

УДК 532.527

© 2004 г. А.М. ГАЙФУЛЛИН, А.В. ЗУБЦОВ

ДИФФУЗИЯ ДВУХ ВИХРЕЙ

Рассмотрена задача о диффузии двух вихрей с циркуляциями противоположного знака. Построено асимптотическое решение задачи при больших числах Рейнольдса. Обсуждается механизм диссипации циркуляции вихрей. Результаты аналитического исследования сравниваются с результатами численного решения уравнений Навье–Стокса.

Ключевые слова: вихревое течение, диффузия завихренности, диссипация циркуляции.

Одним из известных точных решений уравнений Навье–Стокса является решение задачи о диффузии вихря с интенсивностью Γ_0 [1]. Из этого решения следует, что полный поток завихренности через всю область возмущенного движения с течением времени не меняется и равняется Γ_0 . Для двух вихрей с интенсивностью $\pm\Gamma_0$ имеется лишь точное решение уравнений Эйлера: два вихря движутся равномерно перпендикулярно линии, их соединяющей, образуя замкнутую область рециркуляционного течения [1]. При этом интенсивность вихрей сохраняется по времени. В идеальной жидкости такая вихревая система моделирует след за прямоугольным крылом большого удлинения. Результаты экспериментальных исследований вихревого следа за самолетом указывают на то, что поток положительной (или же отрицательной) завихренности через сечение следа с течением времени падает [2], поэтому интересно исследовать влияние вязкости на эволюцию вихревой пары с интенсивностью $\pm\Gamma_0$. Особенно интересно выяснить механизм диссипации вихревых потоков, т.е. определить зависимость циркуляции каждого вихря от времени. В настоящей работе задача исследуется для случая больших чисел Рейнольдса в предположении, что течение имеет ламинарный характер.

1. Постановка задачи. Рассматривается плоское нестационарное течение вязкой несжимаемой жидкости при условии, что в начальный момент времени $t = 0$ имеется поле скоростей, которое индуцируют два вихря с интенсивностью $\pm\Gamma_0$. Пусть $Y = 0$, $X = \pm l$ – координаты вихрей в декартовой системе координат при $t = 0$; U , V – составляющие скорости вдоль осей X , Y . Решение задачи при $t > 0$ будем искать для случая больших чисел $Re = \Gamma_0 \nu \gg 1$. Согласно нестационарной аналогии [3], данная задача эквивалентна задаче о ламинарной диффузии следа за прямоугольным крылом большого удлинения.

Величина завихренности Ω и составляющие скорости должны удовлетворять уравнениям

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + U \frac{\partial \Omega}{\partial X} + V \frac{\partial \Omega}{\partial Y} = \nu \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Y^2} \right) \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} = \Omega \quad (1.2)$$

Исследуемое течение симметрично относительно линии $X = 0$. Начальные и граничные условия для уравнений (1.1)–(1.2) имеют вид

$$U - iV = \frac{\Gamma_0}{2\pi i} \left(\frac{1}{X + iY - l} - \frac{1}{X + iY + l} \right) \quad (t = 0) \quad (1.3)$$

$$U = 0, \quad \Omega = 0 \quad (X = 0) \quad (1.4)$$

$$\Omega \rightarrow 0, \quad U^2 + V^2 \rightarrow 0 \quad (X^2 + Y^2 \rightarrow \infty) \quad (1.5)$$

$$\Omega < \infty, \quad V^2 + U^2 < \infty \quad (t > 0) \quad (1.6)$$

2. Асимптотическое решение задачи о диффузии двух вихрей. Назовем центром вихря точку с максимальной для положительного вихря или минимальной для отрицательного вихря завихренностью. Введем подвижную систему координат

$$y = \left(Y - \int_0^t V_0 dt \right) \frac{1}{l}, \quad x = \frac{X}{l} \quad (2.1)$$

где $V_0(t)$ – скорость движения центров вихрей в неподвижной системе координат в направлении оси Y при $t > 0$. Через $x = \pm x_0(t)$, $y = 0$ обозначим координаты центров вихрей. Будем полагать, что в некотором интервале времени $0 < t < t_0$ диффузия завихренности оказывает слабое влияние на поле скоростей в основной области течения D_1 (фиг. 1), ха-

рактерный размер которой определяется соотношением $\sqrt{x^2 + y^2} \sim O(1)$. Тогда в первом приближении в области D_1 возникает задача о самоиндуцированном движении в идеальной жидкости двух точечных вихрей с интенсивностью $\pm \Gamma_0$. В подвижной системе координат комплексный потенциал такого течения имеет вид

$$\phi + i\psi = -\frac{i\Gamma_0}{2\pi} \left(\frac{\sigma}{2} + \ln \frac{\sigma - 1}{\sigma + 1} \right), \quad \sigma = x + iy \quad (2.2)$$

В первом приближении скорость движения точечных вихрей $V_0 = -\Gamma_0/4\pi l$, а $x_0 = 1$. После скоростей, определяемое, решением (2.2), удовлетворяет условиям (1.3)–(1.5), но не удовлетворяет условию (1.6) при $\sigma \rightarrow \pm 1$, поэтому в окрестности этих точек должны существовать области сильных возмущений при сколь угодно малых t (область D_2). Эти возмущения возникают как результат проявления вязких эффектов.

В области D_2 введем полярную систему координат (ρ, θ) , связанную с центром вихря, имеющего интенсивность Γ_0 .

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + y^2} = \rho \text{Re}^{-1/2}, \quad \theta = \arctg \frac{y}{x - x_0}$$

Из дальнейшего анализа задачи будет следовать, что абсцисса центра вихря с интенсивностью Γ_0 и скорость V_0 отличаются от значений, соответствующих первому приближению, на малую величину:

$$x_0 - 1 = O(\tau_1^3), \quad V_0 + \frac{\Gamma_0}{4\pi l} = O(\tau_1^2) \quad \left(\tau_1 = \frac{\tau}{\text{Re}}, \tau = \frac{t\Gamma_0}{l^2} \right) \quad (2.3)$$

Ниже будет показано, что для определения этих отличий потребуется построение пятого (для V_0) и седьмого (для x_0) асимптотических приближений в области D_2 .

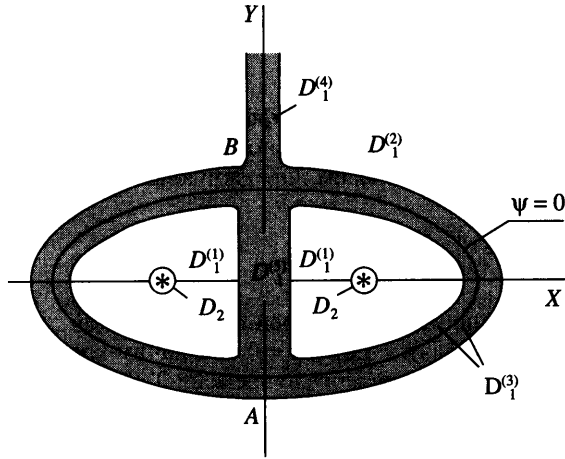
Из решения (2.2) следует, что характеристики течения в области D_2 должны иметь следующее асимптотическое представление при $\rho \rightarrow \infty$

$$w \rightarrow \frac{\Gamma_0}{2\pi l} \text{Re}^{1/2} \left[\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\text{Re}^4} \cos 2\theta - \frac{1}{\text{Re}^{3/2}} \frac{\rho^2}{8} \cos 3\theta + \frac{1}{\text{Re}^2} \frac{\rho^3}{16} \cos 4\theta + O\left(\frac{1}{\text{Re}^{5/2}}\right) \right]$$

$$v \rightarrow \frac{\Gamma_0}{2\pi l} \frac{1}{\text{Re}^{1/2}} \left[\frac{\rho}{4} \sin 2\theta - \frac{1}{\text{Re}^{1/2}} \frac{\rho^2}{8} \sin 3\theta + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\rho^3}{16} \sin 4\theta + O\left(\frac{1}{\text{Re}^{3/2}}\right) \right]$$

$$\Omega \rightarrow 0$$

где w , v – азимутальная и радиальная составляющие скоростей.



