

УДК 533.6.011.5

© 2003 г. С. А. ТАКОВИЦКИЙ

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ В ЗАДАЧЕ ПОСТРОЕНИЯ ПРОФИЛЯ МИНИМАЛЬНОГО ВОЛНОВОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

Предложено решение задачи оптимизации профиля в сверхзвуковом потоке. Построение симметричного профиля, имеющего минимальное волновое сопротивление при заданной площади продольного сечения, проведено в рамках локального анализа вариаций формы относительно точного решения для клина и ромба. Найдены аналитические зависимости, представляющие форму профиля и его сопротивление. Полученное решение проверено численными расчетами в рамках модели Эйлера.

Ключевые слова: профиль, волновое сопротивление, сверхзвуковое обтекание.

При решении задач оптимального профилирования аэродинамических форм широкое применение нашли упрощенные модели течения. С их помощью удается установить характерные особенности оптимальных конфигураций и оценить влияние определяющих параметров. Известны результаты построения профилей минимального сопротивления в рамках линейной теории. Если ограничиться рассмотрением профилей с острыми кромками с малыми углами наклона поверхности к набегающему потоку, то при условии сохранения площади продольного сечения оптимальным является профиль с параболическим контуром [1]. Более общее решение получается при исследовании тел, имеющих донный торец. Сопоставление результатов, полученных в рамках линейной теории, закона сопротивления Ньютона и с помощью модифицированного метода “скачок-волна разрежения”, представлено в [2]. Показано снижение точности результатов, основанных на допущениях линейной теории, в диапазоне больших сверхзвуковых скоростей.

В настоящей работе предлагается метод уменьшения волнового сопротивления профиля на основе локального анализа поверхностного распределения аэродинамической нагрузки. Выводится аналитическая зависимость для образующей оптимального профиля. Высокая точность полученного решения подтверждается численными исследованиями.

1. Постановка задачи. При традиционном использовании локальных моделей течения давление в любой точке поверхности связывается с углом между касательной к телу и скоростью набегающего потока. Таким образом, оценивается изменение газодинамических функций относительно невозмущенных условий. Для повышения точности можно в качестве начальных условий принять данные, полученные в нелинейной постановке. Например, точное значение давления на поверхности клина определяется в теории косоугольного скачка уплотнения. Для ромба давление за изломом контура дает теория Прандтля-Майера. В представленном ниже исследовании данные тела использованы как исходные конфигурации. При этом вариационная задача сведена к определению такого изменения формы тела (с известными условиями обтекания), которое позволяет достичь минимального значения сопротивления.

Представим контур тела с острой вершиной (вследствие симметрии рассматривается только верхняя половина) набором из $N + 1$ отрезков. Отрезки соединяют последовательность точек с координатами $x_0 = 0$ и $y_0 = 0$, x_1 и y_1 , ..., x_{N-1} и y_{N-1} , $x_N = 1$ и

$y_N, x_{N+1} = 1$ и $y_{N+1} = 0$. Длина тела равняется $x_N - x_0 = 1$. Последний отрезок представляет донный срез и имеет нулевую длину в том случае, если задняя кромка острая. В дальнейшем считаем, что давление на донном торце $p_{N+1} = p_b$ известно и не изменяется при вариации формы тела. Коэффициент волнового сопротивления представляется суммой

$$C_x = \frac{1}{\rho_\infty V_\infty^2} \sum_{n=1}^{N+1} p_n (y_n - y_{n-1})$$

где p_n – давление для n -го отрезка, $\rho_\infty V_\infty^2$ – удвоенный скоростной напор невозмущенного потока.

Далее предполагаем, что профиль тонкий и углы между осью симметрии (ось X) и N первыми отрезками малы. Свойство локальности сверхзвуковых течений позволяет связать изменение поверхностного давления в некоторой точке с деформацией формы в ее окрестности. При этом наиболее простым математическим инструментом является теория течения типа простой волны. Пространственное перемещение отрезка требует разворота вектора скорости таким образом, чтобы он остался параллелен поверхности. Разворот потока приводит к изменению давления. Для слабых волн при условии малости деформаций профиля связь давления с геометрическими параметрами устанавливается соотношением

$$\Delta p_n = \frac{\gamma M_n^2 p_n (\Delta y_n - \Delta y_{n-1})}{\sqrt{M_n^2 - 1} (x_n - x_{n-1})} = r_n (\Delta y_n - \Delta y_{n-1})$$

где M_n – число Маха, $\Delta p_n, \Delta y_n$ и Δy_{n-1} – изменения давления и ординат концевых точек n -го отрезка, γ – отношение удельных теплоемкостей. Аналогичный подход использован в обратном методе оптимизации при определении геометрии крыла, обеспечивающей заданное поверхностное распределение давления [3].

