

УДК 532.516.5

© 2003 г. В. И. ГРАБОВСКИЙ

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ЗАЗОРА ПЛОСКОГО ПОЛЗУНА, РЕАЛИЗУЮЩЕГО МАКСИМУМ ЖЕСТКОСТИ

Проведено оптимальное профилирование основания ползуна, движущегося над плоской поверхностью. Сформулирована и решена вариационная задача определения формы зазора с несжимаемой изотермической смазкой, обеспечивающей максимум жесткости ее слоя при заданной несущей способности ползуна.

Ключевые слова: несжимаемая смазка, высота зазора, вариационная задача, участки оптимальности, жесткость, несущая способность.

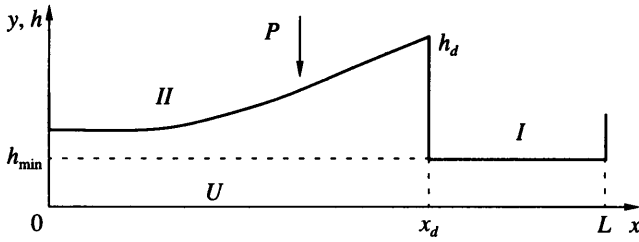
Классическая работа Рэлея о максимальной несущей способности ползуна с несжимаемой смазкой [1] положила начало исследованиям по оптимизации его характеристик [2–8]. Одной из важных характеристик ползуна, связанной с обеспечением устойчивости его работы, является жесткость слоя смазки. Впервые задача о ползуне максимальной статической жесткости поставлена в [9].

В данном исследовании с использованием выражения [9–11] для статической жесткости решается общая задача об оптимизации ползуна, реализующего максимум жесткости при заданной несущей способности.

1. Рассмотрим плоский и бесконечный в перпендикулярном к поверхности чертежа направлении ползун, длиной L и движущийся над плоской поверхностью $y = 0$ со скоростью $-U$ в отрицательном направлении оси x . Форма нижней поверхности ползуна описывается функцией $y = h(x)$. При переходе к подвижной системе координат, связанной с ползуном, поверхность $y = 0$ перемещается со скоростью U , а ползун покоится (фиг. 1). Зазор между ними заполнен несжимаемой смазкой с плотностью $\rho = \text{const}$ и вязкостью $\mu = \text{const}$. Высота зазора соответствует оценке $hL^{-1} \ll 1$ (на фиг. 1 зазор показан в увеличенном масштабе). Существует величина h_{\min} , отвечающая минимально допустимой высоте зазора, возникающей из-за запрета касания движущихся относительно друг друга поверхностей. Вне зазора давление p фиксировано и равно p_{∞} . При решении задачи для несжимаемой смазки его можно положить равным нулю. При отличной от константы функции $h(x)$ давление в зазоре не постоянно, и у ползуна появляется несущая способность N , которая, будучи равной интегралу от давления по всей нижней поверхности ползуна, уравнивает внешнюю нагрузку P . Наряду с N представляет интерес также такая характеристика ползуна, как жесткость слоя смазки.

Для определения характеристик ползуна введем безразмерные переменные, приняв за масштаб x длину L , а за масштаб y и h – минимально допустимую высоту зазора h_{\min} . За масштабы плотности, давления и скорости $V(u, v) - \rho, \gamma U^2$ и U . Вошедший в масштаб давления безразмерный комплекс γ определяется равенством

$$\gamma = \frac{6L\mu}{\rho U h_{\min}^2} \quad (1.1)$$



Фиг. 1. К постановке задачи: I, II – участки оптимальности

Параметр γ пропорционален числу подшипника χ [10]: $\chi = \gamma \rho U^2 p_\infty^{-1}$. В безразмерных переменных уравнение Рейнольдса для определения давления $p = p(x)$ в зазоре и граничные условия для него принимают вид

$$\begin{aligned} p' &= (h - q)h^{-3}, \quad (h - q - h^3 p' = 0), \quad q = \text{const} \\ p(0) &= p(1) = 0 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь штрих означает дифференцирование по x . Решение задачи (1.2) не зависит от параметра γ , входящего только в выражения для несущей способности ползуна N и жесткости слоя смазки. Не зависят от γ и коэффициенты несущей способности (C_N) и расхода смазки (q), введенные как

$$C_N = \frac{N}{\gamma L \rho U^2} = \int_0^1 p dx, \quad q = \frac{2Q}{\rho U h_{\min}} = 2 \int_0^h u dy \tag{1.3}$$

