

УДК 532.529:532.591

© 2003 г. Г. Г. ОГАНЯН

ВЛИЯНИЕ МЕЖФАЗНОГО ТЕПЛООБМЕНА И ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ В ГАЗОЖИДКОСТНОЙ СМЕСИ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН

Получено эволюционное уравнение с двумя нелинейностями (основной гидродинамической и дополнительной, обусловленной межфазным теплообменом), описывающее волновую динамику смеси при наличии вязкости. Для квазиadiaбатического режима в зависимости от реализации законов теплообмена, определяемых связями теплофизических параметров смеси, приведены два точных частных решения, выявляющие различный характер изменения давления в волне. Немонотонное поведение давления, связанное с увеличением амплитуды, интерпретировано как усиление волны в сравнении с монотонным. В зависимости от теплофизических параметров получен интервал изменения допустимых значений чисел Вебера, при которых проявляется эффект усиления. Поверхностное натяжение уменьшает амплитуду, ширину волны, приводит к немонотонной зависимости скорости распространения от числа Вебера.

Ключевые слова: газ, жидкость, межфазный теплообмен, нелинейность, волна, поверхностное натяжение.

Экспериментальные исследования [1, 2] показали, что в смеси вода–пузырьки растворенного углекислого газа CO_2 может произойти существенное усиление интенсивности ударной волны. Классическая волновая динамика не дает приемлемого, теоретически обоснованного разъяснения по выявленному эффекту, поскольку не учитывает межфазный теплообмен, протекающий в смеси. Необходимость и важность учета такого теплообмена для адекватного описания волновых процессов в газо- и парожидкостных смесях показана в [3, 4]. Численный расчет пузырьковых экранов для демпфирования и, наоборот, усиления ударных импульсов приведен в [4]. Без учета теплообмена механизм усиления на основе предположения о доминирующей роли нелинейного слагаемого в уравнении Рэлея–Лэмба предложен в [5]. В смесях с растворенным газом, несмотря на малость размеров пузырьков, тем не менее имеет место необратимый межфазный теплообмен, пусть малой интенсивности, который в совокупности с радиальной инерцией несущей жидкости может привести к реализации эффекта усиления волны, наблюдаемого в [1, 2].

1. Исходные уравнения. Приближение Буссинеска. Рассматривается монодисперсная бесстолкновительная смесь несжимаемой жидкости с малым объемным содержанием пузырьков калорически совершенного газа. Принимается постоянство температуры несущей фазы – жидкости, а также отсутствие внешнего источника тепла, процессов дробления, слипания и образования новых пузырьков. Систему уравнений, описывающую одномерное односкоростное течение смеси и учитывающую эффекты поверхностного натяжения, вязкости и межфазного теплообмена, возьмем в виде [3, 4]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\rho \frac{du}{dt} = - \frac{\partial}{\partial x} \left(p - \beta \frac{2\sigma}{R} \right) + \frac{4}{3} \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho_1 \beta \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 \right]$$

$$p_2 - p = \rho_1 R \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{4\mu dR}{R dt} + \frac{2\sigma}{R} + \frac{3}{2} \rho_1 \left(\frac{dR}{dt} \right)^2, \quad p_{20} = p_0 + \frac{2\sigma}{R_0} \tag{1.1}$$

$$\frac{\rho_2 \beta}{\rho_1 (1 - \beta)} = \text{const}, \quad \rho_2 R^3 = \text{const}, \quad p_2 = c_{v2} (\gamma - 1) \rho_2 T_2$$

$$\rho = \rho_1 (1 - \beta) + \rho_2 \beta, \quad \rho_1 = \rho_{10} = \text{const}, \quad T_1 = T_0 = \text{const}, \quad \mu = \mu_1$$

$$\frac{dp_2}{dt} + 3\gamma \frac{p_2 dR}{R dt} + \frac{3(\gamma - 1) k_2 \text{Nu}}{2 R^2} (T_2 - T_0) = 0$$

Здесь t – время, x – пространственная координата, u – скорость частиц смеси, ρ – плотность, p – давление, β – объемное газосодержание, в силу малости которого $\rho_{10} \approx \rho_0$, R – радиус пузырька, T – температура, γ – показатель адиабаты газа, c_{v2} – удельная теплоемкость при постоянном объеме, μ и σ – динамическая вязкость и поверхностное натяжение жидкости, k_2 – теплопроводность газа, Nu – безразмерное число Нуссельта, ответственное за величину интенсивности межфазного теплообмена. Индексы "1" и "2" отнесены соответственно к параметрам жидкой и газовой фаз, а "0" – к исходному состоянию термодинамического равновесия смеси, при этом соотношении Лапласа из (1.1) является одним из его условий. Параметры, отнесенные ко всей смеси, индексов не имеют.

