

УДК 532.529:534.2

© 2003 г. Д. А. ГУБАЙДУЛЛИН

**СФЕРИЧЕСКИЕ И ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ МАЛОЙ АМПЛИТУДЫ  
В ПОЛИДИСПЕРСНЫХ ТУМАНАХ С ФАЗОВЫМИ ПРЕВРАЩЕНИЯМИ**

Развита линейная теория распространения сферических и цилиндрических возмущений в полидисперсных смесях газа с паром и каплями жидкости. Учтены нестационарные и неравновесные эффекты межфазного обмена импульсом, массой и теплом. Получено единое общее дисперсионное соотношение, определяющее распространение гармонических возмущений в полидисперсных парогазокапельных системах в плоском, сферическом и цилиндрическом случаях. С помощью метода быстрого преобразования Фурье выполнены расчеты по распространению импульсных возмущений различной формы в смесях воздуха с паром и каплями воды. Изучено влияние геометрии процесса и межфазного теплообмена на эволюцию слабых импульсов в полидисперсных воздушных туманах.

*Ключевые слова:* аэрозоли, волны, затухание, полидисперсность, теплообмен.

Исследование распространения малых возмущений в двухфазных смесях газа с паром и каплями жидкости является одной из актуальных проблем волновой динамики многофазных систем. Основное количество работ по акустике взвесей посвящено изучению распространения и затухания плоских монохроматических волн [1–17]. При этом значительная часть этих исследований проведена в рамках монодисперсных моделей [1–10]. Краткий обзор по акустике монодисперсных туманов дан, например, в [8]. Учет влияния полидисперсного состава взвеси на распространение монохроматических возмущений в однокомпонентных смесях газа с частицами или пара с каплями выполнен в [11–14]. В [15, 16] впервые исследованы особенности распространения монохроматических волн в двухкомпонентных полидисперсных смесях газа с паром и каплями жидкости. Получена дисперсионная зависимость волнового числа от частоты колебаний и теплофизических свойств фаз. Интересные эффекты из-за влияния фазовых превращений на распространения звука в двухфракционных туманах обнаружены в [17]. Первые результаты по изучению динамики импульсных волн малой амплитуды в монодисперсных парогазокапельных смесях изложены в [18]. Получены и проанализированы эволюционные уравнения типа волновых, описывающие распространение линейных волн в монодисперсных взвесах с фазовыми переходами. В [19] изучен аномальный эффект немонотонной зависимости диссипации слабых гармонических и импульсных возмущений от массовой концентрации капель  $m$  в монодисперсных аэрозолях с теплообменом. Парадоксальность обнаруженного кризиса затухания заключается в том, что в некотором диапазоне изменения  $m$  и частот возмущений наблюдается уменьшение затухания возмущений с увеличением концентраций капель, являющихся источником и основной причиной диссипации волн. Влияние полидисперсного состава и фазовых превращений на эволюцию слабых импульсных возмущений в парогазокапельных средах в плоском случае рассмотрено в [20]. Достаточно полное изложение линейной теории распространения плоских возмущений в моно- и полидисперсных двухфазных смесях газа с паром и каплями жидкости представлено в [21, 22].

В настоящей работе впервые исследуются особенности распространения малых сферических и цилиндрических возмущений в полидисперсных парогазокапельных смесях при учете нестационарных и неравновесных эффектов диффузионного массо-

обмена между фазами. Отметим, что некоторые аспекты распространения слабых сферических и цилиндрических волн в чистом газе рассмотрены ранее в [23, 24]. Результаты исследования распространения сферических и цилиндрических возмущений малой амплитуды в моно- и полидисперсных газовзвесах без фазовых превращений представлены в [25].

