

УДК 533.7

© 2003 г. А. В. БУТКОВСКИЙ

ВЛИЯНИЕ ХАРАКТЕРА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ГАЗА С ПОВЕРХНОСТЬЮ НА СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ КНУДСЕНОВСКОГО СЛОЯ ПРИ СИЛЬНОМ ИСПАРЕНИИ

Моментным методом исследовано влияние коэффициента температурной аккомодации α_T на соотношения на границе слоя Кнудсена при сильном испарении. При $0 < \alpha_T < 1$ получено явное выражение для безразмерной плотности как функции температуры и числа Маха M . Для $\alpha_T = 0$ все решение получено в явном виде. Показано, что при $\alpha = 0$ и коэффициенте конденсации $\gamma \ll 1$ значения температуры за кнудсеновским слоем резко меняются при изменении M от 0 до некоторой величины много меньшей единицы, а затем перестают зависеть от γ . Для модели зеркального отражения молекул от поверхности плотность и температура за кнудсеновским слоем получены в явном виде как функции числа Маха.

Ключевые слова: сильное испарение, коэффициент конденсации, коэффициент испарения, коэффициент аккомодации, зеркальное отражение.

При высоких скоростях испарения, когда число Рейнольдса велико, в потоке газа непосредственно у границы раздела фаз возникает узкий (толщиной в несколько длин свободного пробега) кнудсеновский слой, в котором отсутствует поступательное равновесие. Такие течения газа возникают, например, при лазерном испарении металлов. Соотношения на границе кнудсеновского слоя при коэффициенте конденсации $\gamma = 1$ исследовались как моментными методами [1, 2], так и методом прямого статистического моделирования [3]. При этом полученные результаты отличались незначительно, что указывает на эффективность моментных методов в задачах испарения. В [1] показано, что при диффузионном испарении с $\alpha_T = 1$, $0 < \gamma < 1$, $\alpha = \gamma$ соотношения на кнудсеновском слое могут быть получены с помощью решения для $\gamma = 1$ путем соответствующего пересчета. В [4] этот результат обобщен на случай $\alpha_T = 1$, $\alpha \neq \gamma$. Однако вопрос о влиянии характера взаимодействия молекул с поверхностью на параметры течений за кнудсеновским слоем оставался открытым. Этому вопросу посвящена данная работа. В ней рассматриваются влияние коэффициента температурной аккомодации α_T на параметры течения за слоем Кнудсена, а также случай сильного испарения при зеркальном отражении.

Рассмотрение кнудсеновского слоя проведем, используя основную идею модели [2]. Согласно [2] функция распределения молекул, летящих в сторону поверхности, пропорциональна функции распределения перед слоем Кнудсена. Распространим модель [2] на случай произвольных значений α , γ и α_T .

На внешней границе кнудсеновского слоя функция распределения предполагается максвелловской

$$f_1 = \rho_1 (2\pi RT_1)^{-3/2} \exp \left[-\frac{(\xi - u)^2 + \eta^2 + \zeta^2}{2RT_1} \right]$$

где R – газовая постоянная, ρ_1 , u и T_1 – плотность, скорость и температура газа соответственно, ξ , η , ζ – декартовы компоненты скорости молекул, причем ξ направлена

перпендикулярно поверхности. Функция распределения на границе раздела фаз выбирается в виде

$$f_2 = \begin{cases} \alpha \rho_s (2\pi RT_s)^{-3/2} \exp\left[-\frac{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}{2RT_s}\right] + \rho_r (2\pi RT_{1r})^{-3/2} \exp\left[-\frac{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}{2RT_{1r}}\right], & \xi > 0 \\ \beta f_1, & \xi < 0 \end{cases}$$

где ρ_s – плотность насыщенных паров при температуре стенки T_s , T_{1r} , ρ_r – параметры функции распределения отраженных молекул.

Второе выражение принимается, как и в [2] пропорциональным f_1 с коэффициентом пропорциональности β , определяемым в ходе решения задачи.