Предполагается, что в любой момент времени и в каждой точке пространства величины всех параметров смеси мало отклоняются от соответствующих значений в состоянии покоя (полного термодинамического равновесия), при этом их избыточные значения имеют одинаковый с массовой скоростью частиц порядок малости ϵ . В рамках приближения Буссинеска принимается [3, 4], что величины эффектов нелинейности, вязкости, дисперсии, являющиеся малыми порядка ϵ^2 , слабо влияют на процесс распространения волны малой, но конечной амплитуды. Поэтому при упрощении системы (1.1) их взаимодействия пренебрегается, и в уравнениях в рассмотрении оставляются слагаемые порядка ϵ и ϵ^2 . Без эффекта поверхностного натяжения, но с учетом сжимаемости жидкости подобное упрощение проведено в [6], где получено многоволновое уравнение, описывающее также распространение быстрой волны – предвестника. Аналогичный подход по упрощению системы (1.1) позволяет получить совмещенные уравнения относительно безразмерного избыточного давления p' и безразмерно го возмущения R' радиуса пузырька

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[p + 3\gamma \left(1 + \frac{43 - \gamma}{3} \frac{1}{\text{We}} \right) R + \frac{3\gamma}{\omega_{ar}^2} \frac{\partial^2 R}{\partial t^2} + \frac{4\mu \partial R}{\rho_0 \partial t} - \frac{\gamma b_0^2}{6 \beta_0^2} \left(1 + 3 \frac{\beta_0}{b_0} + \frac{163\gamma - 2}{3} \frac{1}{\gamma \text{We}} \right) p^2 \right] +$$

$$+ \frac{1}{t_T} \left[p + 3 \left(1 + \frac{8}{3} \frac{1}{\text{We}} \right) R + \frac{3}{\omega_{ir}^2} \frac{\partial^2 R}{\partial t^2} + \frac{4\mu \partial R}{\rho_0 \partial t} - \frac{1 b_0^2}{3 \beta_0^2} \left(1 + \frac{\beta_0}{b_0} + \frac{8}{3} \frac{1}{\text{We}} \right) p^2 \right] = 0 \tag{1.2}$$

$$t_T = \frac{2}{3\gamma} \frac{R_0^2}{\lambda_2 \text{Nu} \beta_0 \rho_0} \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + 3 \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{8 p_0}{3 \rho_0 \text{We}} \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) R - \frac{4}{3} \frac{\mu}{\rho_0} b_0 \frac{\partial^3 p}{\partial t \partial x^2} +$$

$$+ \frac{1}{3} \frac{b_0^2}{\beta_0^2} \frac{\partial^2 p^2}{\partial t^2} - \frac{4(1 - 9\beta_0)}{9} \frac{p_0}{\rho_0 \text{We}} \frac{1}{\beta_0^2} \frac{\partial^2 p^2}{\partial x^2} = 0$$

Здесь штрихи над избыточными параметрами смеси опущены, We – безразмерное акустическое число Вебера, λ_2 – температуропроводность газа, ω_{ir} и ω_{ar} – изотермическая и адиабатическая резонансные частоты Миннаерта, t_T – время термической релаксации

$$We = 2 \frac{p_0 R_0}{\sigma}, \quad \lambda_2 = \frac{k_2}{c_{p2} \rho_{20}}, \quad \omega_{ar}^2 = \gamma \omega_{ir}^2 = \frac{3\gamma p_0}{\rho_0 R_0^2}, \quad b_0 = \frac{p_0}{\rho_0 a_0^2}$$

При выводе системы (1.2) использованы соотношения линейного приближения

$$\frac{\partial}{\partial t} = \pm a_0 \frac{\partial}{\partial x}, \quad u' = \mp b_0 p', \quad R' = -\frac{1}{3} \frac{b_0}{\beta_0} p'$$

где a_0 – невозмущенная скорость звука в смеси, определение которой будет дано ниже. Применяв оператор

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{8p_0}{3\rho_0} \frac{1}{We} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

к первому уравнению системы (1.2), скомбинируем его со вторым и, в соответствии с приближением Буссинеска, оставим в рассмотрении главные ($\sim \epsilon$) и основные ($\sim \epsilon^2$) слагаемые. При наличии не слишком мелких ($R_0 \gg 0.75\beta_0\sigma/(\gamma p_0)$, $We \gg 1.5\beta_0/\gamma$) пузырьков получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - a_{e0}^2 \Sigma_e \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{4\mu}{3\rho_0 \beta_0} \frac{1}{\partial t} \frac{\partial^3 p}{\partial t \partial x^2} - \frac{a_{e0}^2}{\omega_{ir}^2} \frac{\partial^4 p}{\partial t^2 \partial x^2} - \frac{1}{3} \frac{b_0^2}{\beta_0^2} \left(2 + \frac{\beta_0}{b_0} + \frac{16}{3} \frac{1}{We} \right) \frac{\partial^2 p^2}{\partial t^2} = \\ & = -t_T \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - a_{f0}^2 \Sigma_1 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{4\mu}{3\rho_0 \beta_0} \frac{1}{\partial t} \frac{\partial^3 p}{\partial t \partial x^2} - \frac{a_{f0}^2}{\omega_{ar}^2} \frac{\partial^4 p}{\partial t^2 \partial x^2} - \frac{\gamma b_0^2}{2\beta_0^2} \left(1 + \frac{\beta_0}{b_0} + \frac{89\gamma - 5}{9} \frac{1}{\gamma We} \right) \frac{\partial^2 p^2}{\partial t^2} \right] \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\Sigma_1 = 1 + \frac{43\gamma - 1}{3} \frac{1}{\gamma} \frac{1}{We}, \quad \Sigma_e = 1 + \frac{8}{3} \frac{1}{We}, \quad a_{f0}^2 = \gamma a_{e0}^2 = \frac{\gamma p_0}{\beta_0 \rho_0}$$

Здесь a_{f0} и a_{e0} – невозмущенные адиабатическая и изотермическая скорости звука в смеси. Полученное уравнение без учета межфазного теплообмена и натяжения распадается на два классических уравнения Буссинеска, описывающих нелинейную волновую динамику при чисто адиабатическом ($t_T \rightarrow 0$) и изотермическом ($t_T \rightarrow \infty$) режимах поведения газа в пузырьках.

