

УДК 532.517.2:551.213.3

© 2003 г. А. А. ОСИПЦОВ

СТАЦИОНАРНОЕ ПЛЕНОЧНОЕ ТЕЧЕНИЕ СИЛЬНОВЯЗКОЙ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ С МАССОПОДВОДОМ

Построены асимптотические модели тонкого слоя тяжелой сильновязкой несжимаемой ньютоновской жидкости для стационарного осесимметричного (или плоского) течения на искривленной твердой поверхности с распределенным или точечным массоподводом на ее части вблизи оси (плоскости) симметрии. Приведены примеры аналитического и численного исследования формы свободной поверхности и полей гидродинамических параметров. Построенные модели обобщены на случай течения вязкопластической жидкости, и получены решения, которые могут быть использованы для описания экстрезивных вулканических извержений.

Ключевые слова: вязкая жидкость, вязкопластическая жидкость, гравитационное течение, пленочное течение, экстрезивное извержение.

Задача о медленном течении пленки тяжелой несжимаемой жидкости на твердой поверхности с локализованным массоподводом под слоем жидкости существенно меньшей плотности возникла в связи с необходимостью моделирования экстрезивных вулканических извержений, придонных океанических течений и некоторых технологических процессов. Эта задача исследовалась в ряде работ, в частности в [1] построена модель тонкого слоя сильновязкой жидкости на горизонтальной плоскости, а для формы свободной поверхности при точечном массопроводе и степенной зависимости расхода от времени получены автомодельные решения, описывающие рост лавового купола при экстрезивном извержении вулкана [2]. В [3] найдено автомодельное по пространственным координатам решение стационарной трехмерной задачи о пленке ньютоновской жидкости на наклонной плоскости при точечном массопроводе. В [4] построена модель пленочного течения вязкопластической жидкости с точечным массоподводом на горизонтальной плоскости и получены решения задачи об изотермическом росте лавового купола на плоской подстилающей поверхности. Эта же задача в неизотермической постановке исследована в [5].

Работы, в которых рассматриваются гидродинамические модели роста лавового купола при экстрезивном вулканическом извержении, посвящены, главным образом, пленочным течениям с массоподводом на плоской поверхности (см., например, обзор [6]). Для горизонтальной поверхности не существует стационарного решения задачи в такой постановке. Ниже построены асимптотические модели тонкого слоя тяжелой сильновязкой жидкости с массоподводом на искривленной твердой поверхности с малыми или конечными углами наклона образующей поверхности к горизонтали. В рамках этих моделей показано существование стационарного решения, которое может быть использовано для описания повторных извержений вулкана на поверхность уже сформировавшегося лавового купола.

1. Постановка задачи. Рассмотрим осесимметричное (или плоское) стационарное течение сильновязкой несжимаемой ньютоновской жидкости в однородном поле силы тяжести на искривленной твердой поверхности, на части которой осуществляется массоподвод. Предположим, что над слоем жидкости находится идеальная несжимаемая среда существенно меньшей плотности, поэтому давление на свободной поверхности

будем считать постоянным. Избыточное давление в жидкости (по сравнению с давлением над свободной поверхностью) обозначим p . Введем декартову систему координат (X, Y) (ось Y направлена вертикально вверх, ось X направлена горизонтально). Введем также криволинейную ортогональную систему координат (x, y) , ось x которой направлена по образующей поверхности, ось y – по нормали к поверхности. Поместим начало системы координат в центр области массоподвода. В этой системе координат уравнения Навье–Стокса, уравнение неразрывности и граничные условия на твердой ($y = 0$) и свободной ($y = h(x)$) поверхностях в безразмерном виде в предположении, что число Рейнольдса $Re \ll 1$, примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial(ur^j)}{\partial x} + \frac{\partial(vHr^j)}{\partial y} &= 0 \\ \varepsilon \frac{1}{H} \frac{\partial p}{\partial x} &= \varepsilon \frac{1}{r^j} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{r^j}{H} \left(\frac{\partial}{\partial y} (uH) - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \sin \vartheta(x) \\ \varepsilon \frac{\partial p}{\partial y} &= \varepsilon \frac{1}{Hr^j} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{r^j}{H} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} (uH) \right) \right] - \cos \vartheta(x) \\ y = h(x): v &= \left(\frac{u}{H} \right) \frac{dh}{dx}, \quad -p + 2 \frac{\partial v_n}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial v_n}{\partial \tau} + \frac{\partial v_\tau}{\partial n} = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$y = 0: u = 0, \quad v = v_w(x)$$