Суммирование изменения нагрузки по поверхности профиля дает аппроксимацию функции, представляющей изменение сопротивления, в виде квадратичной формы

$$\Delta C_x = \frac{1}{\rho_\infty V_\infty^2} \left\{ \sum_{n=1}^N [(p_n + r_n (y_n - y_{n-1})) (\Delta y_n - \Delta y_{n-1}) + r_n (\Delta y_n - \Delta y_{n-1})^2] - p_b \Delta y_N \right\} \quad (1.1)$$

Положение начальной и конечной точек контура не изменяется: $\Delta y_0 = 0, \Delta y_{N+1} = 0$.

Следует обратить внимание на то, что для определения квадратичной аппроксимации целевой функции оказалось достаточным взять линейную аппроксимацию давления. При учете квадратичного члена для Δp_n в функции сопротивления появляется квадратичный член, пропорциональный тангенсу угла наклона контура тела: $(y_n - y_{n-1}) / (x_n - x_{n-1})$. В рамках сделанных предположений о тонкости профиля данный член пренебрежимо мал.

Далее последовательно рассмотрены профили с торцом и без него. В первом случае оптимальные вариации формы строятся относительно клина, во втором случае – относительно ромба. На существование вариаций формы, позволяющих уменьшить сопротивление клина, впервые указано в [4].

2. Профиль с донным торцом. Построение профиля проведем при условии сохранения площади продольного сечения S . Здесь и далее принимаем равномерное распределение узловых точек: $x_n = n/N, n = 1, \dots, N$.

Введя функцию Лагранжа $F = \Delta C_x + \lambda S$ с множителем λ и осуществив дифференцирование по независимым переменным, получим систему из $N + 1$ линейных уравнений

для определения оптимальной вариации формы (первое из них выражает условие сохранения площади S)

$$2\Delta y_1 + 2\Delta y_2 + \dots + 2\Delta y_{N-1} + \Delta y_n = 0$$

$$2\lambda + p_1 + r_1 y_1 - p_2 - r_2 (y_2 - y_1) + 2(r_1 + r_2)\Delta y_1 - 2r_2 \Delta y_2 = 0$$

$$2\lambda + p_2 + r_2 (y_2 - y_1) - p_3 - r_3 (y_3 - y_2) + 2(r_2 + r_3)\Delta y_2 - 2r_2 \Delta y_1 - 2r_3 \Delta y_3 = 0$$

...

$$2\lambda + p_{N-1} + r_{N-1} (y_{N-1} - y_{N-2}) - p_N - r_N (y_N - y_{N-1}) + 2(r_{N-1} + r_N)\Delta y_{N-1} - 2r_{N-1} \Delta y_{N-2} - 2r_N \Delta y_N = 0$$

$$\lambda + p_N + r_N (y_N - y_{N-1}) - p_b + 2r_N \Delta y_N - 2r_N \Delta y_{N-1} = 0$$

После несложных преобразований получаем представления для множителя Лагранжа и изменения высоты всех узловых точек через изменение высоты первой точки

$$\lambda = -[p_1 - p_b + r_1 (y_1 + 2\Delta y_1)] / (2N - 1)$$

$$\Delta y_n = \frac{1}{2N-1} \sum_{i=1}^n [(2N-i)(p_1 + r_1 (y_1 + \Delta y_1)) + (i-1)(p_b - r_1 \Delta y_1) - (2N-1)(p_i + r_i (y_i - y_{i-1}))] r_i^{-1}$$

Из условия сохранения площади S численным путем можно определить значения $\Delta y_1, \dots, \Delta y_N$. Для того, чтобы найти аналитическое решение задачи, примем за начальную форму клин с углом $\delta = \arctg(2S)$. Тогда для всех элементов выполняются $y_n = x_n \operatorname{tg} \delta$, $p_n = p_s$, $M_n = M_s$, $r_n = \gamma M_s^2 p_s N / \sqrt{M_s^2 - 1}$, где p_s и M_s – давление и число Маха за косым скачком уплотнения. В результате имеем выражение для оптимальной вариации высоты n -й точки

$$\Delta y_n = \left[\operatorname{tg} \delta + \frac{\sqrt{M_s^2 - 1}}{\gamma M_s^2} \left(1 - \frac{p_b}{p_s} \right) \right] \frac{n(2N^2 - 3nN + 1)}{2N(4N^2 - 1)} \quad (2.1)$$