2. Квазиадиабатический режим. Исследуемый режим распространения волны реализуется в случае, когда в смеси происходит необратимый межфазный теплообмен, пусть даже небольшой интенсивности. При этом термодинамическое поведение газа отличается, пусть и незначительно, от адиабатического. Полагая $a_0 \equiv a_{f0}$, будем иметь $b_0/\beta_0 = 1/\gamma$. Рассматривается волна, бегущая вдоль положительного направления оси x . Поскольку для исследуемого режима главным является волновой оператор из правой части уравнения (1.3), постольку можно полагать $\partial/\partial t \approx -a_{f0} \Sigma_1^{1/2} \partial/\partial x$. Тогда факторизация уравнения (1.3) и последующее интегрирование по t позволяют получить эволюционное уравнение, которое в сопутствующей системе координат $x' = x - c_{f0}t$, $t' = t$ запишется в виде

$$\frac{\partial p}{\partial t'} - \delta \frac{\partial^2 p}{\partial x'^2} + \beta \frac{\partial^3 p}{\partial x'^3} + \alpha_f a_{f0} p \frac{\partial p}{\partial x'} - \frac{\gamma + 2}{4\gamma} \Sigma_3 \frac{\lambda_2}{R_0^2} Nu p^2 + \chi p = 0$$

$$\alpha_f = \frac{\gamma+1}{2\gamma} \Sigma_1^{1/2} \Sigma_2, \quad \delta = \frac{2\mu}{3\rho_0\beta_0} + \frac{\gamma}{4\beta_0} \lambda_2 \text{Nu}, \quad \beta = \frac{a_{f0} R_0^2}{6\beta_0} \Sigma_1^{1/2} \quad (2.1)$$

$$\chi = \frac{3(\gamma-1)\Sigma_4\lambda_2}{4\Sigma_1 R_0^2} \text{Nu}, \quad \Sigma_2 = 1 + \frac{8}{9\gamma} \frac{\gamma-5}{\gamma+1} \frac{1}{\text{We}}$$

$$\Sigma_3 = 1 + \frac{16}{3} \frac{1}{\gamma+2} \frac{1}{\text{We}}, \quad \Sigma_4 = 1 + \frac{4}{\text{We}}, \quad c_{f0}^2 = a_{f0}^2 \Sigma_1 \left(1 + \frac{\mu}{\rho_0 R_0^2} \frac{\lambda_2 \text{Nu}}{\Sigma_1} \right)$$

где постоянные интегрирования взяты равными нулю и штрихи над координатами опущены. Пусть начальное избыточное давление имеет вид: $t = 0, p = \Delta p_0 \cdot \varphi(x)$, где Δp_0 – амплитуда, $\varphi(x)$ – функция, характеризующая форму исходного возмущения. Тогда помимо числа Вебера можно, аналогично [3, 4], ввести в рассмотрение безразмерные параметры подобия

$$\frac{1}{\text{Re}} = \frac{2\mu}{3\rho_0 R_0} \frac{1}{\sqrt{p_0}}, \quad \frac{1}{N^2} = \frac{\sqrt{\gamma \Delta p_0}}{6}, \quad \frac{\text{Nu}}{\text{Pe}}, \quad \text{Pe} = \frac{R_0}{\lambda_2} \sqrt{\frac{p_0}{\rho_0}} \quad (2.2)$$

определяющие все многообразие волнового процесса, где Re и Pe – акустические числа Рейнольдса и Пекле. В отсутствие поверхностного натяжения ($\sigma = 0$) и межфазного теплообмена ($\text{Nu} = 0$) эволюция формы исходного импульса определяется двумя независимыми параметрами Re и N [3–5]. Учет вышеназванных эффектов доводит число параметров до четырех: Re , N , We и Nu/Pe , из коих, как будет показано ниже, в случае интегрируемости уравнения (2.1) независимыми являются лишь первые три.

Вводя функцию $v = \alpha_f a_{f0} p$, перепишем уравнение (2.1) в виде

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \delta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + v \frac{\partial v}{\partial x} - \alpha v^2 + \chi v = 0 \quad (2.3)$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{\gamma+2}{\gamma+1} \frac{\Sigma_3}{\Sigma_2 \Sigma_1^{1/2}} \frac{1}{a_{f0} R_0^2} \lambda_2 \text{Nu}, \quad \chi = \frac{3\gamma^2-1}{2} \frac{\Sigma_2 \Sigma_4}{\gamma+2} \frac{\Sigma_4}{\Sigma_3 \Sigma_1^{1/2}} a_{f0} \alpha$$

Учет поверхностного натяжения может увеличить значение диссипативного коэффициента χ и уменьшить величину α , характеризующую влияние дополнительной (второй) нелинейности. Уравнение (2.3) обладает точными частными аналитическими решениями при определенных связях между коэффициентами. Для их нахождения используется метод, предложенный в [7] и примененный в [8–10] для уравнений, неинтегрируемых методом обратной задачи теории рассеяния.