$$u^* = Uu, \quad v^* = Uv, \quad x^* = Lx, \quad y^* = Ly, \quad R^* = LR, \quad r^* = Lr$$

$$p^* = \frac{\rho U^2}{Re} p, \quad Re = \frac{\rho UL}{\mu}, \quad Fr = \frac{U}{\sqrt{gL}}, \quad \varepsilon = \frac{Fr^2}{Re}, \quad H = \frac{R+y}{R}$$

Здесь L – характерный масштаб длины, U – характерный масштаб скорости, $R(x)$ – радиус кривизны образующей поверхности в точке x , r – расстояние до оси симметрии, $\vartheta(x)$ – угол между касательной к образующей поверхности и горизонталью, $v_w(x)$ – профиль скорости на выходе из канала ($v_w(x) > 0$, $x \in [0, d]$ и $v_w(x) = 0$, $x \geq d$, $d = D/L$, D – размерный радиус канала), $j = 0$ и 1 в плоском и осесимметричном случаях соответственно, размерные переменные обозначены звездочкой, остальные обозначения общепринятые.

Предполагая, что $\varepsilon \ll 1$, будем искать решение системы (1.1) в виде асимптотических рядов по ε , оставляя в них только главные члены. Предположения малости чисел Рейнольдса и ε вполне справедливы, например, для экструзивных извержений вулкана [7], для которых $Re \sim 10^{-4}$ и $\varepsilon \sim 10^{-2}$.

2. Асимптотические уравнения тонкой пленки при малых ϑ . Ищем решение системы (1.1) на масштабе радиуса канала D (в формулах (1.1) положим $L = D$) при малых углах наклона образующей поверхности к горизонтالي в виде рядов по ε , главные члены которых имеют следующие порядки

$$\begin{aligned} y &= \varepsilon^{1/3} \eta, \quad h = \varepsilon^{1/3} h_0, \quad v = \varepsilon^{1/3} v_0 \\ \vartheta &= \varepsilon^{1/3} \theta, \quad p = \varepsilon^{-2/3} p_0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Остальные переменные имеют порядок единицы. Ниже индекс 0 опущен. Размерную скорость массоподвода на оси симметрии обозначим $V = v_w^*(0)$. Из уравнения неразрывности следует, что $V \sim \varepsilon^{1/3} U$, однако без ограничения общности можно выбрать

масштаб обезразмеривания скорости U так, что $V = \varepsilon^{1/3}U$. Тогда величины U и ε могут быть выражены через известные размерные параметры

$$U = V \left(\frac{\rho g D^2}{\mu V} \right)^{1/4}, \quad \varepsilon = \left(\frac{\mu V}{\rho g D^2} \right)^{3/4}$$

Введем обозначение для профиля скорости на выходе из канала в растянутых переменных $v_w(x) = \varepsilon^{1/3}w(x)$. Подставляя (2.1) в (1.1) и оставляя главные члены, получим

$$\frac{\partial u r^j}{\partial x} + r^j \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \theta(x), \quad \frac{\partial p}{\partial \eta} = -1$$

$$\eta = h(x): v = u \frac{dh}{dx}, \quad p = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \quad (2.2)$$

$$\eta = 0: u = 0, \quad v = w(x)$$

Эта система содержит самоиндуцированный продольный градиент давления, который связан через динамическое граничное условие с неизвестной формой свободной поверхности. Интегрируя динамические уравнения системы (2.2) и подставляя полученное выражение для u в уравнение неразрывности в интегральной форме, получаем уравнение для формы свободной поверхности

$$\frac{dh}{dx} = \theta(x) - \frac{3q(x)}{x^j h^3} \quad (2.3)$$

$$q(x) = \int_0^x w(\zeta) \zeta^j d\zeta, \quad (q(x) = Q = \text{const}, x \geq 1)$$

