

УДК 532.526.2:533.6.011.5

© 2004 г. И. И. ЛИПАТОВ, В. В. ТЕШУКОВ

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ И СЛАБЫЕ РАЗРЫВЫ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

Анализируются процессы распространения волновых возмущений в сверхзвуковом пограничном слое с самоиндуцированным давлением [1–4]. Применение нового математического аппарата, теории характеристик для систем дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами [5–8], позволило найти обобщенные характеристики дискретного и непрерывного спектра основной системы уравнений. Показано, что разрывы производных решения уравнений пограничного слоя сосредоточены на обобщенных характеристиках. Установлено, что в процессе эволюции течения амплитуда слабого разрыва (разрыва производных) может обращаться в бесконечность, что свидетельствует о возможности “опрокидывания” нелинейных волн, распространяющихся в пограничном слое.

Ключевые слова: пограничный слой, вязко-невязкое взаимодействие, слабые разрывы, интегродифференциальные уравнения.

При исследовании течения в пограничных слоях, возникающих при обтекании тел сверхзвуковым высокоскоростным потоком газа, было обнаружено [1–4], что классические подходы теории Прандтля должны быть модернизированы в связи с необходимостью учета вытесняющего действия пограничного слоя уже в первом приближении. В работах [1–4, 8–10] были сформулированы новые постановки задач теории пограничного слоя, в которых давление считается неизвестной величиной, определяемой через толщину вытеснения пограничного слоя (модели с самоиндуцированным давлением). Модели этого класса называют также моделями вязко-невязкого взаимодействия в связи с тем, что при определении параметров движения в области “невязкого” течения учитывается толщина вытеснения пограничного слоя. Указанные обстоятельства, с одной стороны, усложняют исследование, а с другой – позволяют обнаружить новые физические эффекты и использовать при анализе распространения волновых возмущений в пограничных слоях аналогии с распространением нелинейных волн на сдвиговом потоке жидкости, ограниченном свободной поверхностью.

В данной работе будет показано, что нелинейность волновых процессов может приводить к “опрокидыванию” волн и формированию новых особенностей течения типа скачков (разрывов самих функций). При этом существенно изменяются локальные и интегральные характеристики потока в окрестности обтекаемых тел, и поэтому моделирование таких процессов имеет важное значение для некоторых задач аэродинамики. Так, например, анализ известных экспериментальных данных позволяет предположить, что нелинейные волновые процессы играют существенную роль в процессе формирования псевдоскачка, возникающего при торможении сверхзвукового потока в канале. Создание адекватных математических моделей этого сложного явления необходимо и для решения технических проблем, связанных с разработкой прямоточных воздушно-реактивных двигателей.

Вопросам моделирования процессов распространения возмущений в сверхзвуковых пограничных слоях посвящено много работ. В частности, в работах [11–13] на основе подходов, предложенных в [9] и [14], были найдены скорости распространения неста-

ционарных возмущений в условиях сильного и слабого вязко-невязкого взаимодействия в плоском и пространственном случаях.

В данной работе будет использоваться новый метод анализа волновых процессов в жидкостях и газах, основанный на обобщении теории характеристик для систем интегродифференциальных уравнений [5–8]. Будет выполнен полный анализ обобщенных характеристик модели сверхзвукового пограничного слоя с самоиндуцированным давлением, получены транспортные уравнения для амплитуды слабых разрывов (разрывов производных решений) и установлена возможность нелинейного “опрокидывания” волн, распространяющихся в пограничном слое.

1. Постановка задачи. Рассмотрим обтекание плоской пластинки, расположенной под нулевым углом атаки к набегающему гиперзвуковому потоку вязкого теплопроводного газа. Движение будем описывать приближенными уравнениями, получаемыми из системы Навье–Стокса асимптотическим разложением, основанном на предположении

$$M_0 = \frac{U_0}{c_0} \rightarrow \infty, \quad \tau = \left(\frac{\mu_0}{\rho_0 U_0 L_0} \right)^{1/4} \rightarrow 0$$

Здесь M_0 – число Маха, $\mathbf{u}_0 = (U_0, 0)$ – вектор скорости, c_0 – скорость звука, ρ_0 – плотность газа, μ_0 – коэффициент вязкости (величины с нулевым индексом обозначают параметры набегающего потока), масштаб L_0 характеризует размер тела, τ – безразмерный поперечный масштаб пограничного слоя. Согласно [2], область за ударной волной разбивается на две подобласти, в первой из которых течение асимптотически близко к невязкому (см. фигуру). В этих подобластях вводим безразмерные переменные $x = X/L_0$, $y = Y/L_0\tau$, $t = TU_0/L_0$, где X, Y, T – размерные декартовы координаты и время. Представим искомые функции в области “1” в виде

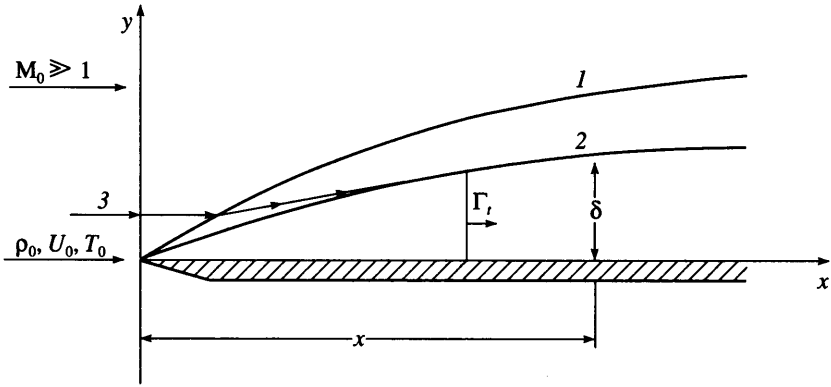
$$\begin{aligned} U &= U_0[1 + \tau^2 u + \dots], & V &= U_0[\tau v + \dots] \\ P &= \gamma P_0 M_0^2 [\tau^2 p + \dots], & R &= R_0[\rho + \dots] \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь U, V, P, R – размерные компоненты вектора скорости, давление, плотность, а соответствующими малыми буквами обозначены безразмерные главные члены асимптотического разложения. В области “1”, ограниченной фронтом ударной волны $y = g(x, t)$ и границей $y = \delta(x, t)$, должны выполняться уравнения:

$$\begin{aligned} \rho_t + \rho_x + (\rho v)_y &= 0 \\ v_t + v_x + v v_y + \rho^{-1} p_y &= 0 \\ \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right)_t + \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right)_x + v \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right)_y &= 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

где γ – показатель политропы. На ударном фронте $y = g(x, t)$ потребуем выполнения условий Гюгонио (выписаны главные члены разложения по малому параметру τ):

$$\begin{aligned} p &= \frac{2}{\gamma+1} (g_t + g_x)^2 - \frac{1}{\gamma\chi^2} \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \\ v &= \frac{2}{\gamma+1} (g_t + g_x) \left[1 - \frac{1}{\chi^2} (g_t + g_x)^{-2} \right] \\ \rho &= \left[\frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \frac{2}{\gamma+1} \frac{1}{\chi^2} (g_t + g_x)^{-2} \right]^{-1} \end{aligned} \quad (1.3)$$



