зоны, давление в которых постоянно и отличается от давления в натекающем потоке. Наличие застойных зон должно естественно вызывать зависящую от давления в них деформацию “жидких цилиндров”. Это обстоятельство существенно отличает рассмотренные задачи от случая струйно-кавитационного обтекания твердых криволинейных препятствий.

В работе детально исследованы струйно-кавитационное обтекание “атмосфер” диполя и последовательно расположенных источника и стока. Численно-параметрический анализ обтекания “атмосферы” пары вихрей подробно описан в [4].

1. Струйно-кавитационное обтекание “атмосферы” диполя при положительных числах кавитации. Течение является симметричным относительно оси x , схема верхней ($y \geq 0$) его половины изображена на фиг. 1,а. Решение задачи строится отображением областей изменения комплексного потенциала w и комплексно-сопряженной скорости dw/dz течения на область изменения вспомогательного параметрического переменного u , в качестве которой выбирается верхний правый квадрант. Соответствие точек в физической и параметрической областях указано на фиг. 1,а.

В точке $C(z=0)$ расположен диполь, на свободной поверхности FBE и в бесконечно удаленной точке D давление и модуль скорости жидкости равны p_0 , v_0 и p_∞ , v_∞ . Точка F соответствует бесконечно удаленной точке возвратной струи, уходящей на второй лист римановой поверхности.

Отображения $dw/du(u)$ и $dw/dz(u)$ определяются методом особых точек Чаплыгина:

$$\frac{dw}{du}(u) = N \frac{u(u-a)(u+a)(u-k)(u+k)(u-ib)(u+ib)}{(u-1)^2(u+1)^2(u-c)^2(u+c)^2} \quad (1.1)$$

$$\frac{dw}{dz}(u) = v_0 \frac{(u-a)(u-k)(u+c)^2}{(u+a)(u+k)(u-c)^2} \quad (1.2)$$

где N – некоторая постоянная.

Связь между областями изменения z и u находится с использованием (1.1) и (1.2):

$$\frac{dz}{du}(u) = \frac{N u(u+a)^2(u+k)^2(u^2+b^2)}{v_0 (u-1)^2(u+1)^2(u+c)^4} \quad (1.3)$$

В точке $D(u = 1)$ известно значение $dw/dz(1) = -v_\infty$, откуда с помощью (1.2) получается соотношение

$$\frac{v_\infty}{v_0} = \frac{1}{\sqrt{1+\sigma}} = \frac{(1-a)(1+c)^2(k-1)}{(1+a)(1-c)^2(k+1)} \quad (1.4)$$

где σ – число кавитации.

Так как лучи DK и EAD лежат на одной прямой, линии симметрии течения $y = 0$, необходимо также потребовать выполнения условия $\text{Res} dz/du(1) = 0$, которое записывается в виде

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+k} + \frac{1}{1+b^2} - \frac{2}{1+c} = 0. \quad (1.5)$$

Чтобы функция $w(u)$, найденная интегрированием (1.1), не содержала логарифмической особенности, необходимо, чтобы $\text{Res} dw/du(1) = 0$. Это приводит к соотношению

$$\frac{1}{c^2-a^2} + \frac{1}{c^2-k^2} + \frac{1}{c^2+b^2} - \frac{2}{c^2-1} = 0. \quad (1.6)$$

Пусть L – расстояние между диполем C и критической точкой A . Тогда с помощью (1.3) находится

$$L = \int_c^a \frac{dz}{du}(u) du = \frac{N}{v_0} J, \quad J = \int_c^a \frac{u(u+a)^2(u+k)^2(u^2+b^2)}{(u-1)^2(u+1)^2(u+c)^4} du$$

Таким образом

$$\frac{1}{L} \frac{dz}{du}(u) = \frac{1}{J} \frac{u(u+a)^2(u+k)^2(u^2+b^2)}{(u-1)^2(u+1)^2(u+c)^4}$$

После определения параметров a, b, c, k последняя формула служит для расчета геометрических характеристик течения.