Уравнения сохранения массы, импульса и энергии при переходе через кнудсеновский слой после интегрирования по пространству скоростей, подобно тому как это сделано в [2], принимают вид

$$\sqrt{2}\rho m \sqrt{T} = \frac{\gamma \beta \rho \sqrt{T} g(m) e^{-m^2} + 1}{\sqrt{2\pi}} \quad (1)$$

$$\rho T (2m^2 + 1) = \frac{\beta \rho T e^{-m^2} [(2m^2 + 1)g(m) + 1]}{2\sqrt{\pi m}} + \frac{1}{2} + (\gamma - 1)\beta \rho \left(\frac{\sqrt{TT_r}}{2}\right) g(m) e^{-m^2} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\rho m T^{3/2} \left(m^2 + \frac{5}{2}\right) &= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \left[2 + \frac{5 - 3\kappa}{2(\kappa - 1)}(1 - T)\right] + \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \beta \rho T^{3/2} \times \\ &\times \left[\sqrt{\pi} \left(m^2 + \frac{5}{2}\right) \operatorname{erfc}(m) - (m^2 + 2)e^{-m^2}\right] + \\ &+ (\gamma - 1)\beta \rho \sqrt{\frac{T}{2\pi}} \exp(-m^2) g(m) \left[\frac{(1 - T)(\kappa + 1)\alpha_T}{2(\kappa - 1)} + 2T\right] \end{aligned} \quad (3)$$

$$\operatorname{erfc}(m) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_m^\infty e^{-t^2} dt, \quad g(m) = \sqrt{\pi} \operatorname{erfc}(m) \exp(m^2) - 1$$

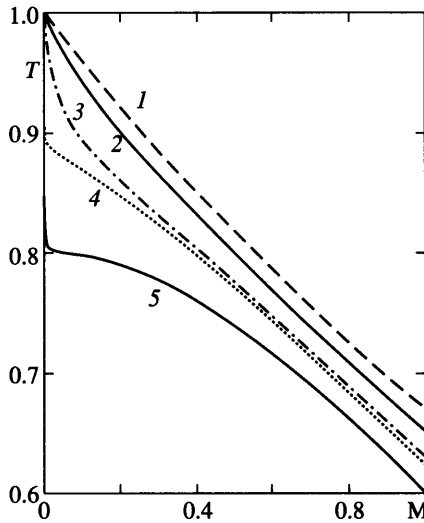
$$m = \frac{u}{\sqrt{2RT_1}}, \quad T = \frac{T_1}{T_s}, \quad T_r = \frac{T_{1r}}{T_s}, \quad \alpha_T = \frac{T_r - T}{1 - T}, \quad \rho = \frac{\rho_1}{\alpha \rho_s}$$

Здесь κ – показатель адиабаты. Отметим, что $\gamma = \alpha$ при $T = 1$ (т.е. при $m = 0$). Из уравнений (1–3) после преобразований получаем

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{\sqrt{\pi T} (2m^2 + 1) \operatorname{erfc}(m) \exp(m^2) - 2m\sqrt{T} + \sqrt{\pi} [(1 - \sqrt{T_r})(1 - \gamma) - 1] g(m)}{2\sqrt{\pi T} [1 - \sqrt{\pi T_r} m - (2m^2 + 1)\sqrt{T}] (\gamma - 1) g(m) + \sqrt{T}} \\ \beta &= \frac{[\sqrt{T_r} (2\rho m \sqrt{\pi T} - 1) + 1 - 2\rho T (2m^2 + 1)] (1 - \gamma) \sqrt{\pi m} - \sqrt{\pi m} + \sqrt{T} (2m^2 + 1)}{\rho T \gamma \exp(-m^2)} \end{aligned} \quad (4)$$

$$T^{3/2} - \sqrt{\pi} \left[g(m) (1 - \gamma) (\sqrt{T_r} - 1) m (m^2 \kappa - m^2 + \kappa) \frac{2}{\kappa + 1} - m \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \right] T -$$

$$- [g(m) (\gamma - 1) (T_r - 1) (2m^2 + 1) + 1] T^{1/2} + \sqrt{\pi} [g(m) (\gamma - 1) (T_r - \sqrt{T_r}) m] = 0$$