При устремлении $N \rightarrow \infty$ перейдем к непрерывной зависимости

$$\Delta y = \frac{1}{8} \left[\operatorname{tg} \delta + \frac{\sqrt{M_s^2 - 1}}{\gamma M_s^2} \left(1 - \frac{p_b}{p_s} \right) \right] (2 - 3x)x \quad (2.2)$$

Таким образом, оптимальная вариация формы клина является параболой, которая имеет вершину при $x = 1/3$ и пересекает ось X в точках $x = 0$ и $2/3$. Соответствующее изменение волнового сопротивления по отношению к сопротивлению клина $C_x^w = (p_s - p_b) \operatorname{tg} \delta / (\gamma p_\infty M_\infty^2)$ (p_∞ и M_∞ – давление и число Маха в невозмущенном потоке) составляет

$$\frac{\Delta C_x}{C_x^w} = -\frac{\gamma M_s^2}{16 \operatorname{tg} \delta \sqrt{M_s^2 - 1}} \left[\operatorname{tg} \delta + \frac{\sqrt{M_s^2 - 1}}{\gamma M_s^2} \left(1 - \frac{p_b}{p_s} \right) \right]^2 \left(1 - \frac{p_b}{p_s} \right)^{-1}$$

Соотношение (2.1) позволяет исследовать характер изменения сопротивления профиля при увеличении числа отрезков, образующих его контур. Аналогичное исследование выполнено для конических крыльев в [5]. Представив контур тела набором из 9 отрезков ($N = 8$), можно получить более 95% от максимального выигрыша в волновом сопротивлении по отношению к клину.

Полученные результаты проверены численными расчетами уравнений Эйлера [6]. Рассмотрен класс контуров параболической формы $y = x \tan \delta + f \Delta y$, где Δy определяется из (2.2). При $f = 0$ профиль имеет форму клина. Угол $\delta = 10.89^\circ$ соответствует площади $S = 0.09623$. Аналитическая и расчетная зависимости коэффициента C_x (отнесено к C_x^w) от параметра формы f , полученные при $M_\infty = 3$, $p_b = p_\infty$ и $\gamma = 1.4$, представлены на фиг. 1. Функции имеют минимумы при близких значениях $f = 1$ и 0.98 , соответственно. Это свидетельствует о высокой точности определения формы оптимального контура. Точность аналитического вычисления волнового сопротивления низкого. Различия минимальных значений C_x составляет 3.5%.

Таким образом, оптимальный профиль имеет параболическую форму

$$y = \frac{1}{4} \left[10S + \frac{\sqrt{M_s^2 - 1}}{\gamma M_s^2} \left(1 - \frac{p_b}{p_s} \right) \right] x - \frac{3}{8} \left[2S + \frac{\sqrt{M_s^2 - 1}}{\gamma M_s^2} \left(1 - \frac{p_b}{p_s} \right) \right] x^2 \quad (2.3)$$

Оптимальный профиль и клин для рассмотренного выше примера показаны на фиг. 2. Для полученного решения выполняется условие Буземана, связывающее параметры течения и геометрические параметры в концевой точке оптимального контура [7]. У построенного аналитически профиля производная dy/dx в концевой точке контура имеет положительное значение. Давление в данной точке, вычисленное по соотношениям локальной модели, меньше донного давления. В то же время, численное значение превышает донное давление.

Сопоставление характеристик оптимальных контуров, полученных аналитически и оптимизацией с помощью модифицированного метода "скачок-волна разрежения" [2], показывает хорошее согласование в широком диапазоне изменения числа Маха (фиг. 3). По значениям коэффициента волнового сопротивления C_x аналитические профили уступают профилям из [2] не более 0.5%. Заметим, что линейная теория дает заметно худшие результаты, особенно при больших числах Маха. Полученные в рамках линейной теории профили с торцом имеют волновое сопротивление на 5% большее, чем соответствующее минимальное значение.