Фиг. 1. Схема течения. Асимптотические области. Звездочками отмечены центры вихрей. Серым цветом отмечен пограничный слой в окрестности линии $\psi = 0$

Решение в области D_2 представим в виде асимптотического ряда по степеням малого параметра $Re^{-1/2}$

$$\Omega = \frac{\Gamma_0}{l^2} Re \left[\omega_1 + \frac{1}{Re} \omega_2 + \frac{1}{Re^{3/2}} \omega_3 + \frac{1}{Re^2} \omega_4 + O\left(\frac{1}{Re^{5/2}}\right) \right]$$

$$w = \frac{\Gamma_0}{l} Re^{1/2} \left[w_1 + \frac{1}{Re} w_2 + \frac{1}{Re^{3/2}} w_3 + \frac{1}{Re^2} w_4 + O\left(\frac{1}{Re^{5/2}}\right) \right] \tag{2.4}$$

$$v = \frac{\Gamma_0}{l} \frac{1}{Re^{1/2}} \left[v_2 + \frac{1}{Re^{1/2}} v_3 + \frac{1}{Re} v_4 + O\left(\frac{1}{Re^{3/2}}\right) \right]$$

Члены асимптотического ряда (2.4) являются функциями трех переменных ρ , θ и τ . Подставляя (2.4) в уравнения (1.1)–(1.2), переписанные в полярной системе координат, и собирая члены при одинаковых степенях малого параметра, получим систему уравнений для определения функций ω_1 , w_1

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial \omega_1}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \omega_1}{\partial \rho}, \quad \frac{\partial w_1}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial(\rho w_1)}{\partial \rho} = \rho \omega_1 \tag{2.5}$$

$$w_1 \rightarrow 1/2\pi\rho, \quad \omega_1 \rightarrow 0 \quad (\rho \rightarrow \infty, \tau > 0) \tag{2.6}$$

$$w_1 = 0, \quad \omega_1 < \infty \quad (\rho = 0, \tau > 0)$$

$$w_1 = 1/2\pi\rho \quad (\tau = 0) \tag{2.7}$$

Нетрудно убедиться, что решение системы (2.5)–(2.7) соответствует решению задачи о диффузии изолированного вихря

$$\omega_1 = \frac{1}{4\pi\tau} e^{-\rho^2/4\tau}, \quad w_1 = \frac{1}{2\pi\rho} (1 - e^{-\rho^2/4\tau})$$

Из уравнений (1.2) следует, что функции ω_i, w_i, v_i ($i = 2, 3$) должны удовлетворять уравнениям

$$\frac{\partial w_i}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial \rho} = 0, \quad \frac{\partial(\rho w_i)}{\partial \rho} - \frac{\partial v_i}{\partial \theta} = \rho \omega_i \quad (2.8)$$

$$v_i \frac{\partial \omega_i}{\partial \rho} + \frac{w_i}{\rho} \frac{\partial \omega_i}{\partial \theta} = 0 \quad (2.9)$$

Граничные условия для системы (2.8), (2.9):

$$\omega_2 \rightarrow 0, \quad w_2 \rightarrow \frac{\rho}{8\pi} \cos 2\theta, \quad v_2 \rightarrow \frac{\rho}{8\pi} \sin 2\theta \quad (\rho \rightarrow \infty, \tau > 0)$$

$$\omega_3 \rightarrow 0, \quad w_3 \rightarrow -\frac{\rho^2}{16\pi} \cos 3\theta, \quad v_3 \rightarrow -\frac{\rho^2}{16\pi} \sin 3\theta \quad (\rho \rightarrow \infty, \tau > 0) \quad (2.10)$$

$$\omega_i < \infty, \quad w_i = v_i = 0 \quad (\rho = 0, \tau > 0)$$

Решение системы уравнений (2.8), (2.9) с граничными условиями (2.10) имеет вид

$$\omega_2 = -\frac{1}{4\pi\beta_2} \frac{z e^{-z}}{1 - e^{-z}} Q_2 \cos 2\theta + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho f_2)}{\partial \rho}, \quad z = \frac{\rho^2}{4\tau}$$

$$w_2 = \frac{\rho}{8\pi\beta_2} Q_2' \cos 2\theta + f_2, \quad v_2 = \frac{\rho}{8\pi\beta_2} \frac{Q_2}{z} \sin 2\theta$$

$$\omega_3 = \frac{\rho}{12\pi\beta_3} \frac{\sqrt{z} e^{-z}}{1 - e^{-z}} Q_3 \cos 3\theta + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho f_3)}{\partial \rho}$$

$$w_3 = -\frac{\rho^2}{24\pi\beta_3} \frac{Q_3'}{\sqrt{z}} \cos 3\theta + f_3, \quad v_3 = -\frac{\rho^2}{16\pi\beta_3} \frac{Q_3}{z^{3/2}} \sin 3\theta$$

где функции Q_i ($i = 2, 3$) удовлетворяют уравнению

$$L\left(Q_i, \frac{i}{2}\right) = 0, \quad L(Q_i, \alpha) \equiv z^2 Q_i'' + z Q_i' - \left(\alpha^2 - \frac{z^2 e^{-z}}{1 - e^{-z}}\right) Q_i \quad (2.11)$$

Здесь штрих означает дифференцирование по переменной z , $f_i(\rho, \tau)$ – функции, определяемые из решения задачи в следующих приближениях, β_i – свободные константы.

Линейно независимые решения уравнения (2.11) можно выбрать таким образом, что одно из них удовлетворяет граничным условиям (2.10) при $\rho = 0$, а другое является особым при $z \rightarrow 0$ ($Q_i \sim z^{-i/2}$). Решая задачу Коши для уравнения (2.11) с начальными данными при $z = 0$, соответствующими решению $Q_i = z^{i/2}$, можно за счет выбора свободной константы β_i удовлетворить граничное условие (2.10) при $\rho \rightarrow \infty$. Из анализа и численного интегрирования уравнений (2.11) следует, что их решение удовлетворяющее крайним условиям (2.10), имеет следующую асимптотику при $z \rightarrow \infty$

$$Q_i(z) \rightarrow \beta_i z^{i/2} + \frac{\gamma_i}{z^{i/2}} + O(e^{-z}) \quad (i = 2, 3)$$

$$\beta_2 \approx 0.39609, \quad \gamma_2 \approx 1.73015, \quad \beta_3 \approx 0.56188, \quad \gamma_3 \approx 5.11967.$$

Четвертое приближение поставленной задачи определяется из совместного решения системы уравнений (2.8) при $i = 4$ и уравнения

$$v_4 \frac{\partial \omega_1}{\partial \rho} + \frac{w_1}{\rho} \frac{\partial \omega_4}{\partial \theta} = -\frac{\partial \omega_2}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \omega_2}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial \theta^2} - v_2 \frac{\partial \omega_2}{\partial \rho} - \frac{w_2}{\rho} \frac{\partial \omega_2}{\partial \theta} \quad (2.12)$$

при следующих граничных условиях

$$\omega_4 \rightarrow 0, \quad w_4 \rightarrow \frac{\rho^3}{32\pi} \cos 4\theta, \quad v_4 \rightarrow \frac{\rho^3}{32\pi} \sin 4\theta \quad (\rho \rightarrow \infty, \tau > 0) \quad (2.13)$$

$$\omega_4 < \infty, \quad w_4 = v_4 = 0 \quad (\rho = 0, \tau > 0)$$

Из (2.8), (2.12) и (2.13) следует, что четвертое приближение представляется в виде суммы трех слагаемых

$$\begin{aligned} \omega_4(\rho, \theta, \tau) &= \omega_{41}(\rho, \tau) \sin 2\theta + \omega_{42}(\rho, \tau) \cos 4\theta + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho f_4)}{\partial \rho} \\ w_4(\rho, \theta, \tau) &= w_{41}(\rho, \tau) \sin 2\theta + w_{42}(\rho, \tau) \cos 4\theta + f_4(\rho, \tau) \\ v_4(\rho, \theta, \tau) &= v_{41}(\rho, \tau) \cos 2\theta + v_{42}(\rho, \tau) \sin 4\theta \end{aligned} \quad (2.14)$$

Решение для первого слагаемого в выражении (2.14) выглядит следующим образом:

$$\omega_{41} = G_{41}, \quad w_{41} = -\rho Q'_{41}, \quad v_{41} = \rho \frac{Q_{41}}{z}$$