Картина течения: 1 – ударный слой, 2 – внешняя граница пограничного слоя, 3 – траектория частицы

а на границе области пограничного слоя $y = \delta(x, t)$ – условия

$$v = \delta_t + \delta_x \quad (1.4)$$

Из (1.4) вытекает, что область $0 < y < \delta(x, t)$, занятая пограничным слоем, в асимптотическом пределе ограничена контактной характеристикой $y = \delta(x, t)$ [2]. В (1.3) $\chi = M_0 \tau$ – параметр гиперзвукового взаимодействия. В области “2” введем следующие асимптотические представления:

$$\begin{aligned} U &= U_0[u + \dots], \quad V = U_0[\tau v + \dots], \quad H = U_0^2[h + \dots] \\ P &= \gamma P_0 M_0^2[\tau^2 p + \dots], \quad R = R_0[\tau^2 r + \dots], \quad \mu_1 = \mu_0[\mu + \dots] \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$H = \frac{U^2}{2} + \frac{\gamma P}{(\gamma - 1)R}$$

Здесь H – полная энтальпия, μ_1 – размерный коэффициент вязкости. Отбрасывая малые величины в полных уравнениях Навье–Стокса, получаем систему уравнений пограничного слоя

$$\begin{aligned} \rho(u_t + uu_x + vu_y) + p_x &= (\mu u_y)_y, \quad p_y = 0 \\ \rho_t + (\rho u)_x + (\rho v)_y &= 0 \\ \rho(h_t + uh_x + vh_y) - p_t &= \left(\frac{\mu}{Pr} h_y\right)_y + \left(\mu \left(1 - \frac{1}{Pr}\right) uu_y\right)_y \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$h = \frac{u^2}{2} + \frac{\gamma}{(\gamma - 1)\rho} p, \quad Pr = \frac{\mu c_p}{\kappa}$$

Здесь Pr – число Прандтля, κ – коэффициент теплопроводности, c_p – удельная теплоемкость при постоянном давлении, h – полная энтальпия. Система (1.6), дополненная граничными условиями

$$\begin{aligned} u(x, 0, t) = v(x, 0, t) = 0, \quad h(x, 0, t) = h_0 \\ u(x, \delta, t) = 1, \quad v(x, \delta, t) = \delta_t + \delta_x, \quad h(x, \delta, t) = 1/2 \end{aligned} \quad (1.7)$$

является незамкнутой, поэтому требуется дополнительное условие для определения давления p . Как и в работах [1–3], для замыкания модели используем приближение “касательного клина”. Потребуем, чтобы при $y = \delta(x, t)$ выполнялось соотношение

$$p = \frac{\gamma + 1}{4} v^2 + v \left[\frac{1}{\chi^2} + \left(\frac{\gamma + 1}{4} v \right)^2 \right]^{1/2} + \frac{1}{\gamma \chi^2}$$

Эта связь между p и v получается из первых двух соотношений Гюгонио (1.3) в результате исключения величины $g_t + g_x$. Данное условие позволяет определять давление на ударной волне, если задана скорость v за фронтом ударной волны. В рассматриваемой приближенной теории постулируется, что данное соотношение выполнено также в каждой точке границы $y = \delta(x, t)$ области, занятой пограничным слоем. В дальнейшем удобно записывать это соотношение в виде, разрешенном относительно v

$$v = f(p) = \left(p - \frac{1}{\gamma \chi^2} \right) \left(\frac{\gamma + 1}{2} p + \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \frac{1}{\chi^2} \right)^{-1/2} \quad (1.8)$$

Сформулированная выше постановка нестационарной задачи полностью аналогична стационарной постановке [2]. Получаемые результаты будут справедливы как в случае умеренного, так и сильного вязко-невязкого взаимодействия (когда χ конечно или χ велико).

2. Преобразование уравнений пограничного слоя. Преобразуем уравнение состояния газа в области “2” к безразмерному виду

$$\frac{P}{P_0} = e^{(S - S_0)/c_v} \left(\frac{R}{R_0} \right)^\gamma$$

$$p = e^s \rho^\gamma, \quad s = (S - S_0)/c_v + 2(\gamma - 1) \ln \tau - \ln \gamma M_0^2$$

Здесь S – размерная энтропия, c_v – удельная теплоемкость при постоянном объеме. Введем безразмерную температуру $\theta = c_v U_0^{-2} \Theta$ (Θ – размерная абсолютная температура). Тогда основное термодинамическое тождество и уравнение состояния Клапейрона записываются в виде

$$\theta ds = di - \rho^{-1} dp, \quad p = (\gamma - 1) \rho \theta, \quad i = \gamma p / \rho (\gamma - 1)$$

С учетом этих равенств из системы (1.6) получаем уравнение для энтропии

$$s_t + u s_x + v s_y = \frac{\gamma - 1}{p} \left(\mu(u_y)^2 + \left(\frac{\mu \theta s_y}{Pr} \right)_y \right)$$

В области, занятой пограничным слоем, введем смешанные эйлерово-лагранжевы переменные t', x', λ , что зафиксирует неизвестную границу области, занятой пограничным слоем

$$x = x', \quad t = t', \quad y = \Phi(x', t', \lambda)$$

Здесь функция $\Phi(x, t, \lambda)$, есть решение задачи

$$\Phi_t + u(x, \Phi, t) \Phi_x = v(x, \Phi, t) \quad (2.1)$$

$$\Phi(x, 0, \lambda) = \lambda \delta(x, 0) \quad (2.2)$$

В силу (2.1), (2.2) поверхности $\lambda = \text{const}$ во все моменты времени состоят из одних и тех же частиц, а равенства $\lambda = 0$, $\lambda = 1$ задают соответственно обтекаемую поверх-

ность и верхнюю границу области пограничного слоя. В полосе $0 \leq \lambda \leq 1$ должны выполняться преобразованные к новым переменным уравнения пограничного слоя

$$\begin{aligned} \rho(u_t + uu_x) + p_x &= f_1, & H_t + (uH)_x &= 0 \\ s_t + us_x &= f_2, & \delta_t + \delta_x &= f(p) \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$f_1 = \frac{\rho}{H} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\rho \mu \partial u}{H \partial \lambda} \right), \quad f_2 = \frac{\gamma - 1}{p} \left[\frac{\rho^2 \mu}{H^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \lambda} \right)^2 + \frac{\rho}{H} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\mu \rho \theta \partial s}{\rho \Gamma H \partial \lambda} \right) \right] \quad (2.4)$$