В дальнейшем используется условие конечности кривизны свободных границ BF и BE в точке B . Рассматривается функция Жуковского $\omega = -\ln(dw/v_0 dz) = -\ln(v/v_0) + i\theta$, где v – модуль скорости, θ – угол между направлением скорости и осью x . Вычисление производной этой функции вдоль свободной поверхности ($u = it$) дает

$$d\theta = \left(\frac{2a}{t^2+a^2} + \frac{2k}{t^2+k^2} - \frac{4c}{t^2+c^2} \right) dt.$$

Из формулы (1.3) следует, что дифференциал длины дуги свободной поверхности $ds = |dz/du(it)d(it)|$ в точке $B(t = b)$ обращается в ноль. Поэтому, чтобы кривизна $\kappa = d\theta/ds$ свободных границ была конечной в этой точке, необходимо потребовать $d\theta/dt|_{t=b} = 0$, что приводит к соотношению

$$\frac{a}{b^2+a^2} + \frac{k}{b^2+k^2} - \frac{2c}{b^2+c^2} = 0 \quad (1.7)$$

Соотношения (1.4), (1.5) и (1.6) не образуют замкнутую систему уравнений для нахождения неизвестных параметров a, b, c, k , один параметр оказывается “свободным”.

Расчеты показали, что при заданном числе кавитации $\sigma > 0$ и фиксированном $c \in (0, 1)$ эта система имеет единственное решение a, b, k . Таким образом, для каждого $\sigma > 0$ имеется однопараметрическое семейство решений, отличающихся друг от друга геометрией каверны, формой “жидкого цилиндра” *ABECA* и положением точки отрыва *B* потока.

Интервал $(0,1)$ возможных значений параметра c делится точками $c = c_1(\sigma)$ и $c = c_2(\sigma)$ на несколько характерных участков.

При $c \in (0, c_1)$ кривизна свободных границ в точке *B* бесконечна и в окрестности *B* свободная линия тока *BF* пересекает “жидкий цилиндр” *ABECA*, т.е. течение в этой области неоднолистно.

Значению $c = c_1$ соответствует случай конечной кривизны свободных границ *BF* и *BE* в точке *B*. Течение является однолистным в области “жидкого цилиндра”. На участке его границы *AB* модуль скорости течения монотонно возрастает от нуля (в критической точке *A*) до v_0 (в точке *B*). Таким образом, оказываются выполненными и первое, и второе условия Бриллюэна, что позволяет рассматривать соответствующее течение как кавитационное обтекание жидкой области *ABECA*.

При $c \in (c_1, c_2)$ кривизна свободных границ *BF* и *BE* в точке *B* бесконечна, однако в ее окрестности она имеет на этих линиях разные знаки, вследствие чего пересечения линии тока *BF* с областью *ABECA* не происходит и второе условие Бриллюэна выполняется. Однако на линии *AB* имеются участки, модуль скорости на которых превосходит v_0 . Следовательно, первое условие Бриллюэна в этом случае не выполняется. Течения при $c \in (c_1, c_2)$ поэтому далее называются струйным обтеканием “жидкого цилиндра” *ABECA*.

Случай $c = c_2$ также соответствует конечной кривизне свободных границ в точке *B*, но при этом линия тока *BF* сразу же оказывается внутри области *ABECA*, т.е. однолистность течения в этой области нарушена. Такой же характер течение имеет и при $c \in (c_2, 1)$, только кривизна линий тока *BF* и *BE* в точке *B* бесконечна.

С увеличением числа кавитации диапазон (c_1, c_2) сужается и при $\sigma = \sigma_{\max} \approx 4.73$ получается $c_1 = c_2$. Для $\sigma \geq \sigma_{\max}$ течение всегда в области “жидкого цилиндра” неоднолистно.

На фиг. 2,а представлены форма свободных границ течения и соответствующих линий *AB* при нескольких значениях числа кавитации для случая кавитационного обтекания “жидкого цилиндра” *ABECA*. Как видно из рисунка, форма области *ABECA* слабо деформируется при изменении в рассмотренном диапазоне чисел кавитации, но сильно отличается от формы “атмосферы” диполя при безотрывном ее обтекании (соответствующая окружность изображена на фиг. 2,а штриховой линией).