Фиг. 1. Зависимости отношения температуры газа вне кнудсеновского слоя к температуре поверхности от числа Маха при различных значениях α_T и γ :
 1 - $\gamma = 1$, 2 - $\gamma = 0.1$, $\alpha_T = 0.5$, 3 - $\gamma = 0.1$, $\alpha_T = 0$, 4 - $\gamma = 0.001$; $\alpha_T = 0$, 5 - зеркальное отражение, $\gamma = 0.001$

Эти уравнения при $\alpha = \gamma = \alpha_T = 1$ переходят в полученные в [2]. При этом уравнение (4) сводится к квадратному относительно $T^{1/2}$, что позволяет выразить T в явном виде как функцию m .

Рассмотрим другой предельный случай $\alpha_T = 0$. Уравнение (4) после преобразований также сводится к квадратному относительно $T^{1/2}$, но с другими, чем в [2] коэффициентами и зависимость $T(m)$ принимает вид

$$T = \left[\frac{1}{2a} [-b - \sqrt{(b^2 - 4ac)}] \right]^2$$

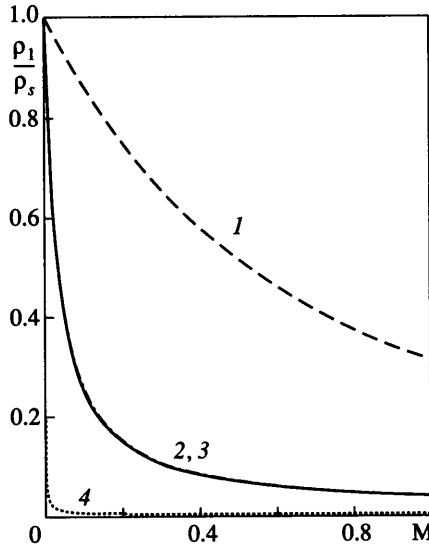
$$a = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} - g(m)(1 - \gamma) \left[\frac{(2m^2 + 1)}{\sqrt{\pi}} - 2 \left[m \frac{(m^2 \kappa - m^2 + \kappa)}{(\kappa + 1)} \right] \right] \quad (5)$$

$$b = -[g(m)(1 - \gamma)(1 + 2m^2) + 1] m \frac{(\kappa - 1)}{(\kappa + 1)}$$

$$c = g(m)(1 - \gamma) \frac{(-\sqrt{\pi}m + 2m^2 + 1)}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

Отметим, что в отличие от случая полной аккомодации ($\alpha_T = 1$) на зависимость $T(m)$ влияет величина коэффициента конденсации. На фиг. 1 и 2 приведены при $\kappa = 5/3$ зависимости $T(M)$, где число Маха $M = \sqrt{2/\kappa} m$, а также соответствующие зависимости $\rho_1(M)/\rho_s$ при $\alpha_T = 0$ и различных значениях $\gamma = \alpha$. Там же для $\gamma = 0.1$ приведены зависимости $T(M)$ и $\rho_1(M)/\rho_s$ при $\alpha_T = 0.5$, найденные путем численного решения уравнения (4).

Как видно из графиков при $\alpha_T = 0$ и при $\gamma \rightarrow 0$, функция $T(M)$ перестает зависеть от γ всюду, за исключением узкой области вблизи $M = 0$. Производя соответствующее



Фиг. 2. Зависимости отношения плотности газа вне кнудсеновского слоя к плотности насыщенных паров при температуре поверхности от числа Маха при различных значениях α_T и γ . Обозначения кривых см. на фиг. 1

асимптотическое разложение решения (5) находим величину температурного скачка вблизи $M = 0$

$$\Delta T = \frac{\kappa - 1}{3\kappa + 1}$$

Результаты расчетов показывают, что учет отличия α_T от единицы приводит к поправкам для T , находящимся в пределах 12%, для ρ в пределах 4%.