Здесь $H = \rho \Phi_\lambda$, а члены со старшими производными по λ описывают в приближении пограничного слоя влияние вязких эффектов. Функция $f(p)$ определена в (1.8). После преобразований граничные условия сохраняют вид (1.7) с тем отличием, что задаются они теперь на известных границах $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$ (соответствующих $y = 0$, $y = \delta(x, t)$). Используя выражение величины δ через новые искомые функции и p

$$\delta = \int_0^1 \frac{H d\lambda}{\rho(p, s)}, \quad \rho(p, s) = p^{1/\gamma} e^{-s/\gamma}$$

можно выразить p_x через производные искомым функций H , s , δ

$$p_x = \frac{1}{\sigma} \left[\int_0^1 \frac{H_x}{\rho} d\lambda - \frac{1}{\gamma} \int_0^1 \frac{H s_x}{\rho} d\lambda - \delta_x \right] \quad (2.5)$$

$$\sigma = \int_0^1 \frac{H}{\rho^2 c^2} d\lambda = \frac{1}{\gamma p} \int_0^1 \frac{H}{\rho} d\lambda = \frac{\delta}{\gamma p}, \quad c^2 = \frac{\gamma p}{\rho} \quad (2.6)$$

здесь c^2 – квадрат скорости звука. Введем обозначение $\mathbf{U}(x, \lambda, t) = (u, H, s, \delta)^T$ для вектора – решения системы (2.3), (2.4) и запишем ее в общей форме

$$\mathbf{U}_t + B \mathbf{U}_x = \mathbf{f} \quad (2.7)$$

$$B = \begin{pmatrix} u, & \frac{1}{\rho \sigma} \int_0^1 \frac{1}{\rho} \dots d\nu, & \frac{1}{\rho \gamma \sigma} \int_0^1 \frac{H}{\rho} \dots d\nu, & \frac{1}{\rho \sigma} \\ H, & u, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & u, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ 0 \\ f_2 \\ f(p) \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Во втором элементе первой строки приведенной матрицы присутствует оператор весового интегрирования, действующий на пробную функцию ϕ по правилу

$$\left(\int_0^1 \frac{1}{\rho} \dots d\nu \right) \langle \phi \rangle = \int_0^1 \frac{\phi}{\rho} d\nu$$

Аналогично определяется и интегральный оператор, входящий в третий элемент указанной строки.

3. Обобщенные характеристики и условия на них. Будем временно считать члены со старшими производными по λ известными функциями. Тогда система (2.7) имеет

вид квазилинейной системы уравнений с операторными коэффициентами, для которой в [5, 6] было развито обобщение теории характеристик. Приведем эту систему к характеристическому виду.

Для того чтобы найти характеристическую поверхность $\Gamma = \{x = x(t), 0 \leq \lambda \leq 1\}$, нужно решить задачу на собственные значения [6]

$$(\mathbf{F}, B\Phi) = k(\mathbf{F}, \Phi) \quad (3.1)$$

В (3.1) Φ – бесконечно дифференцируемая пробная функция, зависящая от переменной v (и, возможно, параметрически зависящая от переменных x, t); \mathbf{F} – искомый линейный функционал в пространстве $C^\infty[0, 1]$, (\mathbf{F}, Φ) – результат действия функционала на пробную функцию, $k = k(x, t)$ – искомое собственное значение. Характеристическая поверхность $x = x(t)$ находится интегрированием дифференциального уравнения $x'(t) = k(x, t)$.

Следствие системы (2.7)

$$(\mathbf{F}, \mathbf{U}_t + k\mathbf{U}_x) = (\mathbf{F}, \mathbf{f}) \quad (3.2)$$

называется соотношением на характеристике Γ .

Система вида (2.7) (при заданных функциях f_i) называется гиперболической, если все собственные значения k^α действительны, а семейство соответствующих им собственных функционалов $\{\mathbf{F}^\alpha\}$ обладает свойством полноты. Это свойство означает следующее: если пробная функция Φ обладает определенной гладкостью и для любого α выполнено равенство $(\mathbf{F}^\alpha, \Phi) = 0$, то необходимо $\Phi = 0$. Рассматриваемая в данной работе система уравнений пограничного слоя существенно отличается от систем, рассматриваемых в [5, 6], так как содержит в правой части \mathbf{f} производные второго порядка по переменной λ . Тем не менее в соотношении вида (3.2) к искомым функциям применяются дифференцирования только в направлениях касательных к характеристической поверхности: $\partial/\partial t + k\partial/\partial x, \partial/\partial \lambda, \partial^2/\partial \lambda^2$. Это позволяет использовать (3.2) при анализе слабых разрывов (разрывов производных решения) точно так же, как это делается при изучении слабых разрывов решений систем, содержащих только уравнения первого порядка.

Найдем решение задачи (3.1). Используя представление (2.8) оператора B и независимость Φ , компонент вектора $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4)$, получаем из (3.1) следующие уравнения

$$\begin{aligned} (F_1, (u-k)\Phi_1) + (F_2, H\Phi_1) &= 0 \\ (F_2, (u-k)\Phi_2) - \frac{1}{\sigma} \int_0^1 \frac{\Phi_2}{\rho} dv \left(F_1, \frac{1}{\rho} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$(F_3, (u-k)\Phi_3) - \frac{1}{\gamma\sigma} \int_0^1 \frac{H\Phi_3}{\rho} dv \left(F_1, \frac{1}{\rho} \right) = 0$$

$$b(1-k)\Phi_4 - \frac{1}{\sigma} \left(F_1, \frac{1}{\rho} \right) \Phi_4 = 0$$

определяющие собственные числа k и функционалы F_i , компоненты вектор-функционала $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$. В (3.3) Φ_1, Φ_2, Φ_3 – произвольные функции, а Φ_4 – произвольная постоянная. Действие функционала F_4 сводится просто к умножению этой постоянной на величину b , не зависящую от λ : $(F_4, \Phi_4) = b\Phi_4$.

Упростим задачу на собственные значения (3.3). Так как $H \neq 0$, то первое уравнение (3.3) позволяет найти функционал F_2 , если известен F_1 :

$$(F_2, \Psi) = - \left(F_1, \frac{(u-k)}{H} \Psi \right) \quad (3.4)$$

Последнее уравнение системы (3.3) при $\varphi_4 \neq 0$ дает соотношение

$$b(1-k) - \frac{1}{\sigma} \left(F_1, \frac{1}{\rho} \right) = 0 \quad (3.5)$$

которое можно использовать для определения b . С учетом (3.4) второе уравнение системы (3.3) позволяет сформулировать задачу на собственные значения для отыскания F_1 и k

$$\left(F_1, \frac{(u-k)^2}{H} \Psi \right) - \frac{1}{\sigma} \int_0^1 \frac{\Psi}{\rho} dv \left(F_1, \frac{1}{\rho} \right) = 0 \quad (3.6)$$

Если F_1 известен, то компонента F_3 собственного функционала \mathbf{F} находится из третьего уравнения системы (3.3). Таким образом, векторная задача (3.3) сведена к скалярной задаче (3.6).

Задачи на собственные значения (3.3), (3.6) близки к задачам, изучавшимся ранее в [8]. Поэтому опуская подробные вычисления, приведем их решения.