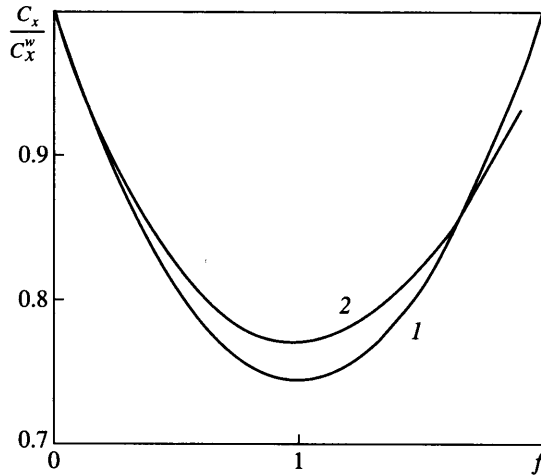
При постановке задачи не было учтено условие на отсутствие самопересечений нижней и верхней образующих профиля: $y_n \geq 0$, $n = 1, \dots, N$. Поэтому полученное решение справедливо при выполнении неравенства

$$14S - \frac{\sqrt{M_s^2 - 1}}{\gamma M_s^2} \left(1 - \frac{p_b}{p_s} \right) \geq 0$$

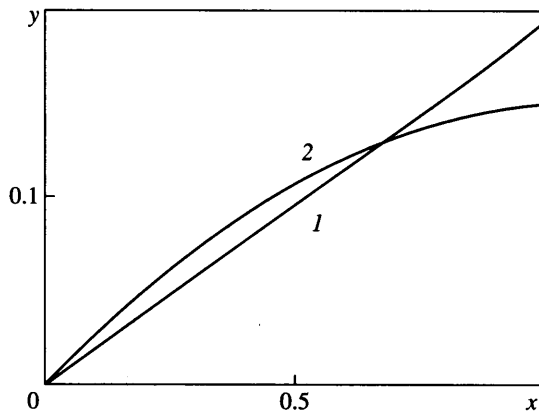
Отсюда следует, что оптимальный профиль имеет торец, если площадь продольного сечения превышает некоторое значение, определяемое по значениям параметров течения около клина

$$S_t = \frac{1}{14} \frac{\sqrt{M_s^2 - 1}}{\gamma M_s^2} \left(1 - \frac{p_b}{p_s} \right) \quad (2.4)$$

Эквивалентное соотношение в рамках линейной теории установлено в [8].



Фиг. 1. Сопротивление C_x профилей параболической формы по отношению к сопротивлению C_x^w клина в зависимости от параметра формы f при $M_\infty = 3$, $S = 0.09623$, $p_b = p_\infty$: 1 – аналитическая зависимость; 2 – численный расчет



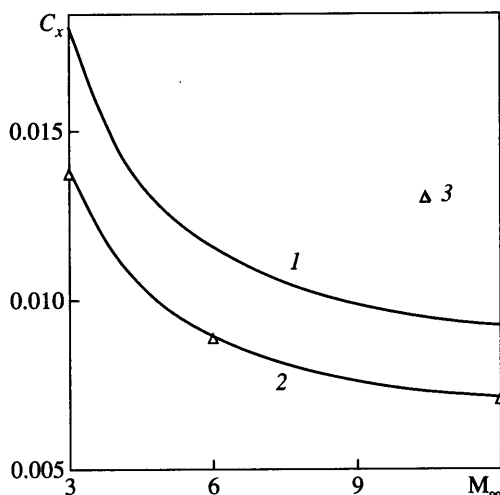
Фиг. 2. Контуры клина и оптимального профиля при $M_\infty = 3$, $S = 0.09623$, $p_b = p_\infty$: 1 – клин; 2 – оптимальный профиль

В предельном случае, когда площадь соответствует условию появления торца $S = S_p$, решение сходится к решению [1]. Контур оптимального профиля является параболой, симметричной относительно $x = 0.5$: $y = 6S(1 - x)x$.

При дальнейшем уменьшении площади ($S < S_p$) использование клина в качестве начальной формы не позволяет определить оптимальную форму профиля. Вариацию формы следует проводить относительно ромба.

3. Профиль с острыми кромками. Отсутствие донного торца определяется равенством $y_N = 0$.