где N и Q – размерные несущая способность и расход на единицу ширины ползуна в перпендикулярном к плоскости чертежа направлении.

Жесткость слоя смазки определяется согласно [9, 11]. Пусть ползун совершает малые квазистационарные перемещения $\epsilon \ll 1$ в перпендикулярном направлении к плоскости $y = 0$. В квазистационарном приближении для давления и расхода смазки в зазоре, как и для высоты зазора, справедливы линейные представления

$$h = h_0 - \epsilon, \quad p = p_0 + \epsilon p_1, \quad q = q_0 + \epsilon q_1 \tag{1.4}$$

Отсюда в соответствии с (1.3) для коэффициента статической жесткости G получим выражение (также не зависящее от γ)

$$G = \frac{\partial C_N}{\partial \epsilon} = \int_0^1 p_1 dx \tag{1.5}$$

Дифференциальное уравнение для возмущения давления вытекает из (1.2) и (1.4) и вместе с граничными условиями имеет вид

$$\begin{aligned} p_1' &= [h_0(2 - q_1) - 3q_0]h_0^{-4}, \quad (2 - q_1 - 3q_0 h_0^{-1} - h_0^3 p_1' = 0), \quad q_0, q_1 = \text{const} \\ p_1(0) &= p_1(1) = 0 \end{aligned} \tag{1.6}$$

Уравнение, определяющее невозмущенное давление, имеет вид (1.2) с проставленным индексом “0” у всех величин. Таким образом, прямая задача определения жесткости полностью поставлена. Константы q_0 и q_1 находятся с помощью граничных условий.

2. Для решения вариационной задачи требуется найти максимум функционала G при заданной величине функционала C_N и при наличии дифференциальных связей (1.2)

и (1.6) на функции, входящие в выражения для G и C_N . При этом невозмущенная высота зазора h_0 из-за ограничения на ее минимально допустимую величину, принятую в качестве масштаба h , должна удовлетворять неравенству

$$1 \leq h_0 \quad (2.1)$$

Составим функционал Лагранжа с учётом (1.2), (1.3), (1.5) и (1.6)

$$J = G + \nu C_N + \int_0^1 \{ \lambda (h_0 - h_0^3 p'_0 - q_0) + \mu (2 - q_1 - 3q_0 h_0^{-1} - h_0^3 p'_1) \} dx \quad (2.2)$$

в котором $\lambda(x)$ и $\mu(x)$ – переменные, а ν – постоянный множитель Лагранжа.

Как следует из дальнейшего, высота оптимального зазора – разрывная функция координаты x : h_0 имеет разрыв при определяемом в процессе решения $x = x_d$. В этом сечении осуществляется сопряжение участков разных типов. Параметрам (в том числе и h_0) в этой точке припишем соответствующий индекс d и дополнительные знаки $(-)$ и $(+)$ для значений до и после разрыва, по направлению движения поверхности $y = 0$.