Вначале выпишем решения, соответствующие собственным значениям k , расположенным на комплексной плоскости вне интервала изменения функции u при λ изменяющемся на интервале $(0, 1)$, а x, t фиксированных ($k \neq u(x, t, \lambda)$, $\lambda \in (0, 1)$, или $k \notin (0, 1)$). Прямой подстановкой в (3.3) можно проверить, что функционалы $\mathbf{F}^i = (F_1^i, F_2^i, F_3^i, b^i)$, заданные формулами

$$\begin{aligned} (F_1^i, \Psi) &= \int_0^1 \frac{H\Psi dv}{\rho(u-k^i)^2}, & (F_2^i, \Psi) &= -\int_0^1 \frac{\Psi}{\rho(u-k^i)} dv \\ (F_3^i, \Psi) &= \frac{1}{\gamma} \int_0^1 \frac{H\Psi}{\rho(u-k^i)} dv, & b^i &= (1-k^i)^{-1} \end{aligned}$$

являются решением задачи на собственные значения, если величины k^i удовлетворяют характеристическому уравнению

$$\chi(k) = 1 - \frac{1}{\sigma} \int_0^1 \frac{H dv}{\rho^2(u-k)^2} = 0 \quad (3.7)$$

Функция $\chi(k)$ определена на действительной оси при

$$k < u_{\min}, \quad u_{\min}(t, x) = \min_{\lambda} u(t, x, \lambda) = 0$$

$$k > u_{\max}, \quad u_{\max}(t, x) = \max_{\lambda} u(t, x, \lambda) = 1$$

Покажем, что на каждом из указанных полубесконечных интервалов уравнение $\chi(k) = 0$ имеет ровно по одному корню.

Заметим, что $\chi(k) \rightarrow -\infty$ при $k \rightarrow 0$ и при $k \rightarrow 1$, и что $\chi(k) \rightarrow 1$ при $k \rightarrow \pm\infty$.

В силу свойств непрерывности функция $\chi(k)$ обращается в нуль в некоторых внутренних точках интервалов $(-\infty, 0)$, $(1, \infty)$. Если учесть, что производная

$$\chi'(k) = -\frac{2}{\sigma} \int_0^1 \frac{H dv}{\rho^2(u-k)^3}$$

сохраняет знак при $k > 1 \geq u$, а также при $k < 0 \leq u$, можно доказать, что на каждом полубесконечном интервале имеется только один корень уравнения $\chi(k) = 0$.

Принимая во внимание соотношение (2.6), запишем характеристическое уравнение (3.7) в виде

$$1 = \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} \frac{\gamma \rho dy}{\rho(u-k)^2} = \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} \frac{c^2 dy}{(u-k)^2}$$

Последнее равенство означает, что среднее по пограничному слою от M^2 равно 1, где $M^2 = (u-k)^2/c^2$. Следовательно, “в среднем” (в смысле приведенного равенства) модуль относительной скорости $|u-k|$ движения характеристики $dx/dt = k(t, x)$ относительно потока равен скорости звука. Если c и u в этом соотношении не зависят от y , то оно преобразуется к известному уравнению звуковых характеристик для системы уравнений одномерного движения газа $(u-k)/c^2 = 1$.

Поэтому, по аналогии, будем называть звуковыми характеристики $dx/dt = k^i(t, x)$ ($i = 1, 2$), определяемые корнями $k^1(t, x) < 0$, $k^2(t, x) > 1$ уравнения (3.7). При этом характеристика, отвечающая корню $k^1(t, x)$, описывает движение возмущений вверх по потоку со звуковой “в среднем” относительной скоростью, а отвечающая корню $k^2(t, x)$ – вниз по потоку. Ниже будут найдены дополнительные характеристики, отвечающие переносу возмущений вместе с потоком со скоростями $dx/dt = u(t, x, \lambda)$, $\lambda \in (0, 1)$ (непрерывный спектр скоростей переноса возмущений “внутренними волнами” в пограничном слое).

Легко видеть, что при $k = 1$ функционал $F^0 = (0, 0, 0, 1)$ тоже является решением задачи (3.3).

Рассмотрим задачу (3.3) при $k \in (0, 1)$. Все значения $k^\lambda(x, t) = u(x, t, \lambda)$, $\lambda \in (0, 1)$ принадлежат непрерывному характеристическому спектру. Соответствующие этим собственным значениям функционалы F_i являются обобщенными функциями.

Действительно, легко проверяется, что при $k = k^\lambda(x, t) = u(x, t, \lambda)$, λ – любое фиксированное число в $(0, 1)$, два вектор-функционала

$$\begin{aligned} F^{1\lambda} &= (0, 0, \delta(v-\lambda), 0) \\ F^{2\lambda} &= (\rho(\lambda)\delta'(v-\lambda) - \rho'(\lambda)\delta(v-\lambda), \rho(\lambda)u_\lambda(\lambda)(H(\lambda))^{-1}\delta(v-\lambda), 0, 0) \end{aligned} \tag{3.8}$$

удовлетворяют уравнениям системы (3.3). Здесь аргументы x, t в обозначениях функций $\rho, \rho_\lambda, H, u_\lambda$ опущены для сокращения записи, $\delta(v-\lambda)$ – дельта функция Дирака, $\delta'(v-\lambda)$ – ее производная, которые действуют на пробную функцию ψ по правилу

$$(\delta(v-\lambda), \psi(v)) = \psi(\lambda), \quad (\delta'(v-\lambda), \psi(v)) = -\psi'(\lambda)$$

где λ – фиксированный параметр, а v – переменная.

Собственным значениям $k^\lambda = u(x, t, \lambda)$ ($\lambda \in (0, 1)$ фиксировано) отвечает еще одно, третье решение системы (3.3) $F^{3\lambda} = (F_1^{3\lambda}, F_2^{3\lambda}, F_3^{3\lambda}, b^{3\lambda})$. Действия функционалов $F_i^{3\lambda}$ на пробную функцию ϕ и постоянная b заданы формулами

$$(F_1^{3\lambda}, \phi) = \sigma\rho(\lambda)\phi(\lambda) + \int_0^1 \frac{H(v)\rho(v)\phi(v) - \rho(\lambda)\phi(\lambda)}{\rho^2(v)(u(v) - u(\lambda))^2} dv$$

$$(F_2^{3\lambda}, \phi) = -\int_0^1 \frac{\phi(v)dv}{\rho(v)(u(v) - u(\lambda))}$$

$$(F_3^{3\lambda}, \phi) = -\frac{1}{\gamma} \int_0^1 \frac{H(v)\phi(v)dv}{\rho(v)(u(v) - u(\lambda))}, \quad b^{3\lambda} = \frac{1}{1 - u(\lambda)}$$

Интегралы в этих выражениях вычисляются в смысле главного значения. Заметим, что при стремлении u к единице $F^{3\lambda}$ стремится к $F^0 = (0, 0, 0, 1)$. Поэтому в дальнейшем функционал F^0 не рассматривается как независимый.