3. Затухание ударной волны. Пусть в смеси межфазный теплообмен происходит по закону

$$\text{Nu} = \frac{8(\gamma+1)}{3\gamma^2 + \gamma - 4} \frac{\Sigma_2}{\Sigma_6} \left[\frac{15(\gamma\gamma^2 - 1) \Sigma_2 \Sigma_4 p_0}{8(3\gamma + 2) \Sigma_3 \rho_0} \right]^{1/2} R_0 - \frac{\mu}{\rho_0} \frac{1}{\lambda_2} \quad (3.1)$$

реализуемому при наличии связи

$$\chi = 12\alpha\beta a^2, \quad a = \frac{2}{5}\alpha - \frac{1}{5}\frac{\delta}{\beta} < 0, \quad \Sigma_6 = 1 + \frac{24}{3\gamma + 4} \frac{1}{\text{We}}$$

Тогда точным частным решением уравнения (2.3) является функция

$$v = 12\beta k^2 \left[1 - \frac{1}{(1 - e^{\theta})^2} \right], \quad \theta = kx' - \omega t' \quad (3.2)$$

$$k = a < 0, \omega = 6\beta k^3 + 10\alpha\beta k^2$$

Пренебрежение теплообмена переводит (2.3) в уравнение Бюргерса–Кортевега-де Вриза, точное частное решение которого предельным переходом $\alpha \rightarrow 0, \chi \rightarrow 0, \delta_T \rightarrow 0$ следует из (3.2), где δ_T – тепловая составляющая диссипации уравнения (2.1). Переход в (3.2) к размерному давлению $p = p_0(1 + p')$ позволяет записать решение в виде

$$\frac{p}{p_0} = 1 + \frac{3\gamma(\gamma - 1)}{\gamma + 2} \frac{\Sigma_4}{\Sigma_1 \Sigma_3} \left[1 - \frac{1}{(1 + e^{k\xi})^2} \right], \quad \xi = kx - Dt \quad (3.3)$$

Здесь ξ – координата, связанная с фронтом волны, $D = c_{f_0} + \omega/k$ – скорость распространения волны в исходной системе координат.

Решение (3.3) является монотонно убывающей функцией, связывающей асимптотические значения давления позади и впереди фронта

$$\frac{p(-\infty)}{p_0} = 1 + \frac{3\gamma(\gamma - 1)}{\gamma + 2} \frac{\Sigma_4}{\Sigma_1 \Sigma_3}, \quad \frac{p(\infty)}{p_0} = 1 \quad (3.4)$$

Поскольку $\Sigma_4 < \Sigma_1 \Sigma_3$, то учет поверхностного натяжения приводит к уменьшению амплитуды волны давления.

4. Увеличение амплитуды волны. Пусть в смеси реализуются связь $\delta = 12\alpha\beta$ между теплофизическими параметрами, имеющая место при законе межфазного теплообмена

$$Nu = \frac{8}{3} \frac{\gamma + 1}{8 + 3\gamma - \gamma^2} \frac{\Sigma_2}{\Sigma_5} \frac{1}{\lambda_2 \rho_0} \mu, \quad \Sigma_5 = 1 + \frac{8}{9} \frac{29 - 9\gamma}{8 + 3\gamma - \gamma^2} \frac{1}{We} \quad (4.1)$$

который можно записать через параметры подобия (2.2)

$$\frac{Nu}{Pe} = \frac{4(\gamma + 1)}{8 + 3\gamma - \gamma^2} \frac{\Sigma_2}{\Sigma_5} \frac{1}{Re}$$

Последний вид записи закона указывает, что, действительно, параметр Nu/Pe не является независимым. Поскольку $\Sigma_2 > \Sigma_5$, постольку поверхностное натяжение увеличивает величину интенсивности теплообмена Nu . В предельных случаях крупных и достаточно мелких пузырьков соответственно будем иметь

$$We \gg 4 \gg \frac{3\beta_0}{2\gamma}, \quad Nu = \frac{8}{3} \frac{\gamma + 1}{8 + 3\gamma - \gamma^2} \frac{1}{\lambda_2 \rho_0} \mu \quad (4.2)$$

$$\frac{3\beta_0}{2\gamma} \ll We \ll \frac{8}{9} \frac{29 - 9\gamma}{8 + 3\gamma - \gamma^2}, \quad Nu = \frac{8}{9\gamma} \frac{9\gamma - 5}{29 - 9\gamma} \frac{1}{\lambda_2 \rho_0} \mu$$

т.е. межфазный теплообмен в смеси с крупными пузырьками менее интенсивен, чем с мелкими, причем в обоих случаях $Nu \ll 1$.

Простой подстановкой можно убедиться, что точным частным решением уравнения (2.3) является функция

$$v = \frac{\chi}{\alpha} \frac{1 + (1 + k/(2\alpha))e^\theta}{(1 + e^\theta)^2}, \quad \theta = kx' - \omega t'$$

$$k = \frac{1}{24} \frac{\chi}{\alpha^2 \beta}, \quad \omega = \beta k^3 + 12\alpha\beta k^2 - 24\alpha^2\beta k$$
(4.3)

где величины k , ω и θ играют роли волнового числа, частоты и фазы волны.