Для получения условий оптимальности, необходимых для решения задачи, функционал J варьируется. Если форма зазора оптимальная, т.е. реализуется максимум G , то вариации $\Delta G = \Delta J \leq 0$. В соответствии с известными правилами варьирования получается

$$\begin{aligned} \Delta G \equiv \Delta J = & [-(\lambda h_0^3)_- + (\lambda h_0^3)_+]_d \Delta p_{0d} + [-(\mu h_0^3)_- + (\mu h_0^3)_+]_d \Delta p_{1d} + \\ & + [(\lambda h_0^3 p'_0)_- + (\mu h_0^3 p'_1)_- - (\lambda h_0^3 p'_1)_+ - (\mu h_0^3 p'_1)_+]_d \Delta x_d - \\ & - \Delta q_0 \int_0^1 (\lambda + 3\mu h_0^{-1}) dx - \Delta q_1 \int_0^1 \mu dx + \int_0^1 (F_1 \delta p_1 + F_0 \delta p_0 + H \delta h_0) dx \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$F_0 = (\lambda h_0^3)' + \nu, \quad F_1 = (\mu h_0^3)' + 1, \quad H = [\lambda(3q_0 - 2h_0)h_0 + 3\mu(4q_0 + h_0(q_1 - 2))]h_0^{-2}$$

где δp_0 , δp_1 , δh_0 – вариации (разности значений при фиксированном x) соответствующих функций, а Δx_d , Δp_{0d} , Δp_{1d} , Δq_0 и Δq_1 – приращения координаты x_d сечения скачка высоты зазора, значений давления p_{0d} , p_{1d} в сечении x_d и расходов q_0 и q_1 . Первые три члена в (2.3) отвечают возможному разрыву h_0 , λ и μ , что характерно для оптимальных ползунов. Положение разрыва неизвестно и определяется в процессе решения с помощью условия на нем, выписываемому далее.

В согласии с выражением (2.3) формулируются две взаимосвязанные сопряжённые задачи, определяющие множители Лагранжа λ и μ для любых зазоров (в том числе неоптимальных), которые в силу условия (2.1) могут быть образованы участками с кусочно-непрерывной функцией $h_0(x)$. Получается система уравнений с условиями на разрыве и интегральными условиями

$$(\mu h_0^3)' + 1 = 0, \quad \int_0^1 \mu dx = 0, \quad -(\mu h_0^3)_{d-} + (\mu h_0^3)_{d+} = 0 \quad (2.4)$$

$$(\lambda h_0^3)' + \nu = 0, \quad \int_0^1 (\lambda + 3\mu h_0^{-1}) dx = 0, \quad -(\lambda h_0^3)_{d-} + (\lambda h_0^3)_{d+} = 0 \quad (2.5)$$

Интегрирование дифференциальных уравнений из (2.4) и (2.5) дает

$$\lambda = (c_\lambda + \nu x)h_0^{-3}, \quad \mu = (c_\mu + x)h_0^{-3} \quad (2.6)$$

причем в силу третьих условий из (2.4) и (2.5) постоянные интегрирования c_λ и c_μ одинаковы на всех участках непрерывности h_0 . Для произвольного зазора, т.е. для любой $h_0(x) \geq 1$, они определяются интегральными условиями из (2.4) и (2.5), в силу (2.6) сводящимися к соотношениям

$$c_\mu J_3 + K_3 = 0, \quad c_\lambda J_3 + \nu K_3 + 3(c_\mu J_4 + K_4) = 0, \quad J_n = \int_0^1 h_0^{-n} dx, \quad K_n = \int_0^1 h_0^{-n} x dx, \quad (2.7)$$

$$n = 3, 4$$

При выборе множителей λ и μ в соответствии с (2.6) выражение для вариации ΔG принимает вид

$$\Delta G = \Delta J = [(c_\lambda + \nu x_d)(p'_{0-} - p'_{0+}) + (c_\mu + x_d)(p'_{1-} - p'_{1+})]_d \Delta x_d + \int_0^1 H \delta h_0 dx \quad (2.8)$$

При $\nu \neq 0$ в H через множитель λ , согласно (2.6), линейно входит еще неопределенный постоянный множитель Лагранжа ν . Выбор его из условия: $H(x_k) = 0$ (x_k – произвольная точка на участке $h_0 > 1$), позволяет считать вариации δh_0 при $0 < x < 1$ и приращение Δx_d независимыми.