Рассмотрим решения уравнения (2.3) в случае, когда твердая поверхность есть часть сферы (цилиндра) радиуса $R = \varepsilon^{-1/3}(\theta(x) = x)$. Уравнение (2.3) имеет однопараметрическое семейство решений (свободный параметр $h(0)$), что является проявлением эллиптического характера исходной системы уравнений Навье-Стокса. В работах, посвященных вдуву газа с поверхности тела, обтекаемого сверхзвуковым потоком (например, [8]), также рассматриваются стационарные уравнения тонкого слоя с самоиндуцированным продольным градиентом давления и возникают однопараметрические свойства решений. По аналогии с [8], для отбора единственного решения необходимо поставить дополнительное граничное условие при $x \rightarrow \infty$.

При $x \rightarrow 0$ решение (2.3) имеет следующую асимптотику

$$h(x) = \delta_0 - \left(\frac{3}{2^{1+j} \delta_0^3} - \frac{1}{2} \right) x^2$$

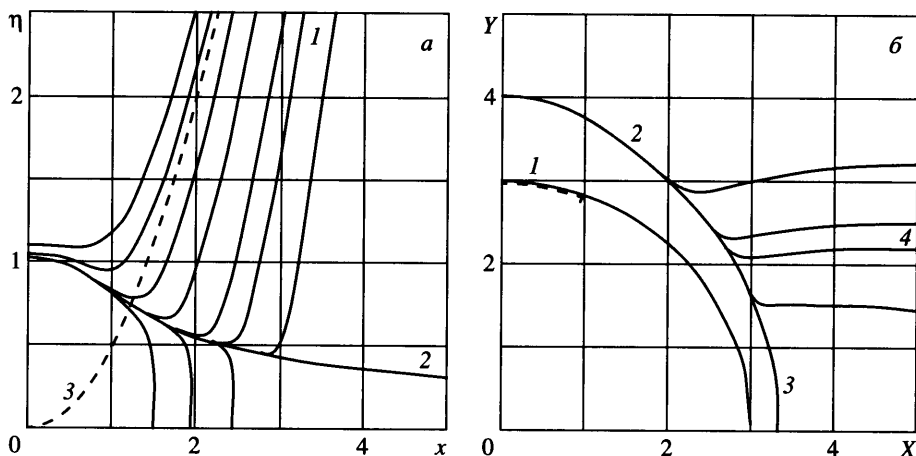
При $x \rightarrow \infty$ существует единственное решение (2.3), удовлетворяющее условию $h(x) \rightarrow 0$ и $h'(x) \rightarrow 0$

$$h(x) = (3Q)^{1/3} x^{-(1+j)/3}, \quad x \rightarrow \infty \quad (2.4)$$

и однопараметрическое семейство решений, удовлетворяющих условию $h(x) \rightarrow \infty$ и $h'(x) \rightarrow \infty$

$$h(x) = \frac{x^2}{2} + C, \quad x \rightarrow \infty \quad (2.5)$$

Возрастающие решения, имеющие асимптотику (2.5), при $x \rightarrow \infty$ выходят на линии постоянного уровня $Y = \text{const}$ в декартовой системе координат (X, Y) на масштабах по-



Фиг. 1. Формы свободной поверхности на сфере для внутренней области. В системе координат, связанной со сферой: 1 – растущие решения, 2 – сепаратриса, 3 – асимптотика растущих решений (а). В декартовой системе координат: 1 – сфера, 2 – форма поверхности вблизи оси симметрии, 3 – сепаратриса, 4 – линии постоянного уровня; штриховой линией показана область массоподвода (б)