где функции $Q_{41}(z)$ и $G_{41}(z)$ определяются из уравнений

$$L(Q_{41}, 1) = \left(zQ'' + (1+z)Q' - \frac{Q}{z} \right) \frac{z^2}{2\beta_2(1-e^{-z})} \quad (2.15)$$

$$G_{41} = -2Q''_{41}z - 2Q'_{41} + 2\frac{Q_{41}}{z}, \quad Q = \frac{ze^{-z}}{1-e^{-z}}Q_2$$

Для второго слагаемого в выражении (2.14) решение имеет вид

$$\omega_{42} = \frac{\rho^2}{32\pi} G_{42}, \quad w_{42} = \frac{\rho^3}{64\pi} \frac{Q'_{42}}{z}, \quad v_{42} = \frac{\rho^3}{32\pi} \frac{Q_{42}}{z^2}$$

Функции $Q_{42}(z)$ и $G_{42}(z)$ определяются из уравнений

$$L(Q_{42}, 2) = (Q'_2 Q - Q_2 Q') \frac{z^2}{2\beta_2^2(1-e^{-z})} \quad (2.16)$$

$$G_{42} = Q''_{42} + \frac{Q'_{42}}{z} - 4\frac{Q_{42}}{z^2}$$

В результате анализа и численного решения уравнений (2.15), (2.16), удовлетворяющих краевым условиям (2.13), получено, что при $z \rightarrow \infty$

$$Q_{41}(z) = \frac{\gamma_{41}}{z} + O(e^{-z}), \quad Q_{42}(z) \rightarrow z^2 + \frac{\gamma_{42}}{z^2} + O(e^{-z})$$

$$\gamma_{41} \approx 21.753, \quad \gamma_{42} \approx -68.318.$$

Из уравнения (2.12) следует, что функция $f_2(\rho, \tau)$ удовлетворяет однородному уравнению теплопроводности с нулевыми начальными и граничными условиями, и поэтому $f_2 \equiv 0$.

3. Движение центров завихренных областей. Асимптотическое решение задачи, построенное в разд. 2 для области D_2 , указывает на то, что область D_1 является областью малых возмущений в интервале времени $0 < \tau \ll \text{Re}$. При выполнении этого условия завихренность в области D_1 будет экспоненциально малой величиной и, следовательно, течение в этой области будет оставаться потенциальным.

Комплексный потенциал течения в области D_1 , соответствующий четырехчленному асимптотическому решению задачи в области D_2 , выпишем с учетом того, что скорость движения центров вихрей может отличаться от $V_0 = -\Gamma_0/4\pi l$ на величину порядка $O((\tau/\text{Re})^2)$

$$\begin{aligned} \phi + i\psi = & \frac{\Gamma_0}{2\pi i} \left(\frac{\sigma}{2x_0} + \ln \frac{\sigma - x_0}{\sigma + x_0} \right) + i \frac{\Gamma_0 \gamma_2}{\pi \beta_2} \left(\frac{\tau}{\text{Re}} \right)^2 \left(k_1 \sigma - \frac{1}{(\sigma - x_0)^2} + \frac{1}{(\sigma + x_0)^2} \right) - \\ & - i \frac{4\Gamma_0 \gamma_3}{3\pi \beta_3} \left(\frac{\tau}{\text{Re}} \right)^3 \left(k_2 \sigma - \frac{1}{(\sigma - x_0)^3} - \frac{1}{(\sigma + x_0)^3} \right) - 8\Gamma_0 \gamma_{41} \frac{\tau^2}{\text{Re}^3} \left(\frac{1}{(\sigma - x_0)^2} + \frac{1}{(\sigma + x_0)^2} \right) + \dots \end{aligned} \quad (3.1)$$

где k_1 и k_2 определяют дополнительную (относительно $V_0 = -\Gamma_0/4\pi l$) скорость смещения центров вихрей в направлении оси Y , а $\pm(x_0 - 1)$ – смещение центров вихрей в направлении оси x .

Начиная со второго приближения распределение завихренности в области D_2 становится неосесимметричным, что вызывает в области D_1 возмущения, которые индуцируют мультиполи (3.1), расположенные в точках с координатами $x = \pm x_0, y = 0$.

Величины k_1, k_2 и $x_0(\tau)$ определяются из условия сращивания решения (3.1) с последующими приближениями решения в области D_2 .

Решение в области D_2 представим в виде

$$\begin{aligned} \Omega &= \Omega^* + \frac{\Gamma_0}{l^2} \text{Re} \left[\frac{1}{\text{Re}^{5/2}} \omega_5 + \frac{1}{\text{Re}^3} \omega_6 + \frac{1}{\text{Re}^{7/2}} \omega_7 + O\left(\frac{1}{\text{Re}^4}\right) \right] \\ w &= w^* + \frac{\Gamma_0}{l} \text{Re}^{1/2} \left[\frac{1}{\text{Re}^{5/2}} w_5 + \frac{1}{\text{Re}^3} w_6 + \frac{1}{\text{Re}^{7/2}} w_7 + O\left(\frac{1}{\text{Re}^4}\right) \right] \\ v &= v^* + \frac{\Gamma_0}{l} \frac{1}{\text{Re}^{1/2}} \left[\frac{1}{\text{Re}^{3/2}} v_5 + \frac{1}{\text{Re}^2} v_6 + \frac{1}{\text{Re}^{5/2}} v_7 + O\left(\frac{1}{\text{Re}^3}\right) \right] \end{aligned}$$

где через Ω^*, w^*, v^* обозначено четырехчленное асимптотическое представление решения в области D_2 , полученное в разд. 2.

Пятое приближение определяется из уравнения

$$\begin{aligned} v_5 \frac{\partial \omega_1}{\partial \rho} + \frac{w_1}{\rho} \frac{\partial \omega_5}{\partial \theta} = & - \frac{\partial \omega_3}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 \omega_3}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \omega_3}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \omega_3}{\partial \theta^2} - \\ & - v_2 \frac{\partial \omega_3}{\partial \rho} - \frac{w_2}{\rho} \frac{\partial \omega_3}{\partial \theta} - v_3 \frac{\partial \omega_2}{\partial \rho} - \frac{w_3}{\rho} \frac{\partial \omega_2}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (3.2)$$

и системы (2.8) при $i = 5$.

Пятое приближение представляется в виде суммы четырех слагаемых

$$\omega_5(\rho, \theta, \tau) = \omega_{51}(\rho, \tau) \cos \theta + \omega_{52}(\rho, \tau) \sin 3\theta + \omega_{53}(\rho, \tau) \cos 5\theta + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho f_5)}{\partial \rho}$$

$$w_5(\rho, \theta, \tau) = w_{51}(\rho, \tau) \cos \theta + w_{52}(\rho, \tau) \sin 3\theta + w_{53}(\rho, \tau) \cos 5\theta + f_5(\rho, \tau) \quad (3.3)$$

$$v_5(\rho, \theta, \tau) = v_{51}(\rho, \tau) \sin \theta + v_{52}(\rho, \tau) \cos 3\theta + v_{53}(\rho, \tau) \sin 5\theta$$

Решение для первого слагаемого в выражении (3.3) выглядит следующим образом:

$$\omega_{51} = \frac{\tau^2}{\rho} G_{51}, \quad w_{51} = 2\tau^2 \sqrt{z} Q'_{51}, \quad v_{51} = \frac{\tau^2}{\sqrt{z}} Q_{51}$$

где функции $Q_{51}(z)$ и $G_{51}(z)$ определяются из уравнений

$$L\left(Q_{51}, \frac{1}{2}\right) = \frac{z^2 e^{-z} (1 - z - e^{-z})}{24\pi\beta_2\beta_3(1 - e^{-z})^3} Q_2 Q_3 \quad (3.4)$$

$$G_{51} = 4z^{3/2} Q''_{51} + 4\sqrt{z} Q'_{51} - \frac{Q_{51}}{\sqrt{z}}$$

Из условия равенства нулю радиальной и окружной скорости в центре вихря необходимо, чтобы $Q_{51} \sim o(\sqrt{z})$ при $z \rightarrow 0$. Отсюда и из асимптотики решения уравнения (3.4) при $z \rightarrow 0$ следуют граничные условия

$$Q_{51}(0) = 0, \quad Q'_{51}(0) = 0 \quad (3.5)$$

При $z \rightarrow \infty$ решение уравнения (3.4), удовлетворяющее граничным условиям (3.5), имеет следующую асимптотику $Q_{51}(z) = \beta_{51} \sqrt{z} + \frac{\gamma_{51}}{\sqrt{z}} + O(e^{-z})$, где $\beta_{51} \approx -0.34762$. Отличие от нуля величины β_{51} означает, что в пятом приближении распределение завихренности в области D_2 самоиндуцирует вертикальное смещение центра вихря.