Знание характеристик $dx/dt = k^i$, $dx/dt = u(x, t, \lambda)$, ($\lambda = \text{const}$, $\lambda \in (0, 1)$) необходимо для формулировки корректных постановок задач для нестационарных уравнений взаимодействующего пограничного слоя, в связи с тем что число граничных условий на границах области течения должно быть связано с количеством уходящих с границы обобщенных характеристик. Существование такого рода характеристик необходимо также учитывать при построении численных методов решения соответствующих задач, в частности, при оценке числа Куранта нужно обращаться к характеристическому уравнению (3.7), определяющему скорости распространения возмущений. Так как здесь использовалось неклассическое определение характеристик, в дальнейшем они будут называться обобщенными характеристиками.

Характеристическое уравнение (3.7) является аналогом соотношения, полученного в [15] (см. также [16]). В общем случае уравнение (3.7), может иметь и комплексные корни k , принадлежащие дискретному характеристическому спектру системы (2.7). В дальнейшем будем требовать, чтобы характеристическое уравнение не имело комплексных корней. Это необходимо для того, чтобы система (3.2) в случае равенства коэффициента вязкости нулю была гиперболической в смысле определений, данных в [5, 6]. Как и в работе [8], используя принцип аргумента теории аналитических функций комплексного переменного, легко показать, что отсутствие комплексных корней характеристического уравнения обеспечивается условиями

$$\chi^+(u) \neq 0, \quad \Delta \arg \chi^-(u)/\chi^+(u) = 0$$

Здесь $\chi^\pm(u)$ – обозначение предельных значений аналитической функции $\chi(z)$ на разрезе $(0, 1)$ из верхней и нижней полуплоскости, $\Delta \arg f$ – приращение аргумента комплекснозначной функции f на $(0, 1)$.

Можно предположить, что отсутствие комплексных корней нужно для устойчивости течений и в вязком случае, но этот вопрос требует отдельного рассмотрения.

Установим свойство полноты для найденной системы собственных функционалов. Для этого покажем, что если вектор-функция $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4)$, (предполагается, что Φ_i , $i = 1, 2, 3$, удовлетворяют условию Гельдера по переменной λ , а $\Phi_4 = \text{const}$) удовлетворяет соотношениям

$$(\mathbf{F}^i, \Phi) = \int_0^1 \frac{H' \Phi_1' d\nu}{\rho'(u' - k^i)^2} - \int_0^1 \frac{\Phi_2' d\nu}{\rho'(u' - k^i)} + \frac{1}{\gamma} \int_0^1 \frac{H' \Phi_3' d\nu}{\rho'(u' - k^i)} + \frac{\Phi_4}{1 - k^i} = 0, \quad i = 1, 2$$

$$(\mathbf{F}^{1\lambda}, \Phi) = \Phi_3 = 0, \quad (\mathbf{F}^{2\lambda}, \Phi) = \rho \Phi_{1\lambda} - \rho_\lambda \Phi_1 + \frac{\rho u_\lambda}{H} \Phi_2 = 0 \quad (3.9)$$

$$(\mathbf{F}^{3\lambda}, \Phi) = \sigma \rho \Phi_1 + \int_0^1 \frac{H' (\rho' \Phi_1' - \rho \Phi_1') d\nu}{\rho'^2 (u' - u)^2} - \int_0^1 \frac{\Phi_2' d\nu}{\rho'(u' - u)} - \frac{1}{\gamma} \int_0^1 \frac{H' \Phi_3' d\nu}{\rho'(u' - u)} + \frac{\Phi_4}{1 - u} = 0$$

то необходимо $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4) = 0$. Входящие в (3.9) $k^i(t, x)$ являются корнями характеристического уравнения.

Равенство $\Phi_3 = 0$ является очевидным следствием соотношений (3.9). Устремляя u к единице в последнем соотношении (3.9), находим, что и $\Phi_4 = 0$. Остается показать, что $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$.

Исключение функции φ_2 из оставшихся равенств дает уравнения для определения φ_1

$$\int_0^1 \frac{H}{\rho'^2 u'_\lambda} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\rho' \varphi'_1}{u' - k^i} \right) dv = 0$$

$$\sigma \rho \varphi_1 - \int_0^1 \frac{H}{\rho'^2 u'_\lambda} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\rho' \varphi'_1 - \rho \varphi_1}{u' - u} \right) dv = 0 \tag{3.10}$$

Прямой подстановкой проверяем, что

$$\rho \varphi_1^* = \sum_{j=1}^2 \frac{\alpha_j}{u - k^j}$$

где $\alpha_j = \alpha_j(t, x)$ – произвольные функции, удовлетворяет второму уравнению (3.10). Выберем произвольные коэффициенты $\alpha_j(t, x)$ так, чтобы разность $w = \rho \varphi_1 - \rho \varphi_1^*$ обращалась в нуль как при $\lambda = 0$, так и при $\lambda = 1$. Тогда второе уравнение (3.10), которому удовлетворяет также и w , после интегрирования по частям преобразуется к виду

$$\left[\left(\sigma - \int_0^1 \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{H}{\rho'^2 u'_\lambda} \right) \frac{dv}{u' - u} \right) (u - 1) u - \frac{H_1 u}{\rho'^2 u'_{\lambda 1}} - \frac{H_0 (1 - u)}{\rho_0^2 u'_{\lambda 0}} \right] w + u(u - 1) \int_0^1 \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{H}{\rho'^2 u'_\lambda} \right) \frac{w' dv}{u' - u} = 0$$

Условие отсутствия комплексных корней характеристического уравнения гарантирует, что данное сингулярное интегральное уравнение имеет только нулевое решение в классе функций, удовлетворяющих условию Гёльдера, оно означает, что сингулярное интегральное уравнение имеет невырожденный символ, и что индекс уравнения равен нулю [17]. Используя равенство $w = 0$, находим

$$\rho \varphi_1 = \sum_{j=1}^2 \frac{\alpha_j}{u - k^j}$$

Чтобы получить равенство $\varphi_1 = 0$, необходимо показать, что из первого уравнения (3.10) вытекают равенства $\alpha_j = 0$. Заметим, что при $i \neq j$

$$\int_0^1 \frac{H}{\rho'^2 u'_\lambda} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{(u' - k^i)(u' - k^j)} \right) dv = 0 \tag{3.11}$$

Действительно, если учесть тождество

$$\frac{k^i - k^j}{(u' - k^i)(u' - k^j)} = -\frac{1}{(u' - k^j)} + \frac{1}{(u' - k^i)}$$

то (3.11) получается как следствие характеристического уравнения (3.7). С учетом (3.11) первое уравнение (3.10) при $i = 1, 2$ приводится к виду

$$2\alpha_1 \int_0^1 \frac{H dv}{\rho'^2 (u' - k^1)^3} = 0, \quad 2\alpha_2 \int_0^1 \frac{H dv}{\rho'^2 (u' - k^2)^3} = 0 \tag{3.12}$$

Так как $H > 0$, $\rho' > 0$, $u' - k^1 > 0$, $u' - k^2 < 0$, то из ((3.12) вытекает, что $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, т.е. $\varphi_1 = 0$. Равенство нулю φ_2 следует из (3.9). Полнота системы функционалов $\mathbf{F}^i, \mathbf{F}^{1\lambda}, \mathbf{F}^{2\lambda}, \mathbf{F}^{3\lambda}$ доказана.