**1. Основные уравнения.** Система линейных интегродифференциальных уравнений движения полидисперсной парогазокапельной смеси в системе координат, относительно которой невозмущенная взвесь покоится, имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_i'}{\partial t} + \rho_{i0} \frac{\partial v_1'}{\partial x^1} + (k_1 + k_2) \rho_{i0} \frac{v_1'}{x^1} &= -J \\ \frac{\partial \rho_2'}{\partial t} + \int_{\Delta} \left( \frac{\partial v_2'}{\partial x^1} + (k_1 + k_2) \frac{v_2'}{x^1} \right) N_0 g_0 da &= J \\ \left( J = \int_{\Delta} N_0 j da, \quad i = 1, V \right), \quad \rho_1' &= \rho_V' + \rho_G' \\ \rho_{10} \frac{\partial v_1'}{\partial t} + \frac{\partial p_1'}{\partial x^1} + \int_{\Delta} f N_0 da = 0, \quad g_0 \frac{\partial v_2'}{\partial t} &= f \\ \rho_{10} c_{p1} \frac{\partial T_1'}{\partial t} - \frac{\partial p_1'}{\partial t} = \int_{\Delta} N_0 q_1 da, \quad g_0 c_2 \frac{\partial T_2'}{\partial t} &= -q_2 \\ q_1 + q_2 &= -j l_0, \quad (p_1' = p_V' + p_G', \quad c_{p1} = k_V c_{pV} + k_G c_{pG}) \\ n &= \int_{\Delta} N(a) da, \quad \alpha_2 = \frac{4}{3} \pi \int_{\Delta} a^3 N(a) da, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ \rho_1 &= \rho_1^{\circ} \alpha_1, \quad \rho_2 = \rho_2^{\circ} \alpha_2 = \int_{\Delta} g(a) N(a) da, \quad g(a) = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho_2^{\circ} \\ m &= \frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad k_j = \frac{\rho_j}{\rho_1} \quad (j = V, G), \quad k_V + k_G = 1 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Система (1.1) при значениях параметров  $k_1 = k_2 = 0$  описывает плоские волны в декартовых координатах ( $x^1, x^2, x^3 = x, y, z$ ) [16], при  $k_1 = 1, k_2 = 0$  – цилиндрические волны в координатах ( $x^1, x^2, x^3 = r, \varphi, z$ ), при  $k_1 = 1, k_2 = 1$  – сферические волны в координатах ( $x^1, x^2, x^3 = r, \varphi, \psi$ ).

Здесь и далее  $\rho^{\circ}, \rho, v, p, T$  – истинная и средняя плотности, скорость, давление и температура;  $f$  – сила, действующая со стороны газа на отдельную каплю,  $J$  – суммарная интенсивность межфазного массообмена в единице объема, которая определяется диффузионным потоком пара к поверхности капли и интенсивностью конденсации или испарения на поверхности отдельной капли;  $j, q_i$  – интенсивность межфазного массообмена и тепловой поток между поверхностью капли и  $i$ -ой фазой ( $i = 1, 2$ ),  $c, l$  – теплоемкость и удельная теплота парообразования;  $N(a)$  – функция распределения ка-

пель по размерам во взвеси с минимальным  $a_{\min}$  и максимальным  $a_{\max}$  радиусами капель на отрезке  $\Delta = [a_{\min}, a_{\max}]$ ,  $n$ ,  $\alpha$  – число частиц в единице объема и объемное содержание,  $g$ ,  $m$ ,  $k_j$  – масса одной капли, начальное массовое содержание капель и начальная массовая концентрация компонент газовой фазы. Нижние индексы 1 и 2 относятся к параметрам газовой фазы и каплям,  $V$  и  $G$  – к параметрам парового и газового компонента несущей фазы; штрихи обозначают возмущения параметров, индекс 0 – начальное невозмущенное состояние.

В рамках проводимого линейного анализа в соответствии с принципом суперпозиции любое акустическое возмущение может быть представлено как сумма наложенных друг на друга гармонических возмущений, поэтому при задании межфазного взаимодействия используются соотношения, полученные для монохроматических волн. Сила, действующая на частицу дисперсной смеси, представляется как сумма сил вязкого трения (силы Стокса), Архимеда, присоединенных масс и силы Бассэ [14]. Интенсивность межфазного взаимодействия зависит от частоты колебаний и определяется формулами, приведенными в [14, 16]

$$f = g_0 \frac{v'_1 - v'_2}{\tau_v^*} - \frac{v'_1}{\tau_A^*}, \quad q_1 = g_0 \frac{c_{p1} T'_1 - T'_\Sigma}{m \tau_{T1}^*}$$

$$q_2 = g_0 c_2 \frac{T'_2 - T'_\Sigma}{\tau_{T2}^*}, \quad j = g_0 \frac{r p'_1 - p'_{V\Sigma}}{p_{10} \tau_{k1}^*} = g_0 \frac{r p'_{V\Sigma} - p'_{VS}}{p_{10} \tau_\beta} \quad (1.2)$$

$$p'_{VS} = T'_\Sigma \frac{l_0 \rho_{V0}^\circ}{T_0} \left( r = \frac{\rho_{10}^\circ}{\rho_{20}^\circ} \right)$$