рядка радиуса сферы (цилиндра). Убывающие решения, для которых $h(x_n) = 0$ при конечном x_n , приобретают физический смысл в рамках стационарной постановки при дополнительном условии в точке x_n . Таковым может быть наличие точечного стока в точке x_n . Вместе с тем эти кривые могут быть интерпретированы как решения нестационарной задачи в квазистационарной постановке, в которой скорость массоподвода зависит от времени как от параметра. В этом случае отбор единственной кривой из семейства должен производиться из интегрального закона сохранения массы, т.е. условия равенства объема движущейся жидкости в текущий момент времени суммарному объему жидкости, поступившей из канала за все время течения. Семейства возрастающих и убывающих решений разделены сепаратрисой с асимптотикой (2.4).

В качестве примера на фиг. 1 представлены семейства решений уравнения (2.3) в системах координат (x, η) (а) и (X, Y) (б) ($\epsilon = 1/27$), найденные численно методом Рунге–Кутты четвертого порядка для осесимметричного случая при условии, что на выходе из канала задан профиль скорости в форме Пуазейля $w(x) = 1 - x^2$. Были также проведены расчеты для плоского случая и получены качественно аналогичные результаты.

В случае, когда твердая поверхность есть конус (клин), имеющий малый угол наклона образующей с горизонталью и затупленный по сфере (цилиндру) радиуса $R = \epsilon^{-1/3}$, уравнение для формы свободной поверхности при $x > x_0$ принимает вид

$$\frac{dh}{dx} = x_0 - \frac{3Q}{x^j h^3} \quad (2.6)$$

здесь $(x_0 > 1 -$ координата точки, в которой сфера (цилиндр), переходит в конус (клин))

В случае $j = 0$ семейство решений этого уравнения может быть выражено конечным соотношением (свободный параметр – константа C)

$$h - \frac{3Q}{x_0} \left[\frac{1}{6b^2} \ln \left(\frac{h^2 + bh + b^2}{(b-h)^2} \right) + \frac{1}{b^2 \sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2h+b}{b\sqrt{3}} \right) \right] = x + C, \quad b = \left(\frac{3Q}{x_0} \right)^{1/3}$$

Для $j = 1$ решения уравнения (2.6) при $x \sim 1$ исследованы численно методом Рунге–Кутты четвертого порядка.

Как и в случае сферы (цилиндра), семейство интегральных кривых уравнения (2.6) имеет сепаратрису, разделяющую возрастающие и убывающие решения. Возрастающие решения и сепаратриса имеют следующие асимптотики (при $j = 0$ формула дает точное выражение для сепаратрисы)

$$h(x) = xx_0 + C, \quad h(x) = \left(\frac{3Q}{x^j x_0}\right)^{1/3}, \quad x \rightarrow \infty$$

3. Асимптотические уравнения тонкой пленки при конечных ϑ . Рассмотрим решенные системы (1.1) при конечных углах наклона образующей поверхности к горизонтали в случае, когда характерный масштаб длины D_e значительно превышает радиус канала (в формулах (1.1) положим $L = D_e$). На этом масштабе массоподвод можно считать точечным. Здесь и далее индексом e снабжены параметры течения на масштабе D_e . Обозначим масштаб скорости U_e , малый параметр ε_e , безразмерную продольную координату x_e и размерный расход из источника Q^* . Решение будем искать в виде рядов по ε_e , главные члены которых имеют следующие порядки

$$u = \varepsilon_e^{1/2} \eta, \quad h = \varepsilon_e^{1/2} h_0, \quad v = \varepsilon_e^{1/2} v_0, \quad p = \varepsilon_e^{-1/2} p_0 \quad (3.1)$$