Выберем в качестве начальной формы ромб с полууглом при вершине, соответствующем заданному значению площади: $\delta = \arctg(4S)$. Для первых $N/2$ отрезков контура давление p_s и число Маха M_s отвечают условиям за косым скачком уплотнения. Для остальных $N/2$ отрезков, расположенных за изломом контура, давление p_v и число Ма-



Фиг. 3. Сопротивление C_x профилей в зависимости от числа Маха M_∞ при $S = 0.09623$, $p_b = p_\infty$: 1 – клин; 2 – профили по аналитическому решению; 3 – профили по модифицированному методу “скачок-волна разрежения” [2]

ха M_v определяются по теории обтекания внешнего тупого угла сверхзвуковым потоком газа. Для изменения давления имеем выражения

$$\Delta p_n = r_i(\Delta y_n - \Delta y_{n-1})$$

$$r_i = \gamma M_i^2 p_i N (\sqrt{M_i^2 - 1})^{-1}, \quad i = s, \quad n \leq N/2; \quad i = v, \quad n > N/2$$

Соотношение (1.1) для целевой функции в данном случае примет вид

$$\Delta C_x = \frac{1}{\rho_\infty V_\infty^2} \sum_{n=1}^N [(p_n + r_n(y_n - y_{n-1}))(\Delta y_n - \Delta y_{n-1}) + r_n(\Delta y_n - \Delta y_{n-1})^2]$$

Введение функции Лагранжа сводит задачу к безусловной минимизации функции многих переменных. Наличие излома контура ромба при $x = 0.5$ требует введения дополнительного ограничения, обеспечивающего непрерывность производной dy/dx для оптимального контура. При этом изменение высоты $N/2$ -й точки перестает быть независимым параметром и определяется соотношением

$$\Delta y_{N/2} = \frac{1}{2}(\Delta y_{N/2-1} + \Delta y_{N/2+1}) - \text{tg} \delta N^{-1}$$

Условия оптимальности представлены системой из N линейных уравнений

$$\Delta y_1 + \Delta y_2 + \dots + \Delta y_{N-1} = 0$$

$$\Delta y_{N/2} = \frac{1}{2}(\Delta y_{N/2-1} + \Delta y_{N/2+1}) - \text{tg} \delta N^{-1}$$

$$\lambda + 4r_s \Delta y_1 - 2r_s \Delta y_2 = 0$$

$$\lambda + 4r_s \Delta y_2 - 2r_s \Delta y_1 - 2r_s \Delta y_3 = 0$$

...

$$\lambda + 4r_s \Delta y_{N/2-1} - 2r_s \Delta y_{N/2} - 2r_s \Delta y_{N/2-2} = 0$$

$$\lambda + 4r_v \Delta y_{N/2+1} - 2r_v \Delta y_{N/2+2} - 2r_v \Delta y_{N/2} = 0$$

...

$$\lambda + 4r_v \Delta y_{N-2} - 2r_v \Delta y_{N-1} - 2r_v \Delta y_{N-3} = 0$$

$$\lambda + 4r_v \Delta y_{N-1} - 2r_v \Delta y_{N-2} = 0$$

Здесь последние $N - 2$ уравнения получены дифференцированием функции Лагранжа по независимым параметрам Δy_n .

Приведем окончательный результат, выражающий непрерывную зависимость Δy от x

$$\Delta y = 0.25x' \operatorname{tg} \delta (S - (r_s/r_v)^q - 12x')(1 + (r_s/r_v)^q)^{-1} \quad (3.1)$$

$$x' = x, \quad q = 1, \quad x \leq 0.5; \quad x' = 1 - x, \quad q = -1, \quad x > 0.5$$

Соответствующее изменение сопротивления определяется сложной формулой и здесь не представлено.

Полученное решение проверено исследованием в рамках модели Эйлера при следующих значениях определяющих параметров: $M_\infty = 3$, $\gamma = 1.4$, $S = 0.0165$ ($\delta = 3.78^\circ$). Рассчитано волновое сопротивление для профилей, построенных из ромба наложением вариации $f\Delta y$ (Δy из (3.1)). Аналитическая и численная зависимости волнового сопротивления, отнесенного к сопротивлению ромба $C_x^r = (p_s - p_v) \operatorname{tg} \delta / (2\gamma p_\infty M_\infty^2)$, от параметра формы f удовлетворительно согласуются во всем рассмотренном диапазоне (фиг. 4).