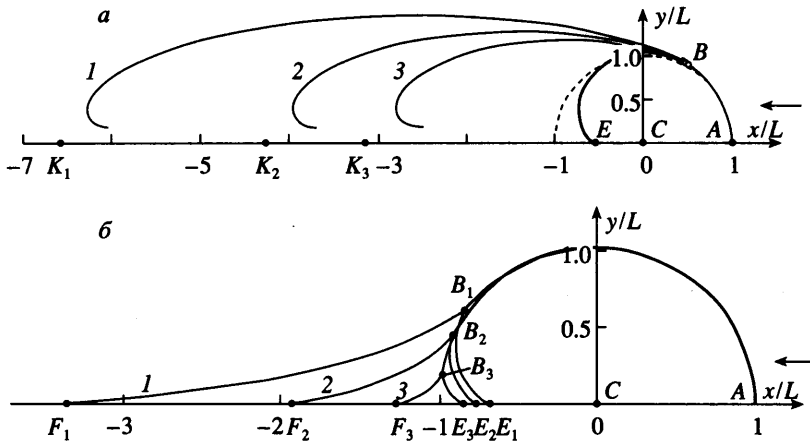
2. Обтекание “атмосферы” диполя при отрицательных числах кавитации. В случае отрицательных чисел кавитации для замыкания каверны используется схема Чаплыгина–Кольшера [3]. Схема верхней половины течения и выбранная параметрическая область изображены на фиг. 1,б.

Общее решение задачи находится методом особых точек:

$$\frac{dw}{dz}(u) = -v_0 \frac{(u-a)(u+c)^2}{(u+a)(u-c)^2}$$

$$\frac{1}{L} \frac{dz}{du}(u) = \frac{1}{J} \frac{u(u+a)^2(u^2+b^2)}{(u-1)^2(u+1)^2(u+c)^4}$$

$$J = \int_c^a \frac{u(u+a)^2(u^2+b^2)}{(u-1)^2(u+1)^2(u+c)^4} du$$



Фиг. 2. Форма свободных границ течения и “атмосферы” диполя при кавитационном обтекании ее для чисел кавитации a : $\sigma = 0.9, 1.2, 1.5$ (линии 1–3); b : $\sigma = -0.3, -0.6, -0.9$ (линии 1–3); штриховая – граница “атмосферы” диполя при безотрывном ее обтекании

Уравнения для параметров, аналогичные соотношениям (1.4)–(1.6) соответственно, имеют вид:

$$\frac{v_\infty}{v_0} = \frac{1}{\sqrt{1+\sigma}} = \frac{(1-a)(1+c)^2}{(1+a)(1-c)^2} \tag{2.1}$$

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b^2} - \frac{2}{1+c} = 0 \tag{2.2}$$

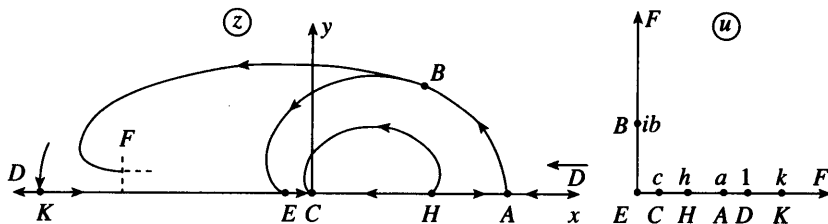
$$\frac{1}{c^2-a^2} + \frac{1}{c^2+b^2} - \frac{2}{c^2-1} = 0 \tag{2.3}$$

В отличие от случая положительных чисел кавитации в общем решении содержится на один параметр меньше (отсутствует параметр k , соответствующий критической точке K в течении, показанном на фиг. 1,а).

Из сделанного анализа следует, что при заданном $\sigma \in (-1, 0)$ система уравнений (2.1)–(2.3) имеет единственное решение a, b, c , т.е. заданием числа кавитации определяется единственное решение задачи.