Остальные переменные имеют порядок единицы. Ниже индекс 0 опущен. Обозначив $V_e = Q^* D_e^{-1-j} 2^{-1} \pi^j$ (тогда безразмерный объемный расход $Q = Q^* V_e^{-1} D_e^{-1-j} = 2\pi^j$), имеем выражения для U_e и ε_e

$$U_e = V_e \left(\frac{\rho g D_e^2}{\mu V_e}\right)^{1/3}, \quad \varepsilon_e = \left(\frac{\mu V_e}{\rho g D_e^2}\right)^{2/3}$$

Подставляя (3.1) в (1.1) и оставляя главные члены, получаем

$$\frac{\partial u r^j}{\partial x_e} + r^j \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0, \quad 0 = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \sin \vartheta(x_e), \quad \frac{\partial p}{\partial \eta} = -\cos \vartheta(x_e)$$

$$\eta = h(x_e): v = u \frac{dh}{dx_e}, \quad p = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \quad (3.2)$$

$$\eta = 0, \quad x_e > 0: u = 0, \quad v = 0$$

В точке $x = \eta = 0$ имеет место точечный массоподвод с безразмерным объемным расходом Q . Полученные уравнения (3.2) для пленки при конечных ϑ не содержат продольного градиента давления, связанного с заранее неизвестной формой свободной поверхности. Это является принципиальным отличием от постановки задачи для пленки при малых ϑ (2.2). После подстановки в уравнение неразрывности в интегральной форме выражения для u , полученного интегрированием динамического уравнения системы (3.2), имеем единственное решение для формы свободной поверхности

$$h(x_e) = \left(\frac{3}{r^j \sin \vartheta}\right)^{1/3} \quad (3.3)$$

Формула (3.3) справедлива в рамках гипотезы тонкого слоя при $\vartheta(x_e) \sim 1$ и $x_e \sim 1$. Асимптотика решения (3.3) при $x_e \rightarrow 0$ в случае, когда твердая поверхность есть сфера (цилиндр), имеет вид

$$h(x_e) = 3^{1/3} x_e^{-(1+j)/3}, \quad x_e \rightarrow 0$$

Это решение можно сравнить лишь с единственным решением во внутренней области (на масштабе порядка радиуса канала), убывающим на бесконечности и имеющим

асимптотику (2.4) (2 на фиг. 1, а). Таким образом осуществляется отбор единственного решения из семейства решений во внутренней области для построения равномерно пригодного решения в обеих областях.

В частном случае конуса (клина), когда ϑ не зависит от x , решение в размерных переменных

$$h^* = \left[\frac{3\mu Q^*}{2\rho g (\pi x_e^* \cos \vartheta)^j \sin \vartheta} \right]^{1/3}$$

не зависит от характерного масштаба длины, выбранного при обезразмеривании.

4. Обобщение полученных решений на случай неньютоновской жидкости. Многочисленные лабораторные эксперименты и натурные измерения показывают, что одним из основных свойств, характерных для лавы при экструзивном извержении вулкана, является наличие предела текучести B . Рассмотрим течение вязкопластической жидкости с реологической моделью, предложенной в [9], которая наилучшим образом аппроксимирует свойства лавы [4]. В рамках этой модели справедливо следующее размерное соотношение между компонентами тензора вязких напряжений и тензора скоростей деформаций

$$\tau_{ij} = \left(\mu e^{n-1} + \frac{B^*}{e} \right) e_{ij}, \quad \tau \geq B^*; \quad e_{ij} = 0, \quad \tau < B^*$$

$$\tau = \sqrt{\tau_{jk}\tau_{jk}}/2, \quad e = \sqrt{e_{jk}e_{jk}}/2$$

Здесь B^* – предел текучести, τ и e – вторые инварианты тензоров вязких напряжений и скоростей деформации, n – положительное действительное число. Введем обозначение $y = h_B(x)$ для поверхности, на которой достигается предел текучести. Ниже этой поверхности имеет место течение, а над ней жидкость движется в “затвердевшем” состоянии с постоянной в вертикальном сечении продольной скоростью.