Распространим теперь модель [2] на случай зеркального отражения. На внешней границе кнудсеновского слоя функция распределения по-прежнему предполагается максвелловской. Функция распределения на границе раздела фаз выбирается в виде

$$f_2 = \begin{cases} \alpha \rho_s (2\pi RT_s)^{-3/2} \exp\left[-\frac{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}{2RT_s}\right] + (1 - \gamma)\beta f_1(-u), & \xi > 0 \\ \beta f_1, & \xi < 0 \end{cases}$$

Уравнение сохранения массы при переходе через кнудсеновский слой сохраняет вид (1), а уравнения сохранения импульса и энергии принимают вид

$$\rho T (2m^2 + 1) = (2 - \gamma)\beta \rho T \left[\left(\frac{2m^2 + 1}{2} \right) \operatorname{erfc}(m) - \frac{m}{\sqrt{\pi}} \exp(-m^2) \right] + \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{2} \left(m^2 + \frac{5}{2} \right) \rho m T^{3/2} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \left[2 + \frac{5 - 3\kappa}{2(\kappa - 1)} (1 - T) \right] +$$

$$+ \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \gamma \beta \rho T^{3/2} \left[\left(m^2 + \frac{5}{2} \right) \sqrt{\pi} m \operatorname{erfc}(m) - (m^2 + 2) e^{-m^2} \right]$$

Из этих уравнений после преобразований получаем

$$\beta = \frac{2\sqrt{\pi}m[-\sqrt{T}(2m^2 + 1) + m\sqrt{\pi}]\exp(m^2)}{[(\gamma - 2)\sqrt{T}(2m^2 + 1) + \sqrt{\pi}\gamma m]g(m) + (\gamma - 2)\sqrt{T}}$$

$$\rho = \frac{[(\gamma - 2)\sqrt{T}(2m^2 + 1) + \sqrt{\pi}\gamma m]g(m) + (\gamma - 2)\sqrt{T}}{[4\sqrt{\pi}(2m^2 + 1)(\gamma - 1)g(m) + 2\sqrt{\pi}(\gamma - 2)]mT}$$

$$T = \left[\frac{1}{2a}[-b - \sqrt{(b^2 - 4ac)}] \right]^2 \quad (6)$$

$$a = \left[-4(1 + 2m^2)g(m) \left[\frac{\kappa}{(\kappa - 1)} + m^2 \right] - 4m^2 + \frac{-3\kappa + 1}{\kappa - 1} \right] (\gamma - 1) + \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1}$$

$$b = \sqrt{\pi}m\gamma$$

$$c = \frac{(\kappa + 1)}{(\kappa - 1)} [2(2m^2 + 1)(\gamma - 1)g(m) + \gamma - 2]$$

При зеркальном отражении так же, как и в случае диффузионного отражения с $\alpha_T = 0$, при $\gamma \rightarrow 0$ функция $T(M)$ перестает зависеть от γ всюду, за исключением узкой области вблизи $M = 0$, в которой $T(M)$ резко падает. Зависимость $T(M)$ для модели зеркального отражения также приведена на фиг. 2. Производя соответствующее асимптотическое разложение решения (6), находим величину температурного скачка вблизи $M = 0$

$$\Delta T = \frac{\kappa - 1}{2\kappa}$$

Заключение. Выбор модели отражения газа от поверхности влияет в основном на температуру за кнудсеновским слоем. В то же время плотность газа за кнудсеновским слоем зависит главным образом от коэффициентов испарения и конденсации, а выбор той или иной модели испарения лишь вносит поправки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коган М.Н., Макашев Н.К. О роли слоя Кнудсена в теории гетерогенных реакций и в течениях с реакциями на поверхности // Изв. АН СССР. МЖГ. 1971. № 6. С. 3–11.
2. Knight Ch.J. Theoretical modeling of rapid surface vaporization with back pressure // AIAA J. 1979. V. 17 № 5. P. 519–523.
3. Абрамов А.А. Решение задачи о сильном испарении одноатомного газа методом Монте-Карло // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 1. С. 185–188.
4. Kogan M.N., Butkovsky A.V., Erofeev A.I., Freedlander O.G., Makashev N.K. Kinetics of contrail particles formation and heterogeneous reactions on such particles // Proc. Int. Colloq. "Impact of Aircraft Emissions upon the atmosphere". Paris, 1996. V. 2. P. 491–495.