Здесь  $p'_{VS}(a, x^1, t)$  – парциальное давление насыщения пара, связанное с температурой поверхности капли  $T'_S(a, x^1, t)$  уравнением Клапейрона–Клаузиуса,  $\tau_\psi^*$  ( $\psi = v, k1, \beta, T1, T2$ ) – комплексные времена, характеризующие динамику и тепломассообмен одиночной капли с окружающим газом в высокочастотном акустическом поле

$$\tau_v^* = \tau_v \left[ \frac{1-i}{\sqrt{2}} (\omega \tau_{\mu 1})^{1/2} \right]^{-1}, \quad \tau_A^* = -\frac{i}{r \omega}$$

$$\tau_{T1}^* = \frac{1}{3} \frac{\alpha_{10} \tau_d}{\alpha_{20} (1+y)}, \quad \tau_{T2}^* = \frac{1}{3} \tau_{\lambda 2} \frac{5 [3z_2 - (3-z_2^2) \text{th} z_2]}{z_2^2 (\text{th} z_2 - z_2)}$$

$$\tau_{k1}^* = \frac{1}{3} \frac{R_V}{R_{10}} (1 - k_V) \frac{\tau_d}{1+y}, \quad \tau_\beta = \frac{1}{3} \frac{\sqrt{2\pi} \gamma_1 C_V a}{\gamma_V \beta C_1^2} \quad (1.3)$$

$$\tau_v = \frac{2\rho_2^\circ a^2}{9\mu_1}, \quad \tau_{\mu 1} = \frac{\rho_1^\circ a^2}{\mu_1}, \quad \tau_d = \frac{a^2}{D_1}, \quad \tau_{\lambda 1} = \frac{a^2}{\kappa_j} \left( \kappa_j = \frac{\lambda_j}{\rho_j^\circ c_j} \right)$$

$$y = \frac{1-i}{\sqrt{2}} (\omega \tau_d)^{1/2}, \quad z_j = \frac{1-i}{\sqrt{2}} (\omega \tau_{\lambda 1})^{1/2}, \quad (j = 1, 2)$$

Здесь  $\mu_1$ ,  $\lambda_1$  и  $D_1$  – коэффициенты динамической вязкости, теплопроводности и бинарной диффузии газовой фазы,  $\beta$  – коэффициент аккомодации,  $\lambda_2$  – теплопроводность жидких капель,  $\omega$  – частота возмущений. Предполагается, что компоненты га-

зообразной фазы являются калорически совершенными газами. Капли считаются несжимаемыми.

Система уравнений (1.1) – (1.3) замкнута и может быть использована для исследования распространения акустических возмущений в полидисперсных смесях газа с паром и каплями жидкости в плоском, сферическом и цилиндрическом случаях.

Далее исследуются решения системы линейных уравнений (1.1) – (1.3), имеющих вид прогрессивных волн для потенциалов скоростей фаз (аналогично решениям, предложенным для чистого газа в [23, 24]) для плоских, цилиндрических и сферических возмущений соответственно

$$\begin{aligned}\varphi'_{1,2} &= A_{1,2} \exp[i(K_* x - \omega t)] \\ \varphi'_{1,2} &= A_{1,2} H(K_* r) \exp(-i\omega t) \\ \varphi'_{1,2} &= A_{1,2} \frac{1}{r} \exp[i(K_* r - \omega t)]\end{aligned}\tag{1.4}$$

$$K_* = K + iK_{**}, \quad C^{(p)} = \frac{\omega}{K}, \quad C^{(g)} = \frac{d\omega}{dK}, \quad \sigma = 2\pi \frac{K_{**}}{K} \quad (i^2 = -1)$$

где  $H(K_* r)$  – функция Ханкеля,  $K_*$  – комплексное волновое число,  $C^{(p)}$  и  $C^{(g)}$  – фазовая и групповая скорости,  $\sigma$  – декремент затухания на длине волны.