Из условия срачивания решения в области D_2 решением (3.1)

$$Q_{51} \sim \sqrt{z} \frac{\gamma_2}{\pi\beta_2} \left(\frac{1}{4} - k_1 \right) \quad (z \rightarrow \infty) \quad (3.6)$$

Из соотношения (3.6) следует, что

$$k_1 = \frac{1}{4} - \frac{\pi\beta_2}{\gamma_2} \beta_{51} = 0.5 \quad (3.7)$$

Дополнительная вертикальная скорость смещения центра вихря с циркуляцией Γ_0 , которую индуцирует мультиполь, расположенный в центре вихря с циркуляцией $-\Gamma_0$, согласно (3.1), равна $\Gamma_0 \gamma_2 \tau_1^2 / 4\pi\beta_2$. Из (3.7) и (3.1) следует, что суммарная дополнительная вертикальная скорость, самоиндуцированная вихрем и индуцированная мультиполем, расположенным в центре противоположного вихря, равна $\Gamma_0 \gamma_2 \tau_1^2 / 2\pi\beta_2$.

Отличие в скорости смещения центров вихрей (2.3) в направлении оси Y от значения $V_2 = -\Gamma_0 / 4\pi l$ на величину, которая по порядку больше, чем $O(\tau_1^2)$, означало бы, что решение, полученное в разд. 2, необходимо было бы дополнить собственными решениями. Однако коэффициенты разложений этих решений в ряд Фурье удовлетворяют однородным дифференциальным уравнениям $L(Q, \alpha) = 0$ и нулевым граничным условиям, решение которых тривиально. По этой же причине x_0 не может отклоняться от 1 на величину, большую, чем $O(\tau_1^3)$.

Из анализа уравнений (3.2) следует, что $f_3 \equiv 0$. Члены, связанные с шестым приближением, не приводят к дополнительному смещению центров вихрей, поэтому рассмотрим решение задачи в области D_2 в рамках седьмого приближения. Уравнение для ω_7

$$v_7 \frac{\partial \omega_1}{\partial \rho} + \frac{w_1}{\rho} \frac{\partial \omega_7}{\partial \theta} = -\frac{\partial \omega_5}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 \omega_5}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \omega_5}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \omega_5}{\partial \theta^2} - v_2 \frac{\partial \omega_5}{\partial \rho} - \frac{w_2}{\rho} \frac{\partial \omega_5}{\partial \theta} - v_3 \frac{\partial \omega_4}{\partial \rho} - \frac{w_3}{\rho} \frac{\partial \omega_4}{\partial \theta} - v_4 \frac{\partial \omega_3}{\partial \rho} - \frac{w_4}{\rho} \frac{\partial \omega_3}{\partial \theta} - v_5 \frac{\partial \omega_2}{\partial \rho} - \frac{w_5}{\rho} \frac{\partial \omega_2}{\partial \theta}$$

необходимо решать совместно с системой (2.8) при $i = 7$.

Выписывать все слагаемые, которыми представляется седьмое приближение достаточно громоздко, поэтому ограничимся только двумя которые дают вклад в смещение центров вихрей:

$$\begin{aligned} \omega_7(\rho, \theta, \tau) &= \omega_{71}(\rho, \tau) \sin \theta + \omega_{72}(\rho, \tau) \cos \theta + \dots \\ w_7(\rho, \theta, \tau) &= w_{71}(\rho, \tau) \sin \theta + w_{72}(\rho, \tau) \cos \theta + \dots \\ v_7(\rho, \theta, \tau) &= v_{71}(\rho, \tau) \cos \theta + v_{72}(\rho, \tau) \sin \theta + \dots \end{aligned} \tag{3.8}$$

Первое слагаемое в первой части (3.8) определяет смещение центра завихренности вдоль оси X , второе слагаемое определяет дополнительное смещение центра вихря вдоль оси Y . Искомые функции в (3.8) представляются следующим образом:

$$\begin{aligned} \omega_{71} &= \frac{\tau^2}{\rho} G_{71}, & w_{71} &= -2\tau^2 \sqrt{z} Q'_{71}, & v_{71} &= \frac{\tau^2}{\sqrt{z}} Q_{71} \\ \omega_{72} &= \frac{\tau^3}{\rho} G_{72}, & w_{72} &= 2\tau^3 \sqrt{z} Q'_{72}, & v_{72} &= \frac{\tau^3}{\sqrt{z}} Q_{72} \end{aligned}$$

Функции $Q_{71}, G_{71}, Q_{72}, G_{72}$ определяются из уравнений

$$\begin{aligned} L\left(Q_{71}, \frac{1}{2}\right) &= F_1, & G_{71} &= -4z^{3/2} Q''_{71} - 4\sqrt{z} Q'_{71} + \frac{Q_{71}}{\sqrt{z}} \\ L\left(Q_{72}, \frac{1}{2}\right) &= F_2, & G_{72} &= 4z^{3/2} Q''_{72} + 4\sqrt{z} Q'_{72} - \frac{Q_{72}}{\sqrt{z}} \end{aligned} \tag{3.9}$$

где F_1 и F_2 выражаются через известные функции, полученные в предыдущих приближениях.

Аналогично тому, как это делалось при исследовании решения для функции Q_{51} , получается, что решение уравнений (3.9), удовлетворяющее граничным условиям при $\rho = 0$, имеет при $z \rightarrow \infty$ следующую асимптотику:

$$Q_{7j}(z) = \beta_{7j} \sqrt{z} + \frac{\gamma_{7j}}{\sqrt{z}} + O(e^{-z}), \quad (j = 1, 2), \quad \beta_{71} \approx -76.901, \quad \beta_{72} \approx 0.87186$$

Из условия сращивания решения в областях D_1 и D_2 следует

$$\begin{aligned} x_0(\tau) &= 1 + \frac{2\gamma_{31} - \beta_{61}}{3} \left(\frac{\tau}{\text{Re}}\right)^3 \approx 1 + 40.133 \left(\frac{\tau}{\text{Re}}\right)^3 \\ k_2 &\approx 0.86382, \quad V_0(\tau) \approx -\frac{\Gamma_0}{4\pi l} \left[1 - 8.736 \left(\frac{\tau}{\text{Re}}\right)^2 + 1.845 \left(\frac{\tau}{\text{Re}}\right)^3 \right] \end{aligned}$$

Из проведенного исследования следует, что с точностью до членов порядка $O((\tau/\text{Re})^{3/2})$ движение центра вихря с циркуляцией Γ_0 определяется скоростью, индуцированной вторым вихрем с циркуляцией $-\Gamma_0$. В более высоких приближениях дополнительная скорость движения вихря с циркуляцией Γ_0 определяется как сумма скорости самоиндуцированной самим вихрем, и скорости, индуцированной вихрем с циркуляцией $-\Gamma_0$. При этом возникает смещение центра массы завихренной области D_2 относительно центра ее завихренности. Этот результат качественно отличается от результатов, полученных в работе [4], в которой скорость самоиндуцированная вихрем с циркуляцией Γ_0 была упущена из рассмотрения.