Как отмечалось в разд. 1, соотношение (3.7), определяющее скорости распространения возмущений, было получено ранее в работах [11, 12] на основе подхода, предложенного в [14]. При этом подходе субхарактеристики системы уравнений пограничного слоя определялись как поверхности, ортогональные оттекаемой поверхности, на которых невозможно однозначно найти производную от давления по нормали к поверхности, если считать известными на поверхности производные искомым функций по касательной. Сравнение результатов [11, 12] и разд. 3 показывает, что для рассматриваемой системы этот подход дает возможность найти обобщенные характеристики, отвечающие дискретному характеристическому спектру. Определение, введенное в [14], базируется на специфическом свойстве системы уравнений пограничного слоя (независимости давления от вертикальной координаты) и поэтому не обобщается на другие системы уравнений.

В работах [5–7] было предложено новое определение понятия характеристики для общих систем уравнений с операторными коэффициентами и показано, что указанные системы имеют не только дискретный спектр характеристических скоростей, но и непрерывный спектр, которого не было у обычных конечномерных гиперболических систем уравнений. Предложенное в [5–7] обобщение теории характеристик тесно связано с классическим определением. Основное различие состоит в том, что если в классическом случае вычисление характеристик было связано с алгебраическими задачами на собственные значения, то в более общем случае приходится иметь дело с функциональными задачами на собственные значения. Анализ различных систем и их характеристических свойств представлен, в частности, в монографии [8]. Для некоторых физических систем найдены инварианты Римана, сохраняющиеся вдоль характеристик дискретного и непрерывного спектра. Изучаемые в [8] системы можно также называть системами, гиперболическими по части независимых переменных, причем уравнения, образующие систему, могут формулироваться в терминах как локальных, так и нелокальных (например, интегральных) операций по оставшимся переменным, что приводит к необходимости изучать системы с операторными коэффициентами.

В рассматриваемой модели пограничного слоя нелокальные слагаемые в уравнениях появляются за счет определения давления с использованием интегральной величины — толщины вытеснения (см. (2.5), где градиент давления выражен с помощью интегрирования поперек пограничного слоя). В данной работе с помощью общего подхода [5, 6] найдем полный набор характеристик дискретного и непрерывного спектра, позволяющий записать систему уравнений взаимодействующего пограничного слоя в эквивалентном характеристическом виде, когда каждое уравнение содержит только дифференцирование искомым функций по касательным к характеристике направлениям. Очевидно, что одни соотношения на характеристиках дискретного спектра не эквивалентны исходным уравнениям. В связи с этим приведенный здесь анализ существенно обобщает результаты работ [11, 12].

4. Соотношения на слабом разрыве. Градиентная катастрофа. Тот факт, что математическая модель пограничного слоя допускает запись в виде системы уравнений, в каждом из которых искомым функции дифференцируются только вдоль определенной характеристической поверхности, позволяет строить кусочно-гладкие решения, имеющие разрывы производных в нормальном к обобщенной характеристике направлении. Поверхность, на которой некоторые из нормальных производных терпят разрыв, будем называть поверхностью слабого разрыва. Выясним условия, которым должны удовлетворять скачки нормальных производных на поверхности слабого разрыва. Рассмотрим решение системы уравнений (2.7), имеющее разрыв нормальных производных на поверхности $\Gamma = \{x, t, \lambda: x = x(t), 0 \leq \lambda \leq 1\}$ (на фигуре показано сечение Γ , этой поверхности — фронт слабого разрыва). Появление слабого разрыва решения может быть связано с невыполнением условий согласования для производных решения. Например, в некоторый момент времени могут не совпадать производные искомого

решения, вычисленные в точке $t = t_0$, $x = x_0$ с помощью начальных данных при $t = t_0$, $x > x_0$, с производными, вычисленными с помощью граничных условий, заданных на границе $x = x_0$, соответствующей входу потока в зону пограничного слоя. В этой ситуации слабый разрыв “принесен” извне вместе с набегающим потоком. Другая возможность возникновения разрыва производных решения может быть связана с “опрокидыванием” волн (ниже будет показано, что нелинейное “опрокидывание” волн в сверхзвуковом пограничном слое возможно). Далее мы будем рассматривать слабый разрыв, не интересуясь условиями его формирования. Будем предполагать, что на поверхности слабого разрыва Γ искомые функции и их производные по касательным направлениям непрерывны. Вычисляя предельные значения выражений (2.7) на Γ , получим соотношение

$$[U_t] + B[U_x] = 0$$

из которого в силу непрерывности касательных производных решения

$$[U_t + kU_x] = 0, \quad k = x'(t)$$

вытекает, что вектор скачка производных $[U_x]$ является собственной функцией оператора B :

$$(B - kI)[U_x] = 0 \quad (4.1)$$

Здесь $[f] = f^+ - f^-$ – скачок функции на Γ . Члены f_1, f_2 в правых частях уравнений (2.7), содержащие старшие производные по переменной λ , дали нулевой скачок, так как дифференцирование в них выполнялись вдоль поверхности Γ , а по определению слабого разрыва эти производные меняются непрерывно при переходе через Γ .

Пользуясь свойством полноты построенной системы характеристических функционалов, покажем, что слабые разрывы решений возможны только на обобщенных характеристиках. Действуя характеристическими функционалами F^α на (4.1), получаем соотношения

$$(k^\alpha - k)(F^\alpha[U_x]) = 0 \quad (4.2)$$

Из (4.2) следует, что если $k \neq k^\alpha$ для любого α , то равенство $(F^\alpha, [U_x]) = 0$ выполняется при любом α . А тогда в силу полноты семейства $\{F^\alpha\}$ выполняется равенство $[U_x] = 0$, что соответствует отсутствию слабого разрыва. Следовательно, наклон $dx/dt = k$ к оси x поверхности слабого разрыва должен совпадать с характеристической скоростью системы (2.7). Согласно определению слабого разрыва, $[U_x]$ является локально интегрируемой функцией. Анализ, аналогичный проведенному выше, показывает, что задача на собственные значения

$$(B - kI)\Phi = 0$$

имеет решение в классе локально интегрируемых функций при $k = k^i$, где k^i – корень характеристического уравнения (3.7). Оператор B имеет следующие собственные функции, отвечающие этим собственным значениям:

$$\Phi^i = \left(\frac{1}{\rho(u - k^i)}, -\frac{H}{\rho(u - k^i)^2}, 0, 0 \right), \quad i = 1, 2 \quad (4.3)$$

Свойство полноты системы собственных функционалов гарантирует, что других собственных функций, отвечающих указанным собственным значениям, нет.