Выразив амплитуды параметров фаз (скоростей, давления, плотностей и температур) и их производные через потенциалы скоростей  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , подставив полученные выражения в систему уравнений (1.1) и отыскав решения вида (1.4), можно получить единое дисперсионное соотношение, определяющее распространение как плоских, так и сферических и цилиндрических возмущений в полидисперсных смесях газа с паром и каплями жидкости, по виду совпадающее с выражением в [16]

$$\left(\frac{C_1 K_*}{\omega}\right)^2 = V(\omega) D(\omega)\tag{1.5}$$

Здесь  $V(\omega)$ ,  $D(\omega)$  – комплексные функции, описывающие эффекты дисперсии и диссипации звука во взвеси из-за межфазных процессов трения и теплообмена. Если частицы отсутствуют ( $m = 0$ ), тогда  $V = D = 1$ , т.е. в газе без частиц дисперсии и диссипации нет. Функции  $V(\omega)$  и  $D(\omega)$  зависят также от теплофизических параметров фаз и спектрального состава смеси и при умеренных давлениях ( $r \ll 1$ ) и малых объемных содержаниях дисперсной фазы ( $\alpha_2 \ll 1$ ) имеют вид

$$V(\omega) = 1 + m(1 - i\omega\tau_v^*)^{-1}$$

$$D(\omega) = 1 + mr(\gamma_1 - 1) \frac{H_2 - bk_v \gamma_1 (bc_1' H_3 - 2l_0' H_1) - M_1 \Lambda}{1 + mr(H_2 - BH_3 - M_2 \Lambda)}$$

$$\Lambda = LH_1^2 + H_2 H_3, \quad H_j = \langle h_j \rangle, \quad j = 1, 2, 3: \quad h_1 = Ze_2, \quad h_2 = Z(e_1 - Le_2)$$

$$h_3 = Ze_2(1 - i\omega\tau_{\Sigma 1}^* e_1)$$

$$Z = r \left[ r - i\omega\tau_{\Sigma 1}^* \left( e_1 - \frac{\rho_{v0}^{\circ}}{\rho_{10}} r l_0 (\gamma_1 - 1) e_2 \right) \right]^{-1}, \quad \langle h \rangle = \frac{1}{\rho_{20} \Delta} \int N_0 g_0 h da\tag{1.6}$$

$$e_1 = \frac{c_2}{rc_{p1}} \frac{1}{1 - i\omega\tau_{T2}^*}, \quad e_2 = \frac{1}{i\omega(\tau_{k1}^* + \tau_{\beta})}, \quad \tau_{\Sigma 1}^* = \frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}} \tau_{T1}^*$$

$$B = (1 - R'_V k_V) R'_V, \quad L = \gamma_1 (\gamma_1 - 1) k_V l_0^2$$

$$M_1 = mr R'_V c'_1 (\gamma_1 - 1 + R'_V k_V), \quad M_2 = mr B$$

$$R'_V = \frac{R_V}{R_{10}}, \quad l'_0 = \frac{l_0}{C_1^2}, \quad c'_1 = \frac{c_{p1}}{\gamma_1 R_1} = \frac{1}{\gamma_1 - 1}, \quad c'_2 = \frac{c_2}{\gamma_1 R_1}$$

Таким образом, показано, что у системы (1.1) существуют решения вида (1.4) в плоском, сферическом и цилиндрическом случаях.

**2. Результаты.** Далее исследуются особенности распространения импульсных возмущений малой амплитуды в полидисперсных туманах в сферическом и цилиндрическом случаях. Рассматривается полидисперсная смесь воздуха с паром и каплями воды при давлении  $p_{10} = 0.1$  МПа и температуре  $T_{10} = 327$  К. Принимается равномерное распределение масс фракций по размерам капель ( $N(a) = \text{const} \cdot a^{-3}$ ) при следующих значениях минимального и максимального радиусов капель:  $a_{\min} = 10^{-6}$  м,  $a_{\max} = 10^{-5}$  м. Значение коэффициента аккомодации  $\beta = 0.04$ . Для проведения расчетов используется методика, изложенная в [18, 20].