Переходя к размерному (истинному) давлению $p = p_0(1 + p')$, где p' – его избыточное значение, решение (4.3), в силу обозначений из (2.1) и (2.3), примет вид

$$\frac{p}{p_0} = 1 + \frac{3\gamma(\gamma - 1)}{\gamma + 2} \frac{\Sigma_4}{\Sigma_1 \Sigma_3} \frac{1 + (1 + k/(2\alpha))e^\theta}{(1 + e^\theta)^2}, \quad \theta = k(x - Dt)$$
(4.4)

где $D = c_{p0} + V$ – скорость ударной волны в исходной (x, t) системе координат. В квази-адиабатическом режиме волнового процесса в главном (линейном) приближении безразмерные избыточные величины давления и радиуса пузырька связаны соотношением $p' = -3\gamma R'$. Поэтому изменение размерного радиуса $R = R_0(1 + R')$ можно описать, согласно (4.4), формулой

$$\frac{R}{R_0} = 1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 2} \frac{\Sigma_4}{2\Sigma_1 \Sigma_3} \frac{1 + (1 + k/(2\alpha))e^\theta}{(1 + e^\theta)^2}$$
(4.5)

Учет поверхностного натяжения препятствует сжатию пузырька, поскольку $\Sigma_4/(\Sigma_1 \Sigma_3) < 1$. Решение (4.4), записанное в сопутствующей системе координат $\xi = x - Dt$, связанной с фронтом $\xi = 0$ волны, дает асимптотические ($\xi \rightarrow \pm\infty$) значения

$$\frac{p(-\infty)}{p_0} = 1 + \frac{3\gamma(\gamma - 1)}{\gamma + 2} \frac{\Sigma_4}{\Sigma_1 \Sigma_3}, \quad \frac{p(\infty)}{p_0} = 1$$

которыми характеризуются два однородных состояния смеси по обе стороны фронта. При наличии крупных ($We \gg 4$) пузырьков значение позади фронта зависит лишь от показателя адиабаты γ [10], а в общем случае, в силу учета поверхностного натяжения, оно определяется теплофизическими параметрами не только газа, но и жидкости. Поскольку решение связывает эти состояния непрерывным образом, следовательно, оно описывает структуру ударной волны давления. Выраженная через стационарную координату ξ функция (4.4) достигает единственного максимума при значении $\xi = \xi_*$

$$\xi_* = \frac{1}{k} \ln \frac{k - 2\alpha}{k + 2\alpha}, \quad \frac{p_{\max}}{p_0} = \frac{p(\xi_*)}{p_0} = 1 + \frac{3\gamma\gamma - 1}{4} \frac{\Sigma_4}{\gamma + 2\Sigma_1 \Sigma_3} \frac{(1 + k/(2\alpha))^2}{k/(2\alpha)}$$

При сжатии пузырька возмущение его поверхности полагается малым, пока его радиус уменьшается не более чем на порядок по отношению к исходному [4], т.е. $R/R_0 \geq 0.1$. Из (4.5), записанной через стационарную координату ξ , можно вычислить минимальное значение радиуса, до которого может сжаться пузырек

$$\frac{R_{\min}}{R_0} = \frac{R(\xi_*)}{R_0} = 1 - \frac{1}{4} \frac{\gamma - 1}{\gamma + 2} \frac{\Sigma_4}{\Sigma_1 \Sigma_3} \frac{(1 + k/(2\alpha))^2}{k/(2\alpha)}$$
(4.6)

При более сильных сокращениях амплитуда возмущений поверхности пузырька может стать сравнимой с радиусом, что может привести к его дроблению. Из (4.6), в

Таблица 1

	$We = 2p_0R_0/\sigma$	$k/(2\alpha)$
$H_2O + CO_2$	[0.0689; 2.4612]	(1; 54.8862)
$H_2O + \text{воздух}$	[0.0490; 1.6792]	(1; 47.2372)
$H_2O + He$	[0.0306; 0.9555]	(1; 39.6765)
$C_2H_5OH + CO_2$	[1.0354; 13.051]	(1; 41.1067)

силу вещественности экстремальной точки ξ_* и требования $R_{\min}/R_0 \geq 0.1$, определится интервал изменения допустимых значений параметра $k/(2\alpha)$, при которых имеет место усиление ударной волны

$$\frac{k}{2\alpha} > 1, \quad \left(\frac{k}{2\alpha}\right)^2 - \left(\frac{18\gamma + 2\Sigma_1\Sigma_3}{5\gamma - 1} - 2\right)\frac{k}{2\alpha} + 1 \leq 0 \quad (4.7)$$

$$\frac{k}{2\alpha} = g^2 \frac{\Sigma_2\Sigma_4\Sigma_5^2}{\Sigma_3^3} Re^2, \quad g^2 = \frac{3\gamma(\gamma^2 - 1)}{\gamma + 2} \left(\frac{18 + 3\gamma - \gamma^2}{8\gamma + 2}\right)^2$$

В табл. 1 при $p_0 = 0.1$ МПа, $T = 293$ К, $\beta_0 = 0.05$ для смесей воды и этанола (этилового спирта) C_2H_5OH с пузырьками углекислого газа CO_2 , гелия He и воздуха указаны области допустимых значений параметра $k/2\alpha$ и числа We , рассчитанные по формулам (4.7). С переходом от воды к этанолу, т.е. уменьшением поверхностного натяжения, область допустимых значений числа Вебера существенно расширяется. Выбор этанола обусловлен достаточной близостью его теплофизических свойств к воде, кроме сильно различающегося поверхностного натяжения.