Так как Δx_d может быть любым, для оптимального положения разрыва $h_0(x)$ коэффициент при Δx_d должен обращаться в нуль. Откуда с учётом условий на разрыве из (2.4) и (2.5), дифференциальных уравнений (1.2) и (1.6) получим условие на разрыве (индекс d опущен)

$$(h_{0-}^3 - h_{0+}^3)h_{0+}h_{0-}[\mu_-(2 - q_1) - \lambda_-q_0] - (h_{0-}^2 - h_{0+}^2)[3\mu_-q_0(h_{0-}^2 + h_{0+}^2) - \lambda_-h_{0-}^2h_{0+}^2] = 0 \quad (2.9)$$

$$\mu_+ = \mu_-h_{0-}^3h_{0+}^{-3}, \quad \lambda_+ = \lambda_-h_{0-}^3h_{0+}^{-3}$$

определяющее положение разрыва x_d в оптимальном ползуне.

На том участке (или участках) зазора, где $h_0 > 1$, вариации δh_0 произвольны, поэтому условие оптимальности, определяющее форму таких участков двустороннего экстремума (участок II на фиг. 1), принимает вид

$$H = 0, \quad \lambda h_0^2 - 1.5h_0[\lambda q_0 + \mu(q_1 - 2)] - 6\mu q_0 = 0 \quad (2.10)$$

$$= (c_\lambda + \nu x)h_0^2 - 1.5h_0[(c_\lambda + \nu x)q_0 + (c_\mu + x)(q_1 - 2)] - 6q_0(c_\mu + x) = 0$$

На участке (или участках) краевого экстремума (участок I на фиг. 1), где $h_0 = 1$, допустимые $\delta h_0 > 0$, и условие максимума G , в согласии с (2.8), сводится к неравенству

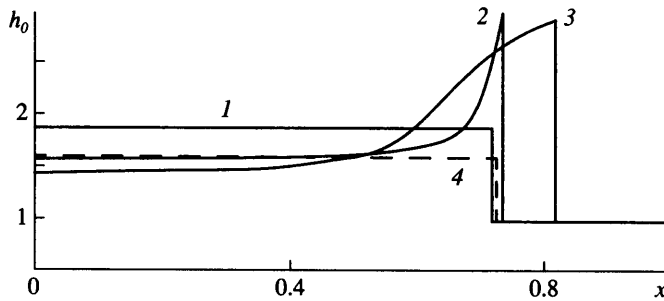
$$H \leq 0, \quad \lambda(3q_0 - 2) + 3\mu(4q_0 + q_1 - 2) = (c_\lambda + \nu x)(3q_0 - 2) + 3(c_\mu + x)(4q_0 + q_1 - 2) \leq 0 \quad (2.11)$$

Равенства (2.9) и (2.10) с c_λ и c_μ из (2.7) определяют форму и протяженность участка двустороннего экстремума $h_0(x) > 1$. При этом константы q_0 и q_1 находятся при решении уравнений (1.2) и (1.6), в силу чего, в соответствии с (2.7), имеем

$$q_0 = J_2 J_3^{-1}, \quad q_1 = 2 - 3q_0 J_4 J_3^{-1} \quad (2.12)$$

Наконец, оставшийся произвол в выборе постоянного множителя ν в задаче с фиксированной несущей способностью $N \leq N_R$, где N_R отвечает ползуну Рэлея, позволяет удовлетворить этому изопериметрическому условию.