После интегрирования асимптотических уравнений тонкой пленки на поверхности сферы (цилиндра) большого радиуса во внутренней области (на масштабе порядка радиуса канала) аналогично тому, как это сделано в разд. 2, получаем систему уравнений для неизвестных функций h и h_B (обозначения соответствуют введенным ранее)

$$q(x) = \frac{n}{n+1} x^j |x-h'|^{1/n} (h_B(x))^{(n+1)/n} \left(h(x) - \frac{n}{2n+1} h_B(x) \right) \operatorname{sgn}(x-h') \quad (4.1)$$

$$h(x) = h_B(x) + \frac{B}{|x-h'(x)|}$$

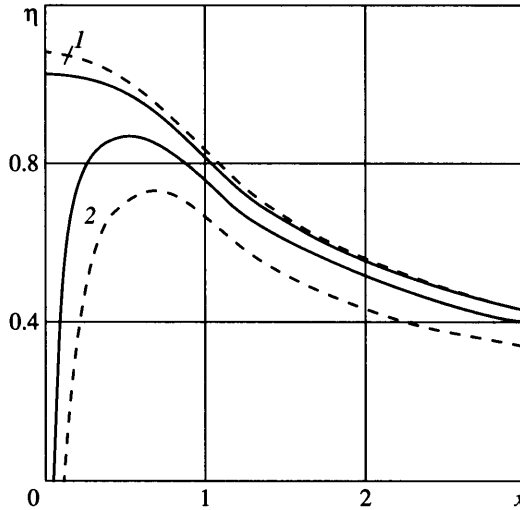
Система (4.1) имеет единственное решение, удовлетворяющее условию $h(x) \rightarrow 0$, $h'(x) \rightarrow 0$, $h_B(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. Это решение имеет асимптотики

$$h(x) = \left(\frac{Q(2n+1)}{n} \right)^{n/(2n+1)} x^{-(jn+1)/(2n+1)}, \quad x \rightarrow \infty \quad (4.2)$$

$$h_B(x) = \left(\frac{Q(2n+1)}{n} \right)^{n/(2n+1)} x^{-(jn+1)/(2n+1)} - Bx^{-1}, \quad x \rightarrow \infty$$

Асимптотика для формы свободной поверхности не зависит от предела текучести B и в случае течения бингамовской жидкости ($n = 1$) совпадает с соответствующей асимптотикой (2.4), полученной выше для случая ньютоновской жидкости.

Как и в случае течения ньютоновской жидкости, система (4.1) имеет семейство убывающих решений, которые в рамках модели стационарного течения приобретают



Фиг. 2. Формы свободной поверхности (1) и границы затвердевания (2) на сфере во внутренней области для бингамовской жидкости. Предел текучести $B = 0.1$ (сплошная линия) и 0.3 (штриховая линия)

физический смысл при условии точечного стока в точке, где толщина пленки обращается в ноль. Семейство этих решений можно также интерпретировать как решение нестационарной задачи в квазистационарной постановке. При этом отбор единственного решения из семейства, как и в случае ньютоновской жидкости, должен производиться из интегрального закона сохранения массы. Существенное отличие от случая ньютоновской жидкости – отсутствие возрастающих решений (в системе координат, связанной со сферой).

На фиг. 2 представлены найденные численно стационарные решения системы (4.1) в случае течения бингамовской жидкости ($n = 1$) на сфере для различных значений предела текучести B . Эти решения моделируют стационарное экструзивное извержение вулкана. При численных расчетах на выходе из канала был задан профиль поперечной составляющей скорости $w(x) = 1 - B^2$ ($x < B$), $w(x) = 1 - x^2$ ($B \leq x \leq 1$) и профиль продольной составляющей скорости $u = Bx(1 - x)$. В отличие от случая ньютоновской жидкости при нулевой продольной составляющей скорости на выходе из канала решение в рамках стационарной постановки отсутствует, так как невозможно удовлетворить кинематическому условию на свободной поверхности в конечной окрестности оси симметрии.