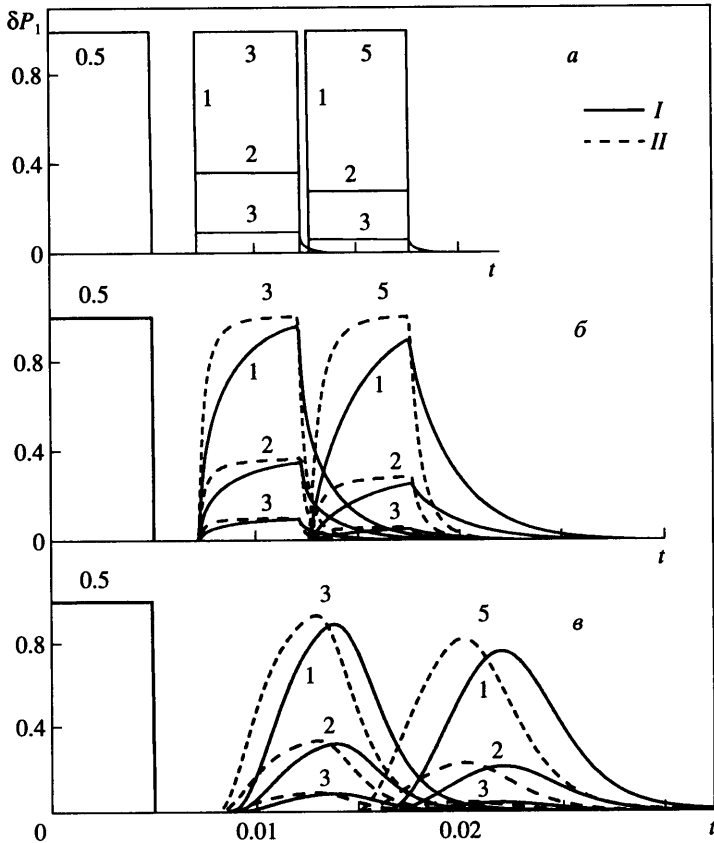
В соответствии с низкочастотной асимптотикой для плоских гармонических волн [15] учет влияния полидисперсности в аэрозолях с малым массовым содержанием капель  $m \ll 1$  для любой функции  $N_0$  при длинноволновых возмущениях сводится только к учету двух интегральных характеристик спектрального состава взвеси  $a_{3,1}$  и  $a_{5,3}$

$$a_{i,j} = \left[ \frac{\langle a^i \rangle}{\langle a^j \rangle} \right]^{1/(i-j)}, \quad \langle a^i \rangle = \int_{\Delta} N_0(a) a^i da, \quad i \neq j$$

$$a_{\min} < a_{i,j} < a_{\max}$$

Этот анализ справедлив и для сферических, и для цилиндрических волн, поскольку дисперсионное соотношение имеет единый вид. При этом средний радиус  $a_{5,3}$  связан с эффектами межфазного трения и при  $k_V \neq 1$  с эффектами межфазного теплообмена, а радиус  $a_{3,1}$  – в основном с влиянием фазовых превращений. Таким образом затухание низкочастотных возмущений разной геометрии в полидисперсных парогасокапельных смесях может быть приближенно описано в рамках модели с двумя эффективными радиусами капель. С увеличением массового содержания взвешенной фазы влияние полидисперсности на распространение импульсных волн возрастает. При высоких массовых содержаниях капель ( $m \sim 1-10$ ) наблюдается значительно более сильное затухание импульса давления и изменение его формы в полидисперсной взвеси по сравнению с монодисперсным случаем [20]. При этом, в силу быстрого затухания высокочастотных гармоник, импульсные возмущения распространяются со скоростью, близкой к равновесной скорости звука [7] в двухфазной смеси газа с частицами.

На фиг. 1 проиллюстрировано влияние геометрии процесса на распространение прямоугольного импульса давления в полидисперсной смеси воздуха с паром и каплями воды. Показаны плоский (кривая 1), цилиндрический (2) и сферический (3) случаи. Кривые II соответствуют расчетам без учета теплообмена. Начальное возмущение инициировалось на границе взвеси при  $x^1 = 0.5$  м. Расчеты проводились с помощью полученного дисперсионного соотношения (1.5), (1.6) при использовании подпрограмм быстрого преобразования Фурье (БПФ) [26]. Число гармоник в программе БПФ, под-