Формулы (2.12) с точностью до обозначений совпадают с полученными в [9]. В то же время, как следует из (2.10), высота зазора h_0 на участке двустороннего экстремума, вопреки [9], не постоянна даже при $\nu = 0$. Ошибочность результата [9] видна из простого сравнения полученных величин G . В задаче без изопериметрического усло-



Фиг. 2. Оптимальные формы ползунов для разных C_N^0 : 1 – $C_N^0 = 1$ и $G^0 = 1$; 2 – 0.933 и 1.093; 3 – 0.72 и 0.98; 4 – решение [9]

вия для ползуна с кусочно-постоянным зазором из [9] $G = 0.0747$ и 0.0751 для ползуна с $h_0 \neq \text{const}$ на участке двустороннего экстремума, удовлетворяющего уравнениям и условиям, полученным в данной работе. Столь малое (0.5%) различие G получается при заметной разнице в форме зазоров, которые для этого случая представлены на фиг. 2 штриховой ступенькой 4 и кривой 2.

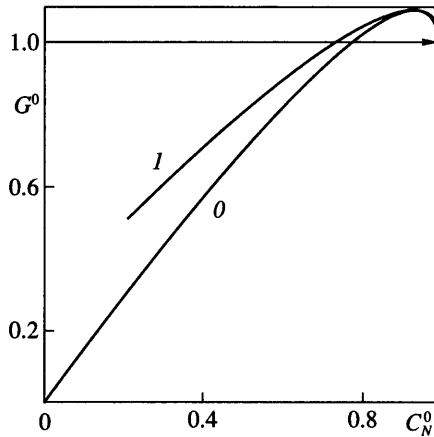
Источник ошибки [9] – неучет зависимости от h_0 постоянных q_0 и q_1 , входящих в функционал Лагранжа. То, что эти постоянные – функционалы от h_0 , непосредственно следует из формул (2.12).

Из анализа полученных уравнений и условий вытекает структура оптимального решения для ползуна. Функция $h_0(x)$ состоит из двух участков I и II, которые стыкуются разрывным образом в одном сечении (фиг. 1). В этом сечении претерпевают разрыв и множители Лагранжа λ и μ .

Таким образом, задача полностью определена и может быть решена вычислением λ и μ , p_0 , p_1 и h_0 на каждом участке из соответствующих дифференциальных или алгебраических уравнений при выполнении полученных условий оптимальности. Постоянному множителю Лагранжа $v \neq 0$ отвечает фиксированная величина коэффициента несущей способности C_N . При $v = 0$ максимум жесткости определяется без ограничения величины C_N и поэтому получается абсолютно максимальным.

3. Результаты расчетов оптимальных ползунов, т.е. их параметры, приведены в таблице для разных значений v , что отвечает различным коэффициентам несущей способности C_N . Предельное значение $v = \infty$ соответствует максимально возможному C_N , равному C_{NR} известного решения Рэля для ползуна с кусочно-постоянной высотой зазора. Если C_{NR} является абсолютным максимумом, то коэффициент жесткости G_R для него не

v	-1.9	-1.5	-1.0	0	5	10	20	50	∞ (Raley)
q_0	1.3950	1.2922	1.2550	1.2432	1.2432	1.2437	1.2438	1.244	1.2440
$-q_1$	1.2325	1.1824	1.1697	1.1804	1.2168	1.2271	1.2342	1.2398	1.2440
$G 10^2$	4.98	6.75	7.33	7.51	7.24	7.11	7.01	6.94	6.876
$C_N 10^2$	1.44	2.46	2.92	3.21	3.41	3.43	3.43	3.44	3.438
$x_d 10^4$	9004	8171	7646	7342	7198	7188	7182	7182	7182
$h_0(0)$	1.3950	1.4317	1.4873	1.5833	1.7546	1.7979	1.8276	1.8495	1.8660
h_d	3.0158	2.9264	2.9312	2.9981	3.1065	2.8798	2.5374	2.0643	1.8660



Фиг. 3. Зависимости I и 0 жесткости G^0 от несущей способности C_N^0 оптимальных ползунов и в классе ползунов с кусочно-постоянным зазором

максимален. Абсолютный максимум G реализуется при $v = 0$, когда $C_{N0} < C_{NR}$. Таким образом, все оптимальные решения сформулированной задачи должны соответствовать неравенству $0 < C_N \leq C_{NR}$, а $v < \infty$.