4. Эволюция нулевой жидкой линии. Геометрическое место частиц жидкости, которые при $\tau = 0$ находились на линии $\psi = 0$, назовем нулевой жидкой линией. Для определения геометрии этой линии при $\tau > 0$ необходимо проинтегрировать уравнение, которое описывает траектории жидких частиц

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\sigma}}{d\tau} = & \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{2x_0} + \frac{1}{\sigma - x_0} - \frac{1}{\sigma + x_0} \right) + \frac{i\gamma_1}{\pi\beta_1} \left(\frac{\tau}{\text{Re}} \right)^2 \left(k_1 + \frac{2}{(\sigma - x_0)^3} - \frac{2}{(\sigma + x_0)^3} \right) + \\ & + \frac{4i\gamma_2}{3\pi\beta_2} \left(\frac{\tau}{\text{Re}} \right)^3 \left(k_2 + \frac{3}{(\sigma - x_0)^4} + \frac{3}{(\sigma + x_0)^4} \right) + 16\gamma_{31} \frac{\tau^2}{\text{Re}^3} \left(\frac{1}{(\sigma - x_0)^3} + \frac{1}{(\sigma + x_0)^3} \right) + o(\text{Re}^{-3}) \end{aligned} \quad (4.1)$$

На фиг. 2 представлены результаты численного интегрирования уравнения (4.1) при $\text{Re} = 10^3$. Наиболее заметная деформация границы нулевой жидкой линии наблюдается в окрестности линии симметрии $x = 0$. С течением времени сокращается участок линии симметрии, принадлежащий границе нулевой жидкой линии, а сама граница приобретает многовитковую структуру. В область, находящуюся между соседними витками нулевой жидкой линии, происходит затекание жидкости из области, которая является внешней относительно линии тока $\psi(x, y, 0) = 0$.

Таким образом, диффузия завихренности, происходящая в малых окрестностях вихрей, оказывает заметное влияние на движение вихрей и жидкости в области вокруг вихрей. В начальный момент времени вихри при своем движении вниз увлекают за собой жидкость, находящуюся внутри области $\psi(x, y, 0) = 0$. В последующие моменты времени влияние мультиполей приводит к тому, что область, ограниченная нулевой линией тока, расширяется с течением времени, что приводит к росту количества жидкости, увлекаемой вниз вихрями, а следовательно, и к уменьшению скорости опускания вихрей.

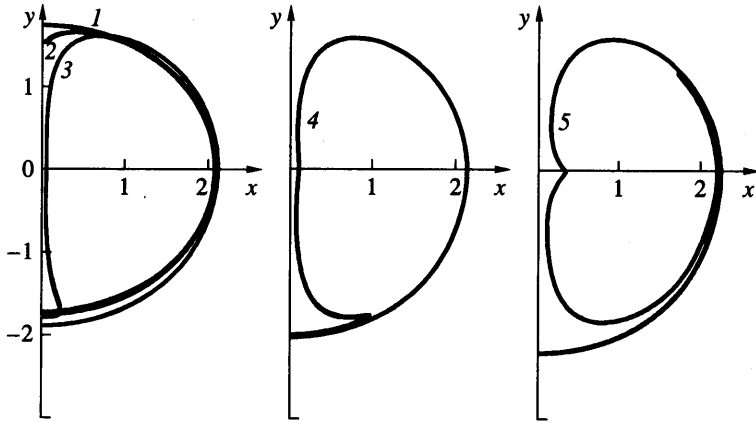
5. Область слабых возмущений. При $\tau \ll \text{Re}$ величина завихренности в области D_1 является экспоненциально малой величиной, поэтому в этой области течения задача об определении завихренности сводится к решению уравнений (1.1) при заданном потенциальном поле скоростей. Функцию тока ψ и потенциал течения ϕ , определенных в системе координат, связанной с центрами вихрей, и отнесенных к Γ_0 , примем за независимые переменные. В переменных τ, ϕ, ψ уравнение (1.1) запишется в виде

$$\frac{1}{V^2} \frac{\partial \omega}{\partial \tau} + \frac{\partial \omega}{\partial \phi} = \text{Re}^{-1} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \psi^2} \right) + O \left(\frac{\tau}{\text{Re}^2} \sqrt{\left(\frac{\partial \omega}{\partial \phi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial \psi} \right)^2} \right) \quad (5.1)$$

$$\omega = \Omega \frac{V^2}{\Gamma_0 \text{Re}}, \quad V = \left| \frac{d(\phi + i\psi)}{d\sigma} \right|_{\tau=0}$$

где V – модуль скорости потенциального течения при $\tau = 0$.

Пусть $\omega = \omega_*(\phi, \psi, \tau, \text{Re})$ является решением задачи о диффузии вихря с интенсивностью Γ_0 в заданном потенциальном поле скоростей. Тогда в силу линейности уравне-



Фиг. 2. Геометрия нулевой жидкой линии (правая половина течения) при $\tau/Re = 0; 0.05; 0.1; 0.12; 0.15$ (кривые 1–5 соответственно)

ния (5.1) и антисимметричного характера распределения завихренности относительно оси $x = 0$ запишем решение задачи о диффузии двух вихрей с интенсивностью $\pm\Gamma_0$

$$\omega = \omega_*(\varphi, \psi, \tau, Re) - \omega_*(\varphi, -\psi, \tau, Re)$$

Из условия сращивания решений в областях D_2 и D_1 определяется вид решения для завихренности $\omega_* = B(\varphi, \psi, \tau, Re)\exp(-A(\varphi, \psi, \tau)Re)$. Подставляя ω_* в уравнение (5.1) и собирая члены при одинаковых степенях малого параметра, получим уравнения для определения функций A и B

$$\frac{1}{V^2}A_\tau + A_\varphi^2 + A_\psi^2 + A_\varphi = 0, \tag{5.2}$$

$$\frac{1}{V^2}B_\tau + 2(A_\varphi B_\varphi + A_\psi B_\psi) + B_\varphi + B(A_{\varphi\varphi} + A_{\psi\psi}) = 0 \tag{5.3}$$

Граничные условия для функций A и B следуют из условия сращивания решений в областях D_1 и D_2 , из требования цикличности решения в области с замкнутыми линиями тока $D_1^{(1)}$ (область $D_1^{(1)}$ ограничена линией тока $\psi(x, y, \tau) = 0$) и условия затухания ω в бесконечно удаленных точках области $D_1^{(2)}$ (область $D_1^{(2)}$ – внешняя по отношению к $D_1^{(1)}$)

$$A \rightarrow \frac{1}{4\tau}e^{-4\pi\psi^{-1}}, \quad B \rightarrow \frac{1}{4\pi\tau} (\psi \rightarrow +\infty, (x-1)^2 + y^2 \rightarrow 0) \tag{5.4}$$

$$A(\varphi, \psi, \tau) = A(\varphi + 1, \psi, \tau), \quad B(\varphi, \psi, \tau) = B(\varphi + 1, \psi, \tau) \quad (\psi \in D_1^{(1)}) \tag{5.5}$$

$$\omega \rightarrow 0 \quad (|\varphi| \rightarrow \infty, \psi \in D_1^{(2)}) \tag{5.6}$$

Решение уравнений (5.2)–(5.6) будем искать на временах $1 \ll \tau \ll Re$. Вид граничных условий (5.4) указывает на то, что решение уравнений (5.2), (5.3) можно представить в виде следующего асимптотического ряда:

$$A(\varphi, \psi, \tau) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{A_j(\varphi, \psi)}{\tau^j}, \quad B(\varphi, \psi, \tau) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{B_j(\varphi, \psi)}{\tau^j}$$

Функции A_k, B_k , удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$A_{1\varphi} = B_{1\varphi} = 0$$

$$A_{k\varphi} = \frac{k-1}{V^2} A_{k-1} - \sum_{j=1}^{k-1} (A_{j\varphi} A_{(k-j)\varphi} + A_{j\psi} A_{(k-j)\psi}), \quad k \geq 2 \quad (5.7)$$

$$B_{k\varphi} = \frac{k-1}{V^2} B_{k-1} - \sum_{j=1}^{k-1} [2(A_{j\varphi} B_{(k-j)\varphi} + A_{j\psi} B_{(k-j)\psi}) + B_j (A_{(k-j)\varphi\varphi} + A_{(k-j)\psi\psi})], \quad (5.8)$$

$$k \geq 2$$

Из граничного условия (5.6) следует, что в той области течения, где линии тока незамкнуты (область $D_1^{(2)}$) $A_k = B_k = 0 (k \geq 1)$, т.е. диффузия завихренности локализуется в области, ограниченной линии $\psi(x, y, \tau) = 0$.