При реализации закона (4.1) (фиг. 1, кривая 1) имеет место увеличение амплитуды в сравнении с законом (3.1) (кривая 2). В этом смысле можно утверждать, что происходит усиление волны, эффект которого проявится ярче, если полагать в решении (3.3) $\alpha = \chi = \delta_T = 0$, т.е. пренебречь теплообменом.

В случае крупных ($We \geq 4$) пузырьков из (4.7) получим

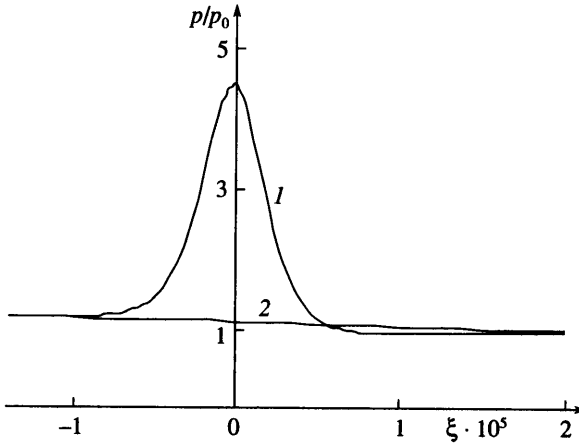
$$1 < \frac{k}{2\alpha} \leq \frac{4\gamma + 23 + 3\sqrt{(\gamma + 2)(28 - \gamma)}}{5(\gamma - 1)}, \quad \frac{k}{2\alpha} = g^2 Re^2 \quad (4.8)$$

Область значений $k/(2\alpha)$ определяется лишь сортом газа, поскольку зависит лишь от γ . В предельном случае мелких пузырьков, когда имеет место оценка (4.2), будем иметь

$$2 < \frac{k}{2\alpha} + 1 \leq \frac{29 - 9\gamma\sigma}{8\mu} \left[\frac{(3\gamma - 1)(9\gamma - 5)\rho_0}{5\gamma p_0} \right]^{1/2}, \quad \frac{k}{2\alpha} = qLp$$

$$q = \frac{(\gamma - 1)(9\gamma - 5)}{2} \left(\frac{29 - 9\gamma}{32} \right)^2, \quad Lp = \frac{2R_0\rho_0\sigma}{\mu^2} = \frac{16Re^2}{9We}$$

где Lp – число Лапласа. Здесь допустимые значения $k/(2\alpha)$ определяются параметрами как газа, так и жидкости. Из сравнения данных табл. 1 с расчетами по формулам предельных случаев, дающим заниженные значения, следует вывод, что полный учет коэффициентов Σ_i ($i = 1, \dots, 5$) значительно расширяет размеры областей.



Фиг. 1. Влияние законов теплообмена (4.1) (кривая 1) и (3.1) (кривая 2) на структуру волны в смеси воды с пузырьками CO₂ при We = 2.4612 и данных табл. 1

Аналогично [1, 2, 10] введем в рассмотрение коэффициенты усиления ударной волны и максимального сжатия в структуре

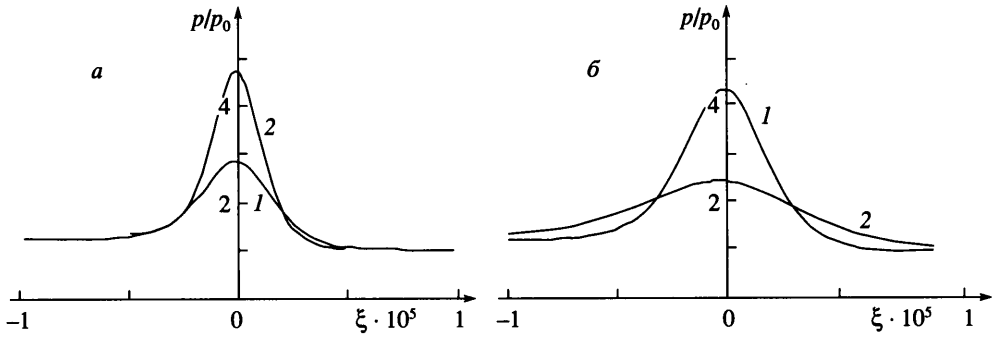
$$f_1 = \frac{P_{\max} - p_0}{p(-\infty) - p_0} = \frac{1(1 + kI(2\alpha))^2}{4 kI(2\alpha)}, \quad f_2 = \frac{P_{\max}}{p_0}$$