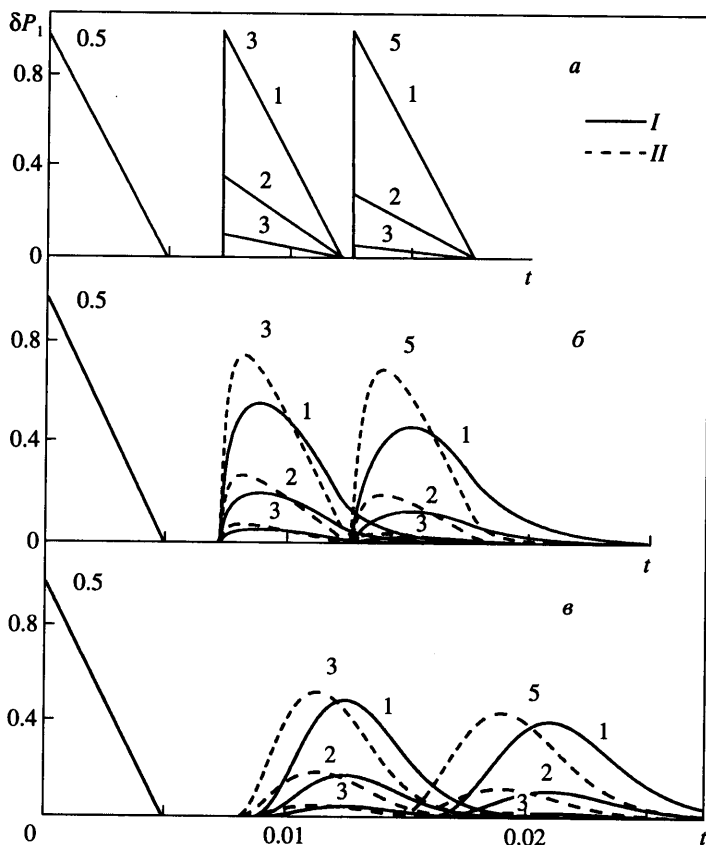


Фиг. 1. Эволюция импульсного возмущения прямоугольной формы в полидисперсном воздушном тумане (а–в), при  $m = 0, 0.1, 1$  в плоском (1), цилиндрическом (2) и сферическом (3) случаях: у кривых указано расстояние в метрах от начала координат; кривые I, II – случаи с и без межфазным теплообменом

бираемое из условия движения импульса без изменения первоначальной формы при отсутствии дисперсии и диссипации волн, в этом случае значительно.

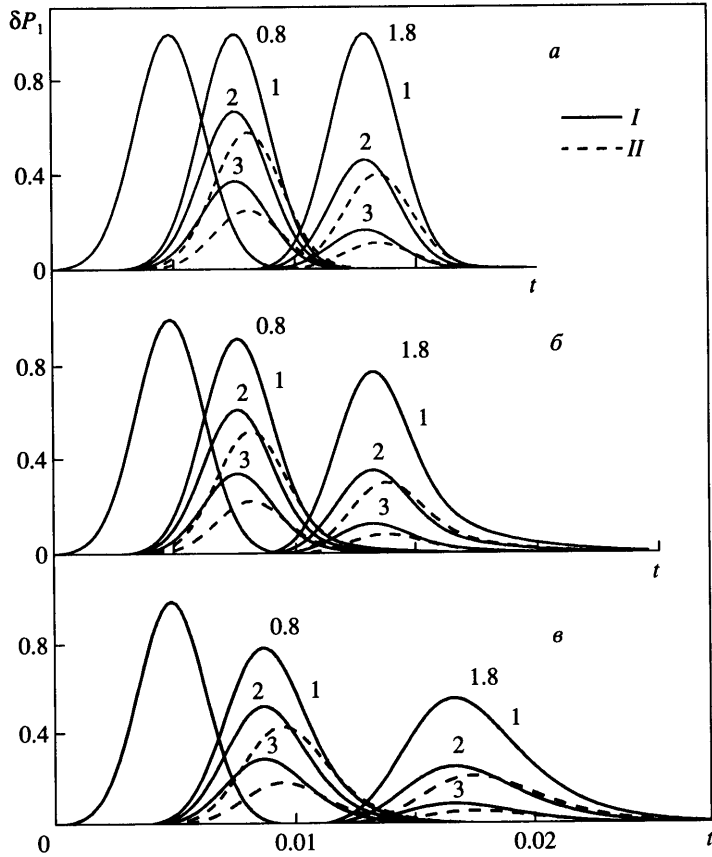
Затухание сферических и цилиндрических возмущений в чистом газе без частиц ( $m = 0$ ) происходит в силу геометрии задачи. Оценку изменения величины амплитуды цилиндрического импульса на больших расстояниях можно получить, используя соответствующую асимптотику [23]: амплитуда на больших расстояниях обратно пропорциональна  $r^{1/2}$ . При этом особенностью распространения цилиндрических волн является наличие "хвоста", замеченного Адамаром для случая чистого газа [24] (фиг. 1). Двухфазность среды приводит не только к более сильному затуханию импульса из-за процессов межфазного взаимодействия, но и к значительному изменению формы из-за дисперсии скорости звука.

При учете межфазного теплообмена имеют место как более сильное затухание, так и более значительное изменение формы прямоугольных импульсов давления как в плоском, так и в сферическом и цилиндрическом случаях (кривые I) в силу большей дисперсии скорости распространения гармоник и зависимости их затухания от частоты.