Далее, для определенности, будем рассматривать слабый разрыв, сосредоточенный на характеристике $x'(t) = k^2$.

Согласно (4.1), скачок производных пропорционален собственной функции оператора B :

$$[U_x] = (|u_x|, [H_x], [s_x], [\delta_x]) = \xi \Phi^2 = \xi \left(\frac{1}{\rho(u-k)^2}, -\frac{H}{\rho(u-k)^2}, 0, 0 \right)$$

где коэффициент пропорциональности $\xi = \xi(x, t)$ определяет амплитуду слабого разрыва, а вектор-функция Φ^2 определена в (4.3). Из приведенной формулы следует, что производные s_x, δ_x непрерывны при переходе через характеристику $x'(t) = k^2$. В этом случае граница области пограничного слоя имеет непрерывную касательную в точке пересечения ее с фронтом слабого разрыва. Вертикальная компонента вектора скорости на указанной границе тоже непрерывна ($[v(x, \delta, t)] = [\delta_t + \delta_x] = 0$). Используя (2.5), (3.7) и свойства непрерывности s_x, δ_x , покажем, что амплитуда слабого разрыва с точностью до знака совпадает со скачком p_x . Действительно:

$$[p_x] = \frac{1}{\sigma} \int_0^1 \frac{[H_x]}{\rho} d\lambda = -\frac{\xi}{\sigma} \int_0^1 \frac{H}{\rho^2(u-k)^2} d\lambda = -\xi$$

Вычислим скачки v и u_x . Дифференцируя равенство

$$y(x, \lambda, t) = \int_0^\lambda W(p, s) H d\lambda$$

по x и вычисляя скачки производных на фронте, получаем соотношение

$$\begin{aligned} [y_x(x, \lambda, t)] &= [p_x] \int_0^\lambda W_p(p, s) H d\lambda + \int_0^\lambda W_s(p, s) [s_x] H d\lambda + \\ &+ \int_0^\lambda W(p, s) [H_x] d\lambda = -\xi \left(\int_0^\lambda \frac{W^2 H d\lambda}{(u-k)^2} + \int_0^\lambda W_p H d\lambda \right) \end{aligned}$$

Здесь $W = W(p, s) = 1/\rho(p, s)$ – удельный объем. На фронте слабого разрыва вертикальная компонента скорости имеет разрыв, величину которого находим в виде

$$[v] = [y_t] + u[y_x] = (u-k)[y_x] = -\xi(u-k) \left(\int_0^\lambda \frac{W^2 H d\lambda}{(u-k)^2} + \int_0^\lambda W_p H d\lambda \right)$$

Из этой формулы следует, что $[v] = 0$ при $\lambda = 0$ либо $\lambda = 1$ (при $\lambda = 1$ выражение в круглых скобках обращается в нуль в силу (3.7)). Во внутренних точках отрезка $(0, 1)$, вообще говоря $[v] \neq 0$. Следовательно, направление вектора скорости меняется скачком при пересечении фронта слабого разрыва $x = x(t)$, так как нормальная по отношению к фронту компонента скорости меняется непрерывно, а касательная претерпевает скачок. В то же время на обтекаемой поверхности и на внешней границе пограничного слоя скорости непрерывны.

Используя формулы замены переменных, можно вычислить скачки производных искомых функций в эйлеровых координатах

$$[u_x(x, y, t)] = \frac{W}{u-k} + u_y(x, y, t) \left(\int_0^y \frac{W^3 dy}{(u-k)^3} + \int_0^y \frac{W_p dy}{W} \right) = \frac{W}{u-k} - \frac{[v]u_y}{u-k}$$

Таким образом, в эйлеровом описании величины u, u_x, ρ, ρ_x, v имеют разрыв первого рода на фронте слабого разрыва.

При наличии слабого разрыва решение в области за его фронтом должно иметь особенность в точке пересечения фронта с обтекаемой поверхностью. Действительно,

перед фронтом слабого разрыва на обтекаемой поверхности $y = 0$ выполнено соотношение $u_x = 0$, являющееся следствием условия прилипания $u = 0$. Предельное значение u_x за фронтом, вычисленное при стремлении u к нулю вдоль фронта, является ненулевым из-за того, что $[u_x] = -\xi/\rho k^2 \neq 0$. С другой стороны, если вычислить предельное значение u_x в этой же точке как предел вдоль поверхности $y = 0$, то получим нуль в силу условий прилипания. Это говорит о том, что в точке пересечения фронта с обтекаемой поверхностью предел u_x зависит от направления, и, следовательно, производные решения имеют особенность, хотя сами искомые функции непрерывны в указанной точке. Характер этой особенности предполагается обсудить в последующей публикации.

Выведем дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет амплитуда слабого разрыва ξ вдоль обобщенной характеристики.

Для этого продифференцируем по x соотношение на характеристике (3.2):

$$(\mathbf{F}^2, U_{ix} + k^2 U_{xx}) + k_x^2 (\mathbf{F}^1, U_x) + (\mathbf{F}_x^2, U_t + k^2 U_x) = (\mathbf{F}_x^2, \mathbf{f}) + (\mathbf{F}^2, \mathbf{f}_x)$$

После вычисления разности предельных значений этого выражения на Γ приходим к соотношению (в дальнейшем верхний индекс "2" в обозначениях k и \mathbf{F} опускаем для сокращения записи):

$$(\mathbf{F}, [U_x]_t + k[U_x]_x) + ([\mathbf{F}_x], U_t + kU_x) + [k_x](\mathbf{F}, [U_x]) + k_{1x}(\mathbf{F}, [U_x]) + (\mathbf{F}, U_x)[k_x] = ([\mathbf{F}_x], \mathbf{f}) + (\mathbf{F}, [\mathbf{f}_x]) \quad (4.4)$$

При получении (4.4) использовалось тождество

$$[k_x(\mathbf{F}, U_x)] = [k_x](\mathbf{F}, [U_x]) + k_{1x}(\mathbf{F}, [U_x]) + (\mathbf{F}, U_{1x})[k_x]$$

в котором нижний индекс "1" обозначает предельные значения функций с одной из сторон поверхности Γ . Собирая линейные по $[U_x]$ члены в правой части, запишем (4.4) в виде

$$\left(\mathbf{F}, \frac{d}{dt}[U_x] \right) + [k_x](\mathbf{F}, [U_x]) = ([\mathbf{F}_x], \mathbf{f} - U_{1t} - kU_{1x}) + (\mathbf{F}, [\mathbf{f}_x]) - k_{1x}(\mathbf{F}, [U_x]) - (\mathbf{F}, U_{1x})[k_x] \quad (4.5)$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + k \frac{\partial}{\partial x}$$

Здесь d/dt оператор дифференцирования вдоль характеристики. Учитывая, что

$$\frac{d}{dt}[U_x] = \frac{d\xi}{dt}\varphi + \xi \frac{d\varphi}{dt}, \quad [k_x] = \left[\frac{\partial k}{\partial U} \langle U_x \rangle \right] = \xi \frac{\partial k}{\partial U} \langle \varphi \rangle \quad (4.6)$$