На фиг. 2 представлены профили волн, вычисленные по решению (4.4). Фигура 2,а иллюстрирует влияние показателя адиабаты γ на амплитуду волны в смесях, где несущие жидкости и размеры пузырьков одинаковые, но сорта газов различные (вода, $R_0 = 6.1 \cdot 10^{-7}$ м). С переходом от CO₂ (кривая 1) к воздуху (кривая 2) с увеличением γ амплитуда волны возрастает. При этом $f_1 = 8,79; f_2 = 2,86$ для кривой 1; $f_1 = 12,3; f_2 = 4,78$ для кривой 2, т.е. коэффициенты усиления и сжатия профиля волны увеличиваются. Фигура 2,б иллюстрирует влияние поверхностного натяжения σ на амплитуду в смесях с идентичными пузырьками (CO₂; $R_0 = 8.98 \cdot 10^{-7}$ м), но разными жидкостями. С переходом от этанола (кривая 2) к воде (кривая 1) с увеличением отношения σ/μ амплитуда возрастает. При этом $f_1 = 4.86; f_2 = 2.3$ для кривой 2, $f_1 = 14.2; f_2 = 4.48$ для кривой 1, т.е. имеет место большее усиление и сжатие профиля ударной волны. Значения f_1 и f_2 для воды + CO₂ (фиг. 2,б, кривая 1) достаточно удовлетворительно согласуются со значениями $f_1 = 12, f_2 = 5$ экспериментов [1, 2]. Из сопоставления кривых 1 фигур 2,а и 2,б следует, что с увеличением допустимого исходного размера R_0 амплитуда волны возрастает.

Нелинейный добавок $V = \omega/k$ к скорости волны вычисляется по соотношению (4.3), что позволяет определить $D = c_{f0} + V$

$$\begin{aligned} \frac{D}{a_{f0}} = & \Sigma_1^{1/2} \left[1 + \frac{32}{2} \frac{\gamma + 1}{8 + 3\gamma - \gamma^2} \frac{\Sigma_2}{\Sigma_1 \Sigma_5} \frac{1}{We^2} \frac{p(\mu)}{\rho_0(\sigma)} \right]^2 + \\ & + \frac{2}{3\gamma} \left(\frac{8}{3} \frac{\gamma + 2}{8 + 3\gamma - \gamma^2} \right)^2 \frac{\Sigma_3^2}{\Sigma_1 \Sigma_5^2} \frac{1}{We^2} \frac{p_0(\mu)}{\rho_0(\sigma)} \left[\left(\frac{k}{2\alpha} \right)^2 + 6 \frac{k}{2\alpha} - 6 \right] \end{aligned} \quad (4.9)$$

Структура формулы (4.9) указывает, что формирование значения скорости D обусловлено тремя составляющими, из коих первая ответственна за поверхностное натяжение, вторая – за диссипацию (вязкость и межфазный теплообмен) и третья – за не-



Фиг. 2. Структура ударных волн в смесях: *a* – воды с пузырьками CO_2 (кривая 1) и воздуха (кривая 2) при $We = 1.6792$; *б* – воды (кривая 1) и этанола (кривая 2) с идентичными ($R_0 = 8.98 \cdot 10^{-7}$ м) пузырьками CO_2

линейность, при этом число We и параметр $k/(2\alpha)$ обязательно должны принадлежать областям допустимых значений, что исключает рассмотрение сверхмелких и крупных пузырьков. Ширина волны, вычисляемая, в силу (2.1), (2.3) и (4.3), по формуле

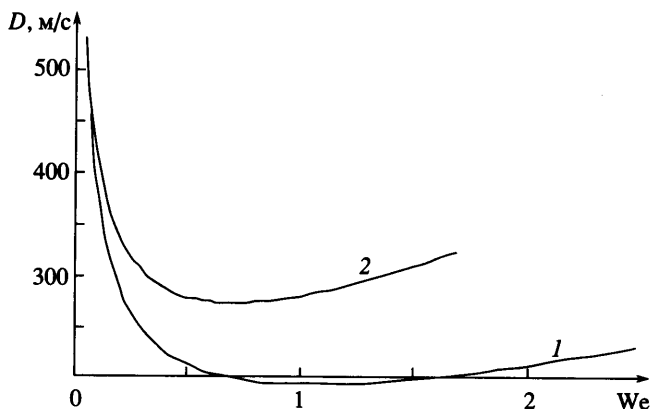
$$l = \frac{1}{k} = \frac{32}{9\gamma(\gamma^2 - 1)(8 + 3\gamma - \gamma^2)} \frac{\Sigma_3^2 \Sigma_1^{1/2}}{\Sigma_2 \Sigma_4 \Sigma_5} a f_0 \frac{\mu}{p_0}$$

пропорциональна, как обычно, вязкости μ и с увеличением газосодержания β_0 сужается. В табл. 2 для смесей с идентичными пузырьками CO_2 приведены данные, иллюстрирующие влияние σ на параметры волны. С переходом от воды к этанолу, т.е. уменьшением поверхностного натяжения σ скорость D уменьшается, а ширина l , наоборот, возрастает. В обеих смесях с увеличением R_0 ширина волны монотонно возрастает, в то время как зависимость D от R_0 немонотонная, что объясняется конкуренцией составляющих скорости D за доминирующую роль в формировании ее значения.