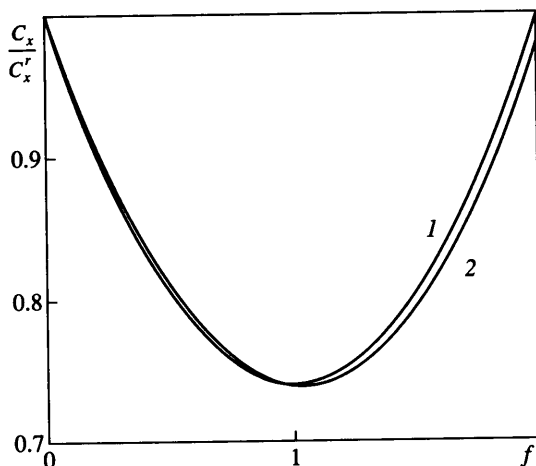
Контур оптимального профиля образован двумя параболическими участками

$$y = 3Sx'(3 + (r_s/r_v)^q - 4x')(1 + (r_s/r_v)^q)^{-1} \quad (3.2)$$

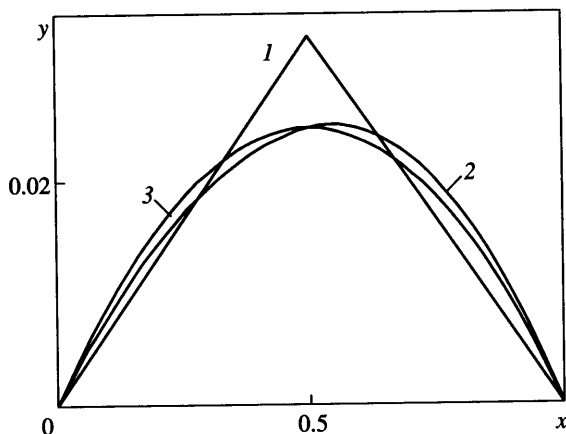
$$x' = x, \quad q = 1, \quad x \leq 0.5; \quad x' = 1 - x, \quad q = -1, \quad x > 0.5$$

Если принять $r_s = r_v$, то будет получен известный параболический профиль, симметричный относительно середины хорды [1]. Данное решение является предельным при $S \rightarrow 0$. При ненулевых значениях площади продольного сечения толщина оптимального профиля больше толщины профиля, полученного в рамках линейной теории. Сопоставление профилей для рассмотренного выше примера дано на фиг. 5. Внутренняя площадь профиля перераспределяется дальше от его вершины. Это согласуется с результатами, полученными в нелинейной постановке [9]. При $S = 0.0165$ полученный в аналитическом решении профиль превосходит профиль с симметричным параболическим контуром по значениям волнового сопротивления на 2%. Данная площадь соответствует условию $S = S_c$ при $p_b = 0$. При увеличении площади выигрыш возрастает и при $S = 0.09623$ достигает 22%. В этом случае, однако, даже при $p_b = 0$ оптимален построенный ранее профиль с задним торцом.

4. Предельное решение при $K \equiv M_\infty \operatorname{tg} \delta \gg 1$. Полученные аналитические представления для контуров оптимальных профилей (2.3) и (3.2) допускают определение предельного решения для течения с большими значениями числа Маха, когда гиперзвуковой параметр подобия $K \equiv M_\infty \operatorname{tg} \delta \gg 1$. В этом случае соотношение (2.4) для S , показывает, что при любом значении площади продольного сечения оптимальный профиль имеет торец (даже при $p_b = 0$). Поэтому представленное ниже решение для профиля с



Фиг. 4. Сопротивление C_x профилей по отношению к сопротивлению C_x^r ромба в зависимости от параметра формы f при $M_\infty = 3$, $S = 0.0165$: 1 – аналитическая зависимость; 2 – численный расчет



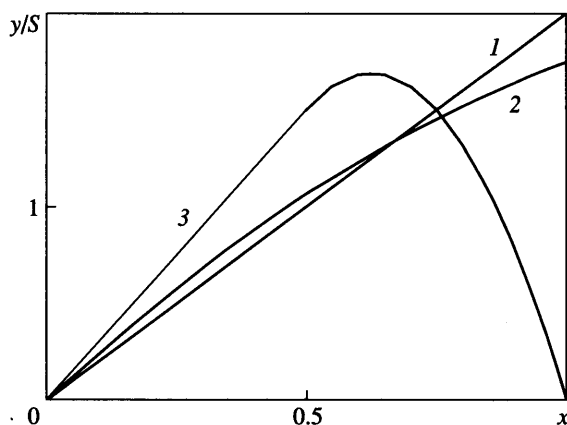
Фиг. 5. Контуры ромба и оптимальных профилей при $S = 0.0165$: 1 – ромб; 2 – профиль, оптимальный при $M_\infty = 3$; 3 – параболический профиль [1]

острыми кромками носит иллюстративный характер. Контуры профилей в сопоставлении с клином эквивалентной площади показаны на фиг. 6.