На фиг. 2,а показана форма свободных границ течения и жидкого цилиндра $ABECA$ для нескольких отрицательных чисел кавитации. Меньшим по модулю числам кавитации соответствуют каверны большей длины и большее расстояние от точки отрыва потока B до плоскости симметрии $y = 0$. Форма участка линии тока AB мало отличается от окружности, соответствующей безотрывному обтеканию диполя. Наоборот, форма границы “атмосферы” диполя на участке BE , как и в случае положительных чисел кавитации, существенно отличается от соответствующей безотрывному обтеканию.

3. Обтекание “атмосфер” последовательно расположенных источника и стока и пары точечных вихрей. Схема течения и параметрическая область для случая положительных чисел кавитации изображена на фиг. 3. В точке $H(z = L)$ расположен источник интенсивности Q , а в точке $C(z = 0)$ – сток интенсивности $-Q$.



Фиг. 3. Схема течения и параметрическая область для струйно-кавитационного обтекания совокупности источник-сток при положительных числах кавитации

Общее решение задачи определяется формулами:

$$\frac{dw}{dz}(u) = v_0 \frac{(u-a)(u-k)(u+c)(u+h)}{(u+a)(u+k)(u-c)(u-h)}$$

$$\frac{1}{L} \frac{dz}{du}(u) = \frac{1}{J} \frac{u(u+a)^2(u+k)^2(u^2+b^2)}{(u-1)^2(u+1)^2(u+c)^2(u+h)^2}$$

$$J = \int_c^h \frac{u(u+a)^2(u+k)^2(u^2+b^2)}{(u-1)^2(u+1)^2(u+c)^2(u+h)^2} du$$

Система соотношений между параметрами имеет вид:

$$\frac{v_\infty}{v_0} = \frac{(1-a)(1+c)(1+h)(k-1)}{(1+a)(1-c)(1-h)(k+1)} \quad (3.1)$$

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+k} - \frac{1}{1+c} - \frac{1}{1+h} = 0 \quad (3.2)$$

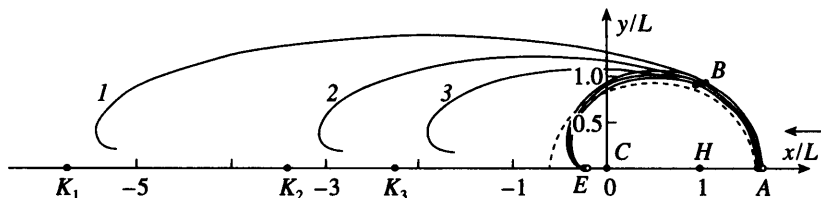
$$\frac{a}{b^2+a^2} + \frac{k}{b^2+k^2} - \frac{c}{b^2+c^2} - \frac{h}{b^2+h^2} = 0 \quad (3.3)$$

$$q = \frac{Q}{v_\infty L} = \frac{\sqrt{1+\sigma} \pi (a^2 - c^2)(k^2 - c^2)(c^2 + b^2)}{J (h^2 - c^2)(1 - c^2)^2} \quad (3.4)$$

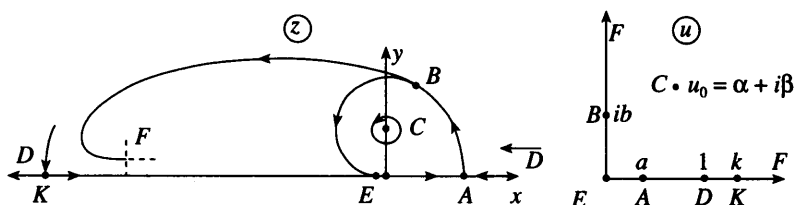
$$\frac{(1-c^2)^2}{(a^2 - c^2)(c^2 + b^2)(k^2 - c^2)} = \frac{(1-h^2)^2}{(a^2 - h^2)(h^2 + b^2)(k^2 - h^2)} \quad (3.5)$$

Соотношения (3.1)–(3.3) аналогичны условиям (1.4), (1.5) и (1.7). Формула (3.4) определяет интенсивность источника, а (3.5) следует из равенства по модулю интенсивностей источника и стока.