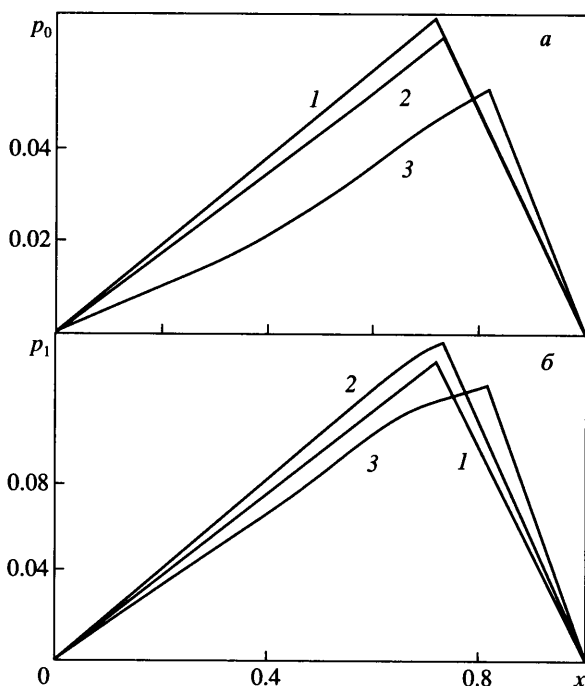
На фиг. 3 кривая I отвечает зависимости приведенных параметров – жесткости $G^0 = G/G_R$ от несущей способности $C_N^0 = C_N/C_{NR}$ для всех полученных решений. Максимум $G^0 = 1.0916$ реализуется при $C_N^0 = 0.933$. Выигрыш в жесткости на 9.2% сопровождается потерей 6.7% несущей способности в сравнении с ползуном Рэлея.

Ввиду технологической простоты ползунов с кусочно-постоянным зазором строились также оптимальные ползуны этого типа. Их построение осуществлялось на основе решения прямых задач с двумя параметрами: x_d и h_d – координатой разрыва h_0 и высоты участка $h_d = \text{const} > 1$. Решение – аналитическое, поскольку уравнения для давления и его возмущения интегрируются в квадратурах, а выражения для жесткости и несущей способности – конечные алгебраические выражения. Результаты характеризуются кривой 0 на фиг. 3. Максимум на этой кривой в пределах точности счета совпадает с решением [9]. В окрестности максимума кривые I и 0 практически не различаются. Таким образом, в этом диапазоне несущих способностей на практике можно использовать ползуны с кусочно-постоянным зазором. Для слабо нагруженных ползунов (на фиг. 3 левее максимума G^0) это не так.

Разные точки кривых I и 0 соответствуют различным формам зазоров. Оптимальные ползуны с кусочно-постоянным зазором (кривая 0) имеют высоту $h_d < h_{dR}$, координату $x_d > x_{dR}$ и несущую способность $C_N < C_{NR}$. Однако, как показали расчеты, x_d близка к $x_{dR} = 0.7182$, но h_d значительно отличается от h_{dR} .

Высоты оптимальных ползунов $h_0 = h_0(x)$, отвечающие точным решениям изопериметрической задачи (кривой I фиг. 3 и таблице) для разных C_N^0 , представлены на фиг. 2 ($C_N^0 = 1$ и $G^0 = 1$ (I), 0.933 и 1.0916 (2), а также 0.72 и 0.98 (3)). Линия I отвечает ползуну Рэлея, а 2 – ползуну с абсолютно максимальной жесткостью. Штриховой кривой 4 показано решение из [9].