Оптимальный профиль при $K \gg 1$ имеет параболическую форму, задаваемую соотношением

$$y = 2.5S \left[1 + \sqrt{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \left(1 - \frac{p_b}{p_s} \right) \right] (1 - 0.3x)x$$

При $\gamma = 1$ (фиг. 6) производная dy/dx на передней кромке оптимального профиля на одну четверть превышает тангенс полуугла клина. По мере движения к хвостовому сечению dy/dx уменьшается в 2.5 раза. Максимальная толщина составляет 7/8 от максимальной толщины клина.



Фиг. 6. Контуры клина и оптимальных профилей при $K \gg 1$: 1 – клин; 2 – профиль с донным торцом; 3 – профиль с острыми вершинами

Заметим, что построенный аналитически оптимальный контур имеет положительный наклон в концевой точке. Этот результат обусловлен особенностями математической модели течения. При $K \gg 1$ используемая локальная модель неточно определяет изменение давления на профиле. В представленном выше примере значения производной dy/dx в концевой точке клина и оптимального контура различаются в 2 раза. При этом согласно соотношениям локального анализа давление становится отрицательным. Условие Буземана выполняется и в этом случае, так как оптимальный контур имеет положительный угол наклона в концевой точке [7].

Профиль с острыми кромками имеет форму клина, заканчивающегося параболическим участком

$$y = 3Sx'(3 - 4x')^q, \quad x' = x, \quad q = 0, \quad x \leq 0.5; \quad x' = 1 - x, \quad q = 1, \quad x > 0.5$$

Максимальная толщина профиля составляет $27/28$ от максимальной толщины профиля с торцом и достигается при $x = 5/8$. Отношение значений тангенса полуугла при вершине профилей равно $6/5$.

Заключение. В рамках локального анализа получено решение задачи построения симметричного профиля, имеющего минимальное волновое сопротивление при заданной площади продольного сечения. Рассмотрены профили с острыми кромками и с донным торцом. Для образующих профилей установлены аналитические зависимости. Численные расчеты в рамках модели Эйлера подтвердили высокую точность определения оптимальных форм в широком диапазоне изменения числа Маха.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Друге Г. Плоские крылья минимального волнового сопротивления // Теория оптимальных аэродинамических форм. М.: Мир, 1969. С. 87–94.
2. Крайко А.Н., Пудовиков Д.Е. О построении симметричных профилей, оптимальных в сверх- и гиперзвуковом потоке при произвольных изопериметрических условиях // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 6. С. 931–946.
3. Davis W.H., Jr. Technique for developing design tools from the analysis methods of computational aerodynamics // AIAA Paper. 1979. № 79–1529. 9p.
4. Черный Г.Г. Сверхзвуковое обтекание профиля, близкого к клину // Тр. ЦИАМ им. П.М. Баранова. 1950. № 197. 11 с.

5. Таковицкий С.А. О выборе системы геометрических параметров оптимизируемого крыла // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 5. С. 825–833.
6. Таковицкий С.А. Метод расчета сверхзвукового обтекания летательных аппаратов с использованием многозонных расчетных сеток // Тр. ЦАГИ. 1997. Вып. 2590. С. 24–32.
7. Крайко А.Н. Вариационные задачи газовой динамики. М.: Наука, 1979. 447 с.
8. Крайко А.Н., Пудовиков Д.Е., Якунина Г.Е. Теория аэродинамических форм, близких к оптимальным / Под ред. А.Н. Крайко. М.: Янус-К, 2001. 132 с.
9. Миеле А., Ластри А. Теория второго порядка для оптимизации плоских крыльев // Теория оптимальных аэродинамических форм. М.: Мир, 1969. С. 147–160.

Жуковский
E-mail: c.a.t@tsagi.ru

Поступила в редакцию
13.III.2003