При отсутствии требования о конечности кривизны свободных границ в точке B система уравнений для параметров не является замкнутой, один параметр оказывается “свободным”. В качестве такого параметра был выбран c . Поведение решения в зависимости от параметра c при фиксированных значениях числа кавитации σ и безразмерного расхода q имеет те же качественные особенности, что и в задаче об обтекании дипо-



Фиг. 4. Форма свободных границ течения и “атмосферы” совокупности источник-сток при кавитационном обтекании ее для $q = 6$ и $\sigma = 0,9, 1,2, 1,5$ (линии 1–3)



Фиг. 5. Схема течения и параметрическая область для струйно-кавитационного обтекания “атмосферы” пары вихрей при положительных числах кавитации

ля. Существует единственное значение параметра $c = c_1$, при котором осуществляется кавитационное обтекание “жидкого цилиндра” $ABECHA$, и интервал (c_1, c_2) , соответствующий струйному обтеканию.

На фиг. 4 для случая кавитационного обтекания приведены результаты расчетов формы границ течения и линии AB при $q = 6$ и нескольких положительных значениях числа кавитации. На этом же рисунке пунктиром показана граница замкнутой области, соответствующей безотрывному обтеканию источника и стока (овал Рэнкина).

При решении задачи с отрицательными числами кавитации используется схема Чаплыгина-Кольшера. В отличие от случая $\sigma > 0$ в течении отсутствует критическая точка K , и поэтому число параметров сокращается; условия, аналогичные соотношениям (3.1), (3.2), (3.4) и (3.5), позволяют для каждого фиксированного $\sigma \in (-1, 0)$ найти единственное решение задачи.

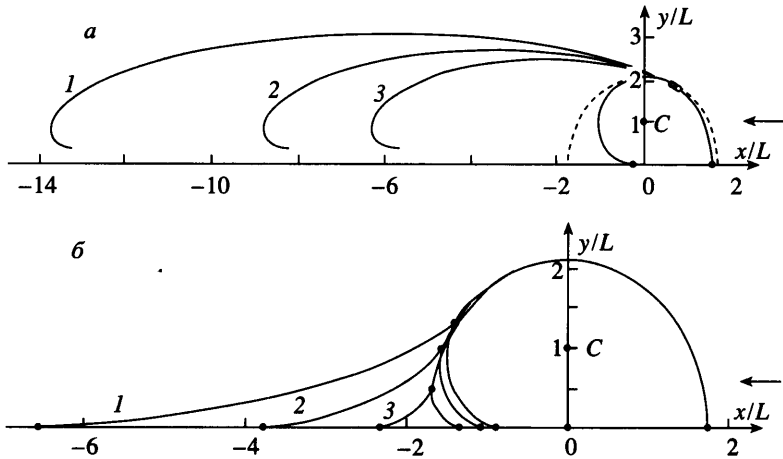
Исследование задачи о струйно-кавитационном обтекании “атмосферы” пары точечных вихрей с равными по модулю, но противоположными по знаку циркуляциями, подробно описано в работе [4].

Схема течения и параметрическая область u приведены на фиг. 5. В отличие от уже рассмотренных задач в качестве дополнительных условий используются условие равенства нулю мнимой части выражения, определяемого интегрированием $dw/du(u)$ вокруг соответствующей вихрю точки $u = u_0$, и условие равенства нулю поперечной силы, действующей на вихрь.

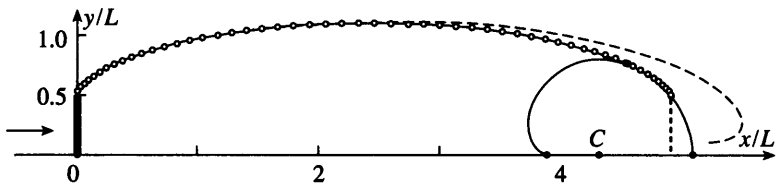
Для случая положительных чисел кавитации так же, как и в предыдущих задачах, имеется “свободный” параметр, выбором которого определяются решения кавитационного и струйного типов.

На фиг. 6,а для нескольких значений $\sigma > 0$ представлены расчеты формы свободных поверхностей течения и “атмосфер” вихрей при кавитационном обтекании.