В области с замкнутыми линиями тока (область $D_1^{(1)}$) уравнения для $A_1(\psi)$ и $B_1(\psi)$ определяются в результате интегрирования по φ соотношений (5.7) и (5.8) при $k = 2$ и выполнения условия (5.5):

$$A_{1\psi}^2 - A_1 \int_0^1 \frac{d\varphi}{V^2} = 0, \quad 2A_{1\psi} B_{1\psi} + B_1 \left(A_{1\psi\psi} - \int_0^1 \frac{d\varphi}{V^2} \right) = 0$$

Решение этих уравнений, удовлетворяющее условию (5.4), имеет вид

$$A_1(\psi) = \frac{1}{4} \left[\int_{\psi}^{\infty} \left(\int_0^1 \frac{d\varphi}{V^2} \right)^{1/2} d\psi \right]^2, \quad B_1(\psi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\Lambda}} \sqrt{\frac{A_1}{A_{1\psi}}}$$

Суммарная завихренность в области $D_1^{(1)}$ при $\text{Re}^{1/2} \ll \tau \ll \text{Re}$ представляется в виде

$$\omega = \frac{B_1(\psi)}{\tau} e^{-A_1(\psi)\text{Re}/\tau} - \frac{B_1^*(\psi)}{\tau} e^{-A_1^*(\psi)\text{Re}/\tau} \quad (5.9)$$

$$A_1^*(\psi) = \frac{1}{4} \left[\int_{-\infty}^{\psi} \left(\int_0^1 \frac{d\varphi}{V^2} \right)^{1/2} d\psi \right]^2, \quad B_1^*(\psi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\Lambda}} \sqrt{\frac{A_1^*}{A_{1\psi}^*}}$$

Таким образом, в области $D_1^{(1)}$ имеет место эффект частичной “аннигиляции” завихренности – поток завихренности через каждую из двух симметрично расположенных относительно оси y половинок области будет функцией от времени.

Из соотношения (5.9) следует, что $\omega \rightarrow 0$ при $\psi \rightarrow 0$, т.е. при переходе через границу областей $D_1^{(1)}$ и $D_1^{(2)}$ и при переходе через линию симметрии $y = 0$ величина завихренности не разрывается, а претерпевает разрыв $d\omega/d\psi$. Это означает, что в окрестности линии $\psi(x, y, \tau) = 0$ следует ввести в рассмотрение тонкий пограничный слой ($D_1^{(3)}$), в котором функция $d\omega/d\psi$ меняется непрерывным образом. Течение в этом слое не оказывает глобального влияния на процесс диффузии завихренности в области $D_1^{(1)}$. Вместе с тем этот пограничный слой является источником слабого “вихревого следа” за кластером.

6. Решение задачи при $\tau \sim \text{Re}$. Из решения задачи, полученного при $\tau \sim O(1)$, следует, что в области D_1 завихренность течения становится величиной порядка единицы при $\tau \sim O(\text{Re})$. В подвижной системе координат (2.1) уравнение Гельмгольца перепишем в виде

$$u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \text{Re}^{-1} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} - \frac{\partial \omega}{\partial \tau_1} \right) \quad (6.1)$$

$$\Omega = \frac{\Gamma_0}{l^2} \omega, \quad U = \frac{\Gamma_0}{l} u, \quad V = \frac{\Gamma_0}{l} v$$

Асимптотическое решение задачи, полученное при $\tau/\text{Re} \ll 1$ и уравнение (6.1) указывают на то, что, на временах $\tau_1 = \tau/\text{Re} \sim O(1)$ решение в главном приближении будет зависеть от переменных τ_1 и ψ :

$$\omega(x, y, \tau_1, \text{Re}) = \omega_0(\psi, \tau_1, \text{Re}) + O(\text{Re}^{-1})$$

Очевидно, что в области $D_1^{(2)}$, где линии тока берут свое начало в бесконечно удаленных точках, течение является потенциальным, т.е. $\omega(x, y, \tau_1, \text{Re}) \equiv 0$. В области $D_1^{(1)}$, где линии тока замкнуты, функция тока удовлетворяет в первом приближении уравнению

$$\Delta \psi = -\omega_0 \quad (6.2)$$

Для определения зависимости $\omega_0(\psi, \tau_1, \text{Re})$ используем подход, предложенный в работе [5]. Уравнение движения, записанные в векторной форме

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + \nabla H = -\text{Re}^{-1} \left(\nabla \times \boldsymbol{\omega} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau_1} \right)$$

проинтегрируем вдоль замкнутой линии тока $\psi = \text{const}$. В результате получим

$$\frac{\partial \gamma_0}{\partial \tau_1} = \omega_0 \frac{\partial \sigma}{\partial \tau_1} - \gamma_0 \frac{\partial \omega_0}{\partial \psi} \quad (6.3)$$

$$\Gamma = \Gamma_0(\gamma_0(\psi, \tau_1, \text{Re}) + O(\text{Re}^{-1})), \quad \gamma_0 = \iint_{\sigma} \omega_0 dx dy \quad (6.4)$$

где $\sigma(\psi, \tau_1, \text{Re})$ – площадь, ограниченная контуром $\psi = \text{const}$, а Γ – циркуляция скорости вдоль этого контура.

Первый член в правой части (6.3) определяет изменение циркуляции за счет расширения контура $\psi = \text{const}$, второе слагаемое определяет изменение циркуляции за счет диффузии завихренности через границу области, ограниченной контуром $\psi = \text{const}$.

Легко показать, что для функции σ справедливо уравнение

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \psi} = \oint_{\psi = \text{const}} \frac{ds}{\sqrt{(\partial \psi / \partial x)^2 + (\partial \psi / \partial y)^2}} \quad (6.5)$$

Таким образом, для неизвестных функций ω_0 , γ_0 , ψ , σ получена замкнутая система уравнений (6.2)–(6.5), не зависящая от числа Рейнольдса.

Так как при расширении вихревого кластера происходит захват частичек жидкости из области потенциального течения, необходимо положить, что

$$\omega_0 = 0 \quad (\psi = 0) \quad (6.6)$$

Из (6.3), (6.6) следует соотношение, определяющее скорость изменения потока завихренности через границу правой половины вихревого кластера ($\psi = 0$)

$$\frac{\partial \gamma_0}{\partial \tau_1} = -\gamma_0 \left(\frac{\partial \omega_0}{\partial \psi} \right) \Big|_{\psi=+0} \leq 0 \quad (6.7)$$

Необходимо отметить, что $(\partial \omega_0 / \partial \psi)|_{\psi=+0}$ не может равняться нулю, так как в противном случае при $\psi \rightarrow +0$ имело бы место $\partial^n \omega_0 / \partial \psi^n = 0$, ($n \geq 1$), и следовательно, область $D_1^{(1)}$ оставалась бы незавихренной при $\tau_1 \sim O(1)$.

На линии, разделяющей области вихревого и потенциального течения, имеет место разрыв производной $\partial \omega_0 / \partial \psi$, поэтому в окрестности этой линии ($\psi = 0$) возникает вязкий слой смешения – область $D_1^{(3)}$ (фиг. 1), толщина которого $\delta \sim Re^{-1/2}$. В окрестности верхней критической точки B этот слой расщепляется на две части: его внешняя часть ($\psi < 0$) дает начало вихревому следу за кластером (область $D_1^{(4)}$), а его внутренняя часть ($\psi > 0$), разворачиваясь в окрестности точки B , образует замкнутый вязкий вихревой слой, лежащий внутри кластера в окрестности линии $\psi = 0$ (область $D_1^{(5)}$). Естественно полагать, что течение в этом замкнутом вязком слое имеет стационарный и, следовательно, циклический характер.

Так как поток завихренности через область $D_1^{(5)}$ является величиной порядка $O(Re^{-1})$, соотношение (6.7), определяющее изменение полной циркуляции γ_0 по времени, остается справедливым. Следовательно, та доля вихревого потока $\gamma_0(\partial \omega_0 / \partial \psi)|_{\psi=0}$, которая диффундирует через границу области вихревого и потенциального течения, попадает во внешнюю часть слоя смешения и переносится в вихревой след, в котором происходит его диссипация. Оставшаяся доля $\gamma_0(\partial \omega_0 / \partial \psi)|_{\psi=0}$ диссипирует при диффузии завихренности в левую половину вихревого кластера, где $\omega < 0$.