На фиг. 4 в соответствии с фиг. 2 представлены распределения невозмущенного давления $p_0(x)$ (фиг. 4,а) и его возмущения $p_1(x)$ (фиг. 4,б) для разных оптимальных



Фиг. 4. Распределения давления: а – $p_0(x)$ и б – $p_1(x)$ для разных C_N° (нумерация кривых, как на фиг. 2)

ползунов. Характерно, что, как и для кусочно-постоянных зазоров, максимумы распределений находятся в сечении разрыва высоты зазора. Наиболее наполненные профили $p_0(x)$ отвечают наибольшей несущей способности (кривая 1), а наиболее наполненные профили $p_1(x)$ – наибольшей жесткости (2).

Заключение. Для плоского бесконечного подшипника скольжения (ползуна) с несжимаемой смазкой поставлена и решена вариационная задача, заключающаяся в определении формы его зазора, обеспечивающая наибольшую статическую жесткость слоя смазки при разных его несущих способностях. Показано, что оптимальная высота зазора – разрывная функция с участками двустороннего и краевого (с минимально допустимой высотой h_{\min}) экстремумов. На участке двустороннего экстремума высота зазора изменяется, достигая максимального значения в точке разрыва высоты. Оптимальные ползуны с максимальной жесткостью имеют несущую способность, меньшую, чем у ползуна Рэлея.

Автор благодарит А.Н. Крайко за ценные обсуждения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 02-01-00422 и 00-15-99039).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rayleigh Lord*. Notes on the theory of lubrication // *Phil. Mag.* 1918. V. 35. № 1. P. 1–12.
2. *Maday C.J.* A bounded variable approach to the optimum slider bearing // *Trans. ASME. Ser. F. J. Lubr. Technol.* 1968. V. 90. № 1. P. 240–242 = *Тр. Америк. о-ва инж.-мех. Сер. Ф. Проблемы трения и смазки.* 1968. Т. 90. № 4. С. 252–255.
3. *Maday C.J.* The one-dimensional optimum hydrodynamic gas slider bearing // *Trans. ASME. Ser. F. J. Lubr. Technol.* 1968. V. 90. № 1. P. 281–284 = *Тр. Америк. о-ва инж.-мех. Сер. Ф. Проблемы трения и смазки.* 1968. Т. 90. № 4. С. 294–299.

4. *Wylie G.M., Maday C.J.* The optimum one-dimensional hydrodynamic gas Rayleigh step bearing // Trans. ASME. Ser. F. J. Lubr. Technol. 1970. V. 92. № 3. P. 504–509 = Тр. Амер. о-ва инж.-мех. Сер. Ф. Проблемы трения и смазки. 1970. Т. 92. № 3. С. 133–137.
5. *Болдырев Ю.Я., Григорьев Б.С., Лулуляк С.В.* Расчет реверсивного подшипника скольжения с газовой смазкой, имеющего максимальную несущую способность // Трение и износ. 1999. Т. 20. № 1. С. 5–11.
6. *Rohde S.M.* The optimum slider bearing in terms of friction // Trans. ASME. Ser.F. J. Lubr. Technol. 1972. V. 94. № 3. P. 275–279 = Тр. Амер. о-ва инж.-мех. Сер.Ф. Проблемы трения и смазки. 1972. Т. 94. № 3. С. 82–87.
7. *Крайко А.Н.* Изопериметрическая задача о профилировании оптимального зазора бесконечного плоского ползуна // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 2. С. 222–233.
8. *Грабовский В.И.* Оптимальное профилирование ползуна, обеспечивающее его минимальное сопротивление // Изв. РАН. МЖГ. 1999. № 2. С. 14–25.
9. *Григорьев Б.С.* Оптимизация плоского подшипника скольжения по критерию максимальной жёсткости // Трение и износ. 1997. Т. 18. № 1. С. 30–34.
10. Опоры скольжения с газовой смазкой / Под ред. С.А. Шейнберга. М.: Машиностроение, 1979. 336 с.
11. *Пешти Ю.В.* Газовая смазка. М.: Изд-во МГТУ, 1993. 381 с.

Москва
E-mail: vig@ciam.ru

Поступила в редакцию
13.И. 2003