Для отрицательных чисел кавитации для каждого $\sigma \in (-1, 0)$ находится единственное решение. На фиг. 6,б приведены примеры расчета геометрических характеристик течения для нескольких отрицательных значений σ .



Фиг. 6. Форма свободных границ течения и "атмосферы" вихрей при положительных (а: $\sigma = 0.9, 1.2, 1.5$ (линии 1–3)) и отрицательных (б: $\sigma = -0.3, -0.6, -0.9$ (линии 1–3)) числах кавитации



Фиг. 7. Форма кавитационной полости за пластиной для $\sigma = 0.9$ при замыкании ее на "жидкий цилиндр" в окрестности диполя. Точки соответствуют каверне, замыкаемой по схеме Рябушинского, штриховая линия – схеме Эфроса

Методологический аспект исследования. Найденные решения кроме самостоятельного научного представляют и методологический интерес, поскольку их можно рассматривать как обоснование возможности построения новых математических схем замыкания развитых кавитационных полостей. Действительно, простое обращение потока в рассмотренных случаях, т.е. изменение только направления скорости в каждой точке потока на противоположное, позволяет трактовать получаемые таким образом решения как описание создаваемого с помощью встречной струи развитого кавитационного течения [5], в котором каверна замыкается на жидкий цилиндр, представляющий "атмосферу" либо пары вихрей, либо диполя, либо совокупности источника и стока равной интенсивности.

Такой способ замыкания кавитационных полостей может быть использован и при кавитационном обтекании твердых тел, например пластинки. В этом случае, как и в схеме Эфроса, течение в области замыкания каверны в большей степени будет соответствовать реальной ситуации, чем при использовании других схем (Рябушинского, Жуковского-Рошко, Тулина, Кузнецова и др.) Кроме того, такой способ замыкания кавитационной полости является более оправданным по сравнению с рядом других известных схем вследствие однолиственности получаемого в этой области течения.

На фиг. 7 показана сплошной линией в качестве примера форма кавитационной полости за пластиной при числе кавитации $\sigma = 0.9$ при замыкании ее на "жидкий ци-

линдр” в окрестности диполя. Пластина имеет длину L , диполь расположен в точке C . Штриховой линией на этом рисунке показана свободная граница каверны, рассчитанная с использованием схемы Эфроса, а точками – граница, найденная из решения задачи с замыканием каверны по схеме Рябушинского.

Заключение. Установлена возможность построения решений о кавитационном или струйном обтекании “атмосфер” точечных особенностей типа диполя, совокупности источник-сток и пары вихрей. Эти решения можно рассматривать как решения задач о кавитационном или струйном обтекании твердых криволинейных контуров соответствующей формы.

Приведены примеры расчета конкретных течений такого типа при положительных и отрицательных значениях числа кавитации.

Анализ возможных вариантов отрыва свободных линий тока от замкнутых областей течения, окружающих особенности, выявил наличие качественной аналогии со случаем струйно-кавитационного обтекания твердых замкнутых контуров, в частности цилиндра [3]. Одна из отличительных особенностей рассмотренных течений – зависимость формы обтекаемых жидких контуров от значения числа кавитации, момента диполя или интенсивности источника и стока. Как и при исследовании обтекания твердых криволинейных препятствий, в случаях, когда рассматриваемые течения становятся неоднородными, получаемые решения можно трактовать как решения задач о кавитационном или струйном обтекании криволинейных дуг AB специальной формы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№ 02-01-00613) и фонда поддержки ведущих научных школ РФ (проект № НШ-1481.2003.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Милн-Томпсон Л.М. Теоретическая гидродинамика. М.: Мир, 1964, 655 с.
2. Биркгофф Г., Сарантонелло Э. Струи, следы, каверны. М: Мир, 1964, 466 с.
3. Гуревич М.И. Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979, 536 с.
4. Карликов В.П., Толоконников С.Л. Струйно-кавитационное обтекание “атмосферы” пары вихрей// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. 2003. N 6. С. 22–27.
5. Седов Л.И. Об обтекании идеальной жидкостью тела со встречной струей// Докл. АН СССР. 1972. Т. 206. N 1. С. 41–42.

Москва

Поступила в редакцию
10. VI. 2003