Исследуем решение уравнений (6.2)–(6.5) при $\tau_1 \gg 1$. При нестационарном течении вязкой несжимаемой жидкости сохраняется импульс вихря [6]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\Omega}) dx dy = \text{const} \quad (6.8)$$

Из уравнения (6.3) и условий (6.6), (6.8) следует, что $\omega_0 \rightarrow 0$, $\sigma|_{\psi=0} \rightarrow \infty$ при $\tau_1 \rightarrow \infty$. Если предположить, что при $\tau_1 \rightarrow \infty$ граница вихревого кластера расширяется по степенному закону $x \sim y \sim \tau_1^n$, тогда из условия (6.8) и уравнений (6.2)–(6.5) следует, что $n = 1/2$, а решение задачи в первом приближении по τ_1 имеет автомодельный вид

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \tau_1^{-1/2} \gamma_*(\Psi_*), & \omega_0 &= \tau_1^{-3/2} \omega_*(\Psi_*) \\ \sigma &= \tau_1 \sigma_*(\Psi_*), & \psi &= \tau_1^{-1/2} \psi_*(\xi, \eta) \\ x &= \tau_1^{1/2} \xi, & y &= \tau_1^{1/2} \eta \end{aligned} \quad (6.9)$$

Уравнение (6.3) сводится к стационарному виду

$$\gamma_* \left(\frac{\partial \omega_*}{\partial \Psi_*} - \frac{1}{2} \right) - \omega_* \sigma_* = 0 \quad (6.10)$$

Уравнения (6.2), (6.4), (6.5) остаются без изменения.

Из уравнения (6.10) следует, что

$$\frac{d\omega_*}{d\psi_*} = \frac{1}{2} (\psi_*^* = 0), \quad \frac{d\omega_*}{d\psi_*} = \frac{3}{2} (\psi_* = \psi_{*max})$$

где ψ_{*max} – значение ψ_* в центре завихренности.

За исключением малой окрестности критических точек A и B (фиг. 1), уравнение для завихренности в слое смешения имеет вид

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \varphi} = \frac{\partial^2 \lambda}{\partial q^2} \tag{6.11}$$

$$\omega_* = Re^{-1/2} \tau_1^{1/4} \lambda(\varphi, q), \quad \psi_* = Re^{-1/2} \tau_1^{1/4} q, \quad \varphi = \int_0^s v_s ds$$

где $\tau_1^{-1} v_s(\xi, \eta)$ – модуль скорости на линии $\psi_* = 0$, $\tau_1^{1/2} s$ – длина дуги, отсчитываемая от нижней критической точки A вдоль линии тока $\psi_* = 0$.

Граничные условия для уравнения (6.11):

$$\frac{d\lambda}{dq} \rightarrow \frac{\partial \omega_*}{\partial \psi_*} \Big|_{\psi_* = 0} \quad (q \rightarrow \infty, 0 < \varphi < \varphi_A) \tag{6.12}$$

$$\lambda \rightarrow 0 \quad (q \rightarrow -\infty, 0 < \varphi < \varphi_B), \quad \lambda = 0 \quad (q = 0, \varphi_B < \varphi < \varphi_A)$$

Уравнение (6.11) и граничные условия (6.12) не зависят от времени, поэтому их решение также не зависит от времени. Однако время τ_1 вошло в преобразование величин λ, q, φ . Отсюда следует, что при $\tau_1 \sim Re^2$ толщина слоя смешения становится величиной порядка размера основной части кластера. Такая же оценка для времени разрушения автомодельного режима течения получается из сравнения первого и второго приближения в асимптотическом разложении для завихренности при $\tau_1 \gg 1$, которое следует из (6.1) и (6.9)

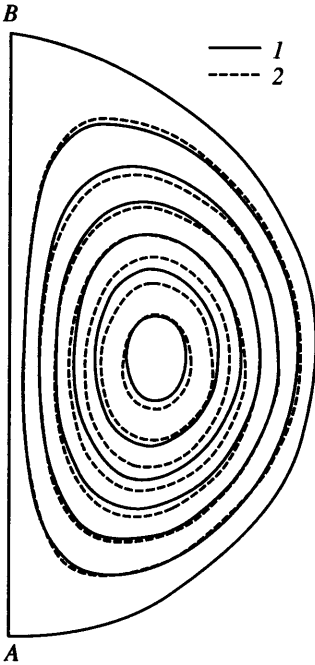
$$\omega = \tau_1^{-3/2} \omega_*(\psi_*) + Re^{-1} \tau_1^{-1} \omega_1(\xi, \eta)$$

Следовательно, автомодельный режим течения возникает на временах $\tau_1 \gg 1$ и разрушается при $\tau_1 \sim Re^2$.

На временах $\tau_1 \sim Re^2$ или $\tau \sim Re^3$ размеры завихренной области становится достаточно большими $x \sim y \sim O(Re)$, а завихренность – малой величиной $\omega \sim O(Re^{-3})$. Суммарная циркуляция правой (или же левой) половины вихревого кластера $\gamma \sim O(Re^{-1})$. Время оборота жидкой частицы внутри кластера (порядка Re^3) сравнимо со временем существования кластера. В таком течении вязкие и инерционные члены в уравнении (6.1) имеют одинаковый порядок малости. На еще больших временах будет происходить дальнейшее увеличение размера кластера и уменьшение его циркуляции. При этом величина импульса вихря (6.8) по-прежнему сохраняется.

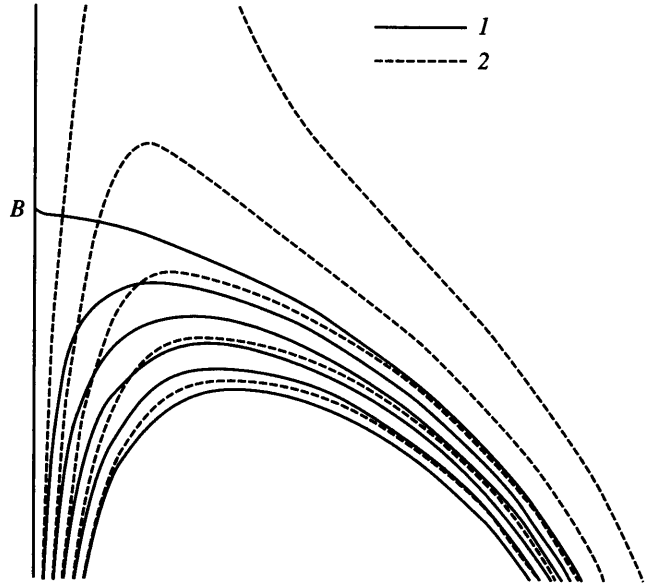
Асимптотическое решение задачи о диффузии двух вихрей с циркуляциями противоположного знака применимо и к предельной форме их начального расположения: $l \rightarrow 0, \Gamma_0 \rightarrow \infty$ при $M = \Gamma_0 = const$, т.е. к вихревому диполу. В этом случае автомодельный режим течения будет существовать на временах $0 < t \ll M^2/\nu^3$.

7. Численное решение задачи о диффузии двух вихрей. Основная трудность в численном интегрировании уравнений (1.1), (1.2) с начальными и граничными условиями (1.3)–(1.5) заключается в том, что поля скоростей и завихренности имеют особенность при $\tau = 0$, поэтому при численном расчете использованы начальные данные, вычис-



Фиг. 3.

Фиг. 3. Численный расчет при $\tau_1 = 1$. Правая половина течения: 1 – $\Psi = \text{const}$ (от 0 до 0.06 с шагом 0.01); 2 – $\Omega = \text{const}$ (от 0.01 до 0.07 с шагом 0.01)



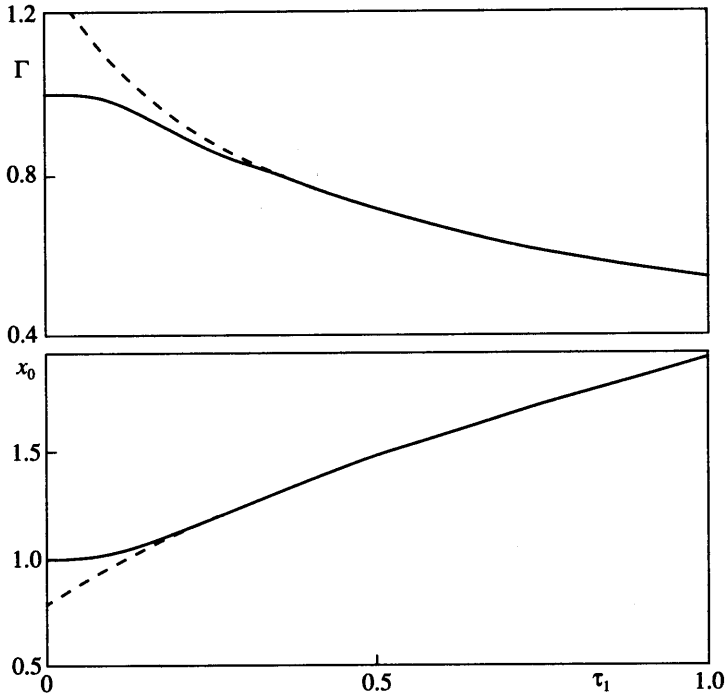
Фиг. 4.