При более подробном изучении неизотермического роста лавового купола следует учитывать зависимость величины предела текучести B от температуры, имеющую экспоненциальный характер с отрицательным показателем [5]. Для полученного выше семейства решений с параметром B течение ньютоновской жидкости есть предельный случай при высоких температурах и $B \rightarrow 0$.

Интегрируя асимптотические уравнения тонкой пленки во внешней области аналогично тому, как это сделано в разд. 3, получаем систему конечных соотношений для неизвестных функций h и h_B

$$1 = \frac{n}{n+1} r^j (\sin \vartheta)^{1/n} (h_B(x_e))^{(n+1)/n} \left(h(x_e) - \frac{n}{2n+1} h_B(x_e) \right)$$

$$h(x_e) = h_B(x_e) + \frac{B}{\sin \vartheta}$$

При $x_e \rightarrow 0$ решения имеют асимптотику

$$h(x_e) = \left(\frac{2n+1}{n}\right)^{n/(2n+1)} x_e^{-(jn+1)/(2n+1)}$$

$$h_B(x_e) = \left(\frac{2n+1}{n}\right)^{n/(2n+1)} x_e^{-(jn+1)/(2n+1)} - Bx_e^{-1}$$

Эти решения можно сравнить с решениями, полученными во внутренней области и имеющими асимптотики (4.2).

Заключение. Построены асимптотические модели пленочного течения тяжелой сильновязкой жидкости с массоподводом на искривленной твердой поверхности с малыми или конечными углами наклона образующей поверхности к горизонтали. Показано существование стационарного решения для формы свободной поверхности и полей скорости и давления, отсутствующего в случае горизонтальной плоской поверхности.

На масштабе области массоподвода при малых углах наклона образующей для ряда примеров численно получено однопараметрическое семейство решений. Часть из них можно интерпретировать как решение нестационарной задачи в квазистационарной постановке. При конечных углах наклона образующей и масштабах длины, существенно превышающих радиус области массоподвода, получено единственное аналитическое решение.

Построенные асимптотические модели пленочных течений обобщены на случай течения вязкопластической жидкости. В рамках этих моделей получены решения, моделирующие стационарное экструзивное извержение вулкана.

Автор выражает благодарность А.А. Бармину и О.Э. Мельнику за внимание к работе и обсуждение результатов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№ 02-01-00067).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Huppert H.E. The propagation of two-dimensional and axisymmetric viscous gravity currents over a rigid horizontal surface // *J. Fluid Mech.* 1982. V. 121. P. 43–58.
2. Huppert H.E., Shepherd J.B., Sigurdsson H., Sparks R.S.J. On lava dome growth, with application to the 1979 lava extrusion of the Soufrière of St. Vincent // *J. Volcanol. Geotherm. Res.* 1982. V. 14. № 3–4. P. 199–222.
3. Smith P.C. A similarity solution for slow viscous flow down an inclined plane // *J. Fluid Mech.* 1973. V. 58. Pt 2. P. 275–288.
4. Balmforth N.J., Burbidge A.S., Craster R.V., Salzig J., Shen A. Visco-plastic models of isothermal lava domes // *J. Fluid Mech.* 1999. V. 403. P. 37–65.
5. Balmforth N.J., Craster R.V. Dynamics of cooling domes of viscoplastic fluid // *J. Fluid Mech.* 2000. V. 422. P. 225–248.
6. Huppert H.E. The intrusion of fluid mechanics into geology // *J. Fluid Mech.* 1986. V. 173. P. 557–594.
7. Бармин А.А., Мельник О.Э. Гидродинамика вулканических извержений // *Успехи механики.* 2002. Т. 1. № 1. С. 32–60.
8. Нейланд В.Я. Вдувание газа в гиперзвуковой поток // *Уч. зап. ЦАГИ.* 1972. Т. 3. № 6. С. 29–40.
9. Herschel W.H., Bulkley R. Über die viskosität und Elastizität von Solen // *Amer. Soc. Testing Mater.* 1926. V. 26. P. 621–633.