получаем транспортное уравнение для амплитуды слабого разрыва ξ :

$$\frac{d\xi}{dt} + C_1 \xi^2 = D_1 \xi \quad (4.7)$$

$$\xi D_1(\mathbf{F}, \varphi) + \xi \left(\mathbf{F}, \frac{d\varphi}{dt} \right) = ([\mathbf{F}_x], \mathbf{f} - U_{1t} - kU_{1x}) + (\mathbf{F}, [\mathbf{f}_x]) - k_{1x}(\mathbf{F}, [U_x]) - (\mathbf{F}, U_{1x})[k_x]$$

$$C_1 = \frac{\partial k}{\partial U} \langle \varphi \rangle = \left(\int_0^1 \frac{HW^2(p, s) d\lambda}{(u-k)^3} \right)^{-1} \left(\int_0^1 HW_{pp}(p, s) d\lambda + 3 \int_0^1 \frac{HW(p, s) W_p(p, s)}{(u-k)^2} d\lambda + \right.$$

$$\left. + 3 \int_0^1 \frac{HW^3(p, s) d\lambda}{(u-k)^4} \right) = \left(\int_0^1 \frac{HW^2(p, s) d\lambda}{(u-k)^3} \right)^{-1} \times$$

$$\times \left(\int_0^1 HW(p, s) \left[3 \left(\frac{W(p, s)}{(u-k)^2} - \frac{1}{2\gamma p} \right)^2 + \frac{4\gamma + 1}{4\gamma^2 p^2} \right] d\lambda \right) > 0$$

Подробное выражение для коэффициента D_1 не приводится ввиду громоздкости. Для $k = k^2 > \max_{\lambda} (t, x, \lambda)$ коэффициент C_1 отрицателен. Интегрируя уравнение (4.7) вдоль характеристики, получаем выражение для амплитуды слабого разрыва

$$\xi = \xi_0 \exp \left(\int_0^t D_1 dt' \right) \left(1 + \xi_0 \int_0^t C_1 \exp \left(\int_0^{t'} D_1 dt'' \right) dt' \right)^{-1}$$

Здесь ξ_0 – амплитуда слабого разрыва при $t = 0$. Из этого представления вытекает, что если начальная амплитуда равна нулю, то $\xi = 0$ при $t > 0$. Если $\xi_0 < 0$, то амплитуда слабого разрыва ограничена при всех значениях t . Если же $\xi_0 > 0$, то возможно обращение величины ξ в ∞ в момент времени t_* , определяемый из уравнения

$$1 + \xi_0 \int_0^t C_1 \exp \left(\int_0^{t'} D_1 dt'' \right) dt = 0$$

что соответствует нелинейному “опрокидыванию” волны и образованию особенности типа скачка. В последнем случае необходимо рассматривать решения с сильными разрывами (разрывами искомых функций). Отметим, что $[p_x] = -\xi$ и нелинейное опрокидывание волн возникает при $[p_x] < 0$.

Заключение. Установлено, что уравнения сверхзвукового пограничного слоя с самоиндуцированным давлением допускают решения с разрывами производных на поверхностях, являющихся обобщенными характеристиками указанных уравнений. Обнаружена возможность нелинейного “опрокидывания” волн и образования особенностей типа скачка. Наличие в уравнениях “вязких” членов с производными по переменной y не улучшает свойств гладкости решения по переменной x по сравнению с гиперболическим случаем. Система уравнений пограничного слоя с самоиндуцированным давлением также проявляет “гиперболические” свойства: допускает решения со слабыми и сильными разрывами. При этом скорости распространения возмущений $x'(t)$ в отличие от классической теории характеристик здесь определяются не локальными параметрами потока, а из специальных уравнений, в которых комбинации искомых функций проинтегрированы по переменной y .

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, (№ 01-01-00767); работа В.М. Тешукова была также поддержана грантом ИНТАС 01-868.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хейз У.Д., Пробстин Р.Ф. Теория гиперзвуковых течений. М. Изд-во иностр. лит., 1962. 607 с.
2. Нейланд В.Я. К теории отрыва ламинарного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке // Изв. АН СССР. МЖГ. 1969. № 4. С. 53–57.
3. Stewartson K., Williams P.G. Self-induced separation // Proc. Roy. Soc. London. ser. A. 1969. V. 312. № 1509. P. 181–206.
4. Нейланд В.Я. Распространение возмущений вверх по течению при взаимодействии гиперзвукового потока с пограничным слоем // Изв. АН СССР. МЖГ. 1970. № 4. С. 40–49.
5. Тешуков В.М. О гиперболичности уравнений длинных волн // Докл. АН СССР. 1985. Т. 284. № 3. С. 555–559.
6. Тешуков В.М. Длинные волны в завихренной баротропной жидкости // ПМТФ. 1994. Т. 35. № 6. С. 17–26.
7. Ляпидевский В.Ю., Тешуков В.М. Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000. 419 с.
8. Тешуков В.М. Модель длинноволновой аппроксимации для сдвигового течения газа в канале переменного сечения // ПМТФ. 1998. Т. 39. № 1. С. 15–27.

9. Нейланд В.Я. К теории взаимодействия гиперзвукового потока с пограничным слоем для отрывных двумерных и пространственных течений. Ч. 1. Пространственные течения // Учен. зап. ЦАГИ. 1974. Т. 5. № 2. С. 70–79.
10. Mikhailov V.V., Neiland V.Ya., Sychev V.V. The theory of viscous hypersonic flow // Ann. Rev. Fluid Mech. Palo Alto Ca: Annu. Revs. Inc., 1971. V. 3. P. 371–396.
11. Lipatov I.I. Disturbances propagation in supersonic boundary layers. Proc. IUTAM Symp. on Non-linear Instability and Transition in Three – Dimensional Boundary Layers. Manchester UK, 1995 / (Eds. P.W. Duck and P. Hall) Dordrecht: Kluver, 1996. P. 369–378.
12. Липатов И.И. Распространение возмущений в сверхзвуковых пограничных слоях // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 3. С. 457–464.
13. Кречетников Р.В., Липатов И.И. Распространение возмущений в пространственных сверхзвуковых пограничных слоях // ПМТФ. 1999. Т. 40. № 3. С. 116–127.
14. Wang K.C. On the determination of the zones of influence and dependence for three – dimensional boundary-layer equations // J. Fluid Mech. 1971. V. 48. Pt 2. P. 397–404.
15. Pearson H., Holliday J.B., Smith S.F. A theory of the cylindrical ejector supersonic propelling nozzle. J. Roy. Aeron. Soc. 1958. V. 62. № 574. P. 746–751.
16. Зуев В.С., Макарон В.С. Теория прямоточных и ракетно-прямоточных двигателей. М.: Машиностроение, 1971. 367 с.
17. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.

Москва
Новосибирск

Поступила в редакцию
24.XII.2002