Фиг. 2. Эволюция импульсного возмущения треугольной формы в полидисперсном воздушном тумане (а-в), при  $m = 0, 0.1, 1$  в плоском (1), цилиндрическом (2) и сферическом (3) случаях: у кривых указано расстояние в метрах от начала координат; кривые I, II – случаи с и без межфазным теплообменом

Распространение и затухание переднего фронта импульсного возмущения определяются закономерностями распространения высокочастотных гармоник, составляющих импульс, поэтому передний фронт волны распространяется с замороженной скоростью звука  $C_f$ , близкой к скорости звука в воздухе при отсутствии капель. Однако при высоких значениях  $m$ , в силу быстрого затухания высокочастотных гармоник, импульсные возмущения распространяются со скоростью, близкой к равновесной скорости звука в двухфазной смеси [7]. Диссипация высокочастотных гармоник с увеличением массового содержания капель возрастает, что приводит к более значительному затуханию переднего фронта возмущения при  $m = 1$ , чем при  $m = 0.1$ . Сильное искажение формы волны при  $m = 0.1$  связано также со значительным затуханием основных низкочастотных гармоник, составляющих длинноволновой импульс. Эволюция импульса треугольной формы в полидисперсной смеси воздуха с паром и каплями воды с параметрами, указанными выше, проиллюстрирована на фиг. 2. Видно, что наличие капель в газе так же, как и для прямоугольного импульса, приводит к изменению формы импульса и более сильному его затуханию по сравнению с распространением импульса в чистом газе ( $m = 0$ ). При этом влияние дисперсной фазы возрастает с увеличением  $m$ .



Фиг. 3. Эволюция импульсного возмущения в полидисперсном воздушном тумане (а-в), при  $m = 0, 0.1, 1$  в плоском (1), цилиндрическом (2) и сферическом (3) случаях: у кривых указано расстояние в метрах от места инициирования импульса; кривые I, II – случаи с начальным радиусом 0.3 и 0.2 м

Таким образом, процесс трансформации импульсных возмущений при эволюции в полидисперсных туманах определяется различным характером зависимости диссипации гармонических составляющих разных частот от массового содержания капель  $m$  (немонотонным характером затухания для низкочастотных возмущений и монотонным – для высокочастотных составляющих). При этом распространение импульсных возмущений зависит от расстояния до оси или центра симметрии, что определяет значительно более сильное затухание сферических и цилиндрических импульсных возмущений по сравнению с плоским случаем.

Далее рассматривается эволюция импульса давления типа гауссовой кривой в воздушном тумане. Анализ показывает, что при распространении сферических и цилиндрических волн в отличие от плоского случая существенное значение имеет начальное расстояние  $x^1 = r_0$ . Влияние значения начального радиуса на распространение сферических и цилиндрических возмущений в полидисперсных туманах с фазовыми превращениями показано на фиг. 3. Кривые I соответствуют начальному значению  $x^1 = 0.3$  м, II – 0.2 м. Видно, что небольшое изменение начального расстояния на 0.1 м достаточно сильно влияет на затухание сферических и цилиндрических волн в полидисперсных



взвесах. Уменьшение начального расстояния  $r_0$  приводит к увеличению затухания импульсного возмущения в указанных случаях, что связано с изменением площади поверхности начальной волны.

**Заключение.** Представлена система линейных интегродифференциальных уравнений движения полидисперсной парогазокапельной смеси с учетом неравновесного диффузионного массообмена между фазами. Установлено существование решений у полученной системы в виде возмущений для потенциалов скоростей фаз для плоского, сферического и цилиндрического случаев. Показано существенное влияние геометрии процесса, межфазного теплообмена и значения начального радиуса на эволюцию слабых импульсов в полидисперсных туманах.

Автор выражает благодарность С.А. Лаптеву и А.А. Никифорову за помощь при проведении расчетов и в оформлении рукописи.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№ 01-01-00372), фонда НИОКР республики Татарстан и в рамках ФЦП "Интеграция".

