

УДК 532.526

© 2003 г. В. Н. ДИЕСПЕРОВ, И. И. ЛИПАТОВ

МОДЕЛИ ПРОЦЕССОВ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ТЕЧЕНИЯ В ЛАМИНАРНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ С ТРАНСЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ

Исследованы возможные режимы вязко-невязкого взаимодействия при трансзвуковых скоростях внешнего потока. Показано, что в зависимости от соотношения таких параметров, как амплитуда возмущения и числа Маха и Рейнольдса, существуют разные режимы течения. Сформулированы соответствующие математические модели и получены решения некоторых задач, описывающих линейные режимы развития возмущений. Построенные модели позволяют описать все возможные режимы взаимодействия.

Ключевые слова: пограничный слой, трансзвуковые течения, устойчивость, вязко-невязкое взаимодействие.

Исследования вязких трансзвуковых течений важны для многих практических проблем аэродинамики, связанных с возникновением бафтинга, развитием отрыва, с нестационарными режимами течения при больших углах атаки и т.д. Важную роль в этих явлениях играют процессы взаимодействия течения в