Фиг. 4. Численный расчет при $\tau_1 = 1$. Правая половина течения. Окрестность точки B : 1 – $\Psi = \text{const}$ (от 0 до 0.01 с шагом 0.002); 2 – $\Omega = \text{const}$ (от 0.002 до 0.01 с шагом 0.002)

ленные при $\tau/\text{Re} = 0.01$ с помощью трех первых приближений асимптотической теории, описанной выше. Выполненный таким образом расчет позволяет получить решение на временах $\tau \sim \text{Re}$. Численный расчет проводился при следующих параметрах: $\text{Re} = 1000$, $\Gamma_0 = 1$, $l = 1$. Искомые функциями были функция тока и завихренность. Из-за роста размера завихренной области размеры расчетной области менялись с течением времени. Использована неявная схема метода чередующихся направлений, имеющая второй порядок точности как по пространству, так и по времени [7]. Шаг по пространству в конечно-разностной схеме был принят $\Delta x = \Delta y = 0.005$, а по времени – $\Delta \tau/\text{Re} = 0.0001$. Расчет проводился до времени $\tau_1 = 1$.

Численные расчеты подтвердили предположение о том, что в главном приближении завихренность постоянна вдоль линии тока (фиг. 3).

Из данных численного расчета следует, что сценарий развития пограничного слоя следующий. Пограничный слой, сглаживающий разрыв в производной завихренности, располагается вдоль внешней части линии $\Psi = 0$. Толщина пограничного слоя увеличивается по мере движения от точки A до точки B . Та часть пограничного слоя, которая соответствует $\Psi < 0$, образует “вихревой след” за кластером, другая часть пограничного слоя, которая соответствует $\Psi > 0$, поворачиваясь около точки B , движется вдоль линии $X = 0$. В окрестности точки B происходят сильные изменения ω вдоль линии $\Psi = \text{const}$. При движении вдоль линии $X = 0$ течение довольно быстро выходит на зависимость $\Omega = \Omega(\Psi)$. На фиг. 4 изображена правая часть вихревого кластера в окрестности точки B .

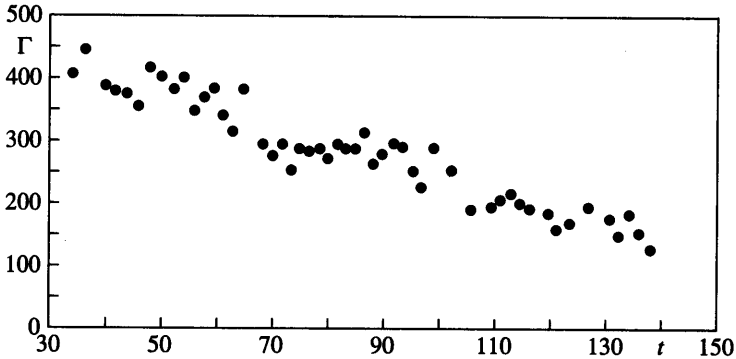


Фиг. 5. Зависимость циркуляции и абсциссы центра положительного вихря от времени

Автомодельное поведение характеристик течения (6.9) хорошо подтверждается численными расчетами. На фиг. 5 представлена зависимость $X_0(\tau_1)$ и $\Gamma(\tau_1)$. Циркуляция рассчитана как интеграл от завихренности по правой полуплоскости. На этих же фигуре пунктирной линией приведены зависимости $X_0(\tau_1) = C\sqrt{\tau_1 + \mu}$, $\Gamma(\tau_1) = \gamma/\sqrt{\tau_1 + \mu}$. Величины C , γ , μ подобраны с помощью данных, полученных численным путем. $C \approx 1.7550$, $\gamma \approx 0.59315$, $\mu \approx 0.20244$. Сравнение результатов, представленных на фиг. 5, показывает, что расчетные и аналитические кривые для величин $X_0(\tau_1)$ и $\Gamma(\tau_1)$ неразличимы, начиная с $\tau_1 \approx 0.4$. С этого момента течение выходит на автомодельный режим. Таким образом, при $Re = 1000$ достаточно получить численный результат при $\tau_1 \approx 0.4$, а при больших временах решение можно получить из этого результата с помощью автомодельных преобразований.

На фиг. 6 приведена зависимость циркуляции вихрей от времени, измеренная в следе за самолетом DC-10-30 [8]. Хотя эволюция следа за самолетом происходит в турбулентной атмосфере, падение циркуляции аналогично изображенному на фиг. 5. Возможно, что и при эволюции вихревого следа в турбулентной атмосфере падение циркуляции в основном определяется диффузией вихрей через границу вихревого кластера.

Заключение. Исследована задача о диффузии двух вихрей, которые в начальный момент времени имеют интенсивность $\pm\Gamma_0$ и удалены друг от друга на расстояние $2l$. При $Re = \Gamma_0 l^2 \gg 1$ и $\tau = t\Gamma_0/l^2 \ll Re$ завихренность течения локализуется в окрестности центров вихрей и имеет неосесимметричное распределение. По этой причине во внешнем поле течения индуцируются нестационарные потенциальные возмущения, эквивалентные действию мультиполей, интенсивность которых зависит от τ . Вихрь с интенсивностью Γ_0 самоиндуцирует скорость движения своего центра по порядку такую



Фиг. 6. Зависимость циркуляции ($\text{м}^2/\text{с}$) вихрей от времени (с), измеренной в следе за самолетом DC-10-30 (из работы [8])

же, которая возникает из-за влияния мультиполей, расположенных в центре вихря противоположного знака. Мультиполи вовлекают во вращательное движение частички жидкости, приходящие из бесконечно удаленных точек, вследствие чего область рециркуляционного течения расширяется, расстояние между вихрями увеличивается, а скорость опускания вихрей уменьшается.

При $\tau \sim O(\text{Re})$ в области, ограниченной замкнутой линией тока $\psi(x, y, \tau) = 0$, завихренность течения становится величиной порядка единицы. Вне этой области течение остается потенциальным. На границе областей возникает вязкий слой смешения, сглаживающий разрыв $d\omega/d\psi$. Получена замкнутая система нестационарных уравнений, не зависящая от Re , решение которой определяет диссипацию потока завихренности через правую (или же левую) половину вихревого кластера.

При $\tau/\text{Re} \gg 1$ нестационарное течение выходит на автомодельный режим, который разрушается при $\tau \sim O(\text{Re}^3)$.

Численное решение двумерных нестационарных уравнений Навье–Стокса, полученное при $\text{Re} = 1000$, подтверждает результаты аналитического исследования. В основной части течения завихренность является функцией от функции тока. Численное решение выходит на автомодельный режим, когда $\tau/\text{Re} > 0.4$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 01-01-00190).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ламб Г. Гидродинамика М.; Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
2. Greene G.C. An approximate model of vortex decay in the atmosphere // J. Aircraft. 1986. V. 23. № 7. P. 566–573.
3. Adams M.C., Sears W.R. Slender-body theory – review and extension // J. Aeronaut. Sci. 1953. V. 20. № 2. P. 85–98.
4. Dagan A. Pseudo-spectral and asymptotic sensitivity investigation of counter-rotating vortices // Computers and Fluids. 1989. V. 17. № 4. P. 509–525.
5. Batchelor G.K. On steady laminar flow with closed streamlines at large Reynolds number // J. Fluid Mech. 1956. V. 1. Pt 2. P. 177–190.
6. Лаврентьева М.А., Шабат Б.В. Проблемы гидродинамики и их математических модели. М.: Наука, 1977. 407 с.
7. Роуч П.Дж. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980. 616 с.
8. Sarpkaya T. New model for vortex decay in the atmosphere // J. Aircraft. 2000. V. 37. № 1. P. 53–61.