На фиг. 3 показаны зависимости скоростей волн от допустимых значений числа Вебера, выявленные численными расчетами по (4.9). В смесях с одинаковыми несущими фазами (вода), но с пузырьками разных газов с увеличением показателя адиабаты γ ,

Таблица 2

$R_0, 10^{-7}$ м	$\text{H}_2\text{O} + \text{CO}_2$ $\sigma = 0.073$ Н/м, $\sigma/\mu = 73$ м/с				$\text{C}_2\text{H}_5\text{OH} + \text{CO}_2$ $\sigma = 0.0288$ Н/м, $\sigma/\mu = 19$ м/с			
	We	$\frac{k}{2\alpha}$	$D, \text{м/с}$	$l, 10^{-6}$ м	We	$\frac{k}{2\alpha}$	$D, \text{м/с}$	$l, 10^{-6}$ м
8.98	2.46	54.8	232	1.25	7.88	17.4	114	1.6
7.3	2	41.6	214	1.13	6.4	12.4	108	1.53
5.47	1.5	28.7	205	1	4.8	7.89	105	1.41
3.65	1	17.5	193	0.84	3.2	4.34	107	1.24
2.92	0.8	13.5	195	0.75	2.56	3.17	111	1.15
1.44	0.39	6.06	225	0.54	1.25	1.25	136	0.76
1.22	0.35	5.4	232	0.51	1.12	1.1	143	0.81



Фиг. 3. Распределение скоростей по допустимым значениям We в смесях воды с пузырьками CO_2 (кривая 1) и воздуха (кривая 2)

т.е. переходом от CO_2 (кривая 1) к воздуху (кривая 2), при одинаковых числах We скорость возрастает. Немонотонность кривых объясняется следующим механизмом формирования значения скорости распространения. На начальной стадии усиления, когда сжатие пузырька пока мало, нелинейность превалирует над остальными эффектами и начинается падение значения D . С увеличением сжатия влияние эффектов уравнивается и D убывает до наименьшего значения. Продолжающееся сжатие приводит к доминирующей роли эффектов поверхностного натяжения и диссипации над нелинейностью, и скорость волны начинает возрастать, достигая своего наибольшего значения при минимальном допустимом значении R_0 . Для кривой 1 расчеты дают значения $232 \text{ м/с} \leq D \leq 463 \text{ м/с}$ при $2.5 \cdot 10^{-8} \text{ м} \leq R_0 \leq 8.98 \cdot 10^{-7} \text{ м}$, что достаточно хорошо согласуется с экспериментальными данными [1] $240 \text{ м/с} \leq D \leq 570 \text{ м/с}$.

Заключение. В реальной газожидкостной смеси всегда имеет место межфазный теплообмен, пусть малой интенсивности. Его учет приводит к увеличению скорости звука в смеси и появлению эффектов дополнительной нелинейности и высокочастотного затухания. При реализации в смеси конкретного закона теплообмена, обусловленного соответствующей связью между теплофизическими параметрами, амплитуда волны может увеличиться в сравнении со случаем, когда реализуемый закон теплообмена иной. Эффект усиления проявляется в силу взаимодействия дополнительной нелинейности и высокочастотного затухания с основной гидродинамической нелинейностью. Для любой смеси существует интервал допустимых чисел Вебера, а следовательно, исходных радиусов, при которых проявляется эффект усиления, отсутствующий для значений вне диапазона. Вариацией исходного радиуса можно увеличить или уменьшить меру усиления волны, т.е. управлять эффектом. Учет поверхностного натяжения усиливает эффекты обеих нелинейностей, диссипации и дисперсии, препятствует сжатию пузырька, уменьшает амплитуду и ширину волны и приводит к немонотонной зависимости скорости распространения от числа Вебера. Выявлен механизм формирования значений скорости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гельфанд Б.Е., Степанов В.В., Тимофеев Е.И., Цыганов С.А. Усиление ударных волн в неравновесной системе жидкость–пузырьки растворяющегося газа // Докл. АН СССР. 1978. Т. 239. Вып. 1. С. 71–73.

2. Борисов А.А., Гельфанд Б.Е., Нигматулин Р.И., Рахматулин Х.А., Тимофеев Е.И. Усиление ударных волн в жидкостях с пузырьками пара и растворяющегося газа // Докл. АН СССР. 1982. Т. 263. № 3. С. 594–598.
3. Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г., Шрейбер И.Р. Волновая динамика газо- и парожидкостных сред. М.: Энергоатомиздат, 1990. 248 с.
4. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч. 2. М.: Наука, 1987. 360 с.
5. Гасенко В.Г., Накоряков В.Е., Шрейбер И.Р. Усиление ударной волны в жидкости и пузырьками газа // Докл. АН СССР. 1980. Т. 253. № 6. С. 1330–1332.
6. Оганян Г.Г. О влиянии межфазного теплообмена на нелинейное распространение волн в газожидкостной смеси // Изв. РАН. МЖГ. 2000. № 5. С. 77–87.
7. Weiss J., Tabor M., Carnevale G. The Painleve property for partial differential equation // J. Math. Phys. 1983. V. 24. № 3. P. 522–526.
8. Кудряшов Н.А. Точные солитонные решения обобщенного эволюционного уравнения волновой динамики // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 3. С. 465–470.
9. Кудряшов Н.А., Сухарев М.Б. Точные решения нелинейного уравнения пятого порядка для описания волн на воде // ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 5. С. 884–894.
10. Оганян Г.Г. О структурах нелинейных волн в термически релаксирующей газожидкостной смеси // Изв. РАН. МЖГ. 2002. № 2. С. 110–119.

Ереван

Поступила в редакцию
3.IX.2002