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Cole J.E., Dobbins R.A. Measurements of attenuation of sound by a warm air fog // J. Atmosph. Sci. 1971. V. 28. № 2. P. 202–209.
2. Davidson G.A. Sound-propagation in fogs // J. Atmosph. Sci. 1975. V. 32. № 11. P. 2201–2205.
3. Marble F.E. Dynamics of dusty gases // Annual Rev. of Fluid Mech., Palo Alto, Calif. 1970. V. 2. P. 337–346. = Марбл Ф. Динамика запыленных газов // Механика. Период. сб. перев. иностр. статей. 1971. № 6. С. 48–89.
4. Гумеров Н.А., Ивандаев А.И., Нигматулин Р.И. Дисперсия и диссипация акустических волн в газовзвесах // Докл. АН СССР. 1983. Т. 272. № 3. С. 560–563.
5. Gumerov N.A., Ivandaev A.I., Nigmatulin R.I. Sound waves in monodisperse gas-particle or vapour-droplet mixtures // J. Fluid Mech. 1988. V. 193. P. 53–74.
6. Губайдуллин Д.А. О влиянии теплообмена на распространение звуковых волн в парогазокапельных системах // Вестн. МГУ. Сер. Математика, механика. 1987. № 3. С. 95–98.
7. Губайдуллин Д.А., Ивандаев А.И. Скорость и затухание звука в парогазокапельных системах. Роль теплообменных процессов // ПМТФ. 1987. № 3. С. 115–123.
8. Губайдуллин Д.А., Ивандаев А.И. Влияние фазовых превращений на распространение звука в туманах. Сопоставление теории с экспериментом // ПМТФ. 1990. № 6. С. 27–34.
9. Губайдуллин Д.А., Ивандаев А.И. Характерные времена процессов взаимодействия фаз и их влияние на дисперсию и абсорбцию акустических волн в парогазокапельных системах // Теплофизика высоких температур. 1991. Т. 29. № 1. С. 121–127.
10. Шазапов В. Ш. О распространении малых возмущений в парогазокапельной среде // Теплофизика высоких температур. 1987. Т. 25. № 6. С. 1148–1154.
11. Temkin S., Dobbins R.A. Measurements of attenuation and dispersion of sound by an aerosol // J. Acoust. Soc. America. 1966. V. 40. № 5. P. 1016–1024.
12. Ishii R., Matsuhisa H. Steady reflection, absorption and transmission of small disturbances by a screen of dusty gas // J. Fluid Mech. 1983. V. 130. P. 259–277.
13. Гумеров Н.А., Ивандаев А.И. Распространение звука в полидисперсных газовзвесах // ПМТФ. 1988. № 5. С. 115–124.
14. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч. 1: М.: Наука, 1987. 464 с.
15. Губайдуллин Д.А., Ивандаев А.И. Распространение акустических возмущений в полидисперсных туманах // Теплофизика высоких температур. 1992. Т. 30. № 6. С. 1162–1168.
16. Губайдуллин Д.А., Ивандаев А.И. Влияние полидисперсности на распространение звука в смесях газа с паром и каплями жидкости // ПМТФ. 1993. № 4. С. 75–83.
17. Нигматулин Р.И., Губайдуллин Д.А. Влияние фазовых превращений в акустике полидисперсных туманов // Докл. РАН. 1996. Т. 347. № 3. С. 330–333.
18. Губайдуллин Д.А., Ивандаев А.И. Динамика импульсных волн малой амплитуды в парогазокапельных системах // ПМТФ. 1991. № 2. С. 106–113.
19. Нигматулин Р.И., Ивандаев А.И., Губайдуллин Д.А. Эффект немонотонной зависимости диссипации звука от концентрации капель в акустике газовзвесей // Докл. АН СССР. 1991. Т. 316. № 3. С. 601–605.

20. Губайдуллин Д.А. Динамика слабых импульсных возмущений в полидисперсных смесях газа с паром и каплями жидкости. // Теплофизика высоких температур. 1998. Т. 36. № 6. С. 944–949.
21. Губайдуллин Д.А. Динамика двухфазных парогазокапельных сред: Казань: Изд-во Казан. мат. о-ва, 1998. 153 с.
22. Gubaidullin D.A., Nigmatulin R. I. On theory of acoustic waves in polydispersed gas-vapor-droplet suspension // Intern. J. Multiphase Flow. 2000. V. 26. № 2. P. 207–228.
23. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика: М.: Наука, 1986. 736 с.
24. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны: М.: Мир, 1977. 622 с.
25. Губайдуллин Д.А., Лаптев С.А., Никифоров А.А. Распространение сферических и цилиндрических возмущений малой амплитуды в газозвесах // Изв. вузов. Проблемы энергетики. 2000. Т. 5–6. С. 17–24.
26. Гапонов В.А. Пакет программ быстрого преобразования Фурье с приложениями к моделированию случайных процессов // Препринт № 14-76. Новосибирск: Изд-во ИТФ СО АН СССР, 1976. 19 с.

Казань

Поступила в редакцию  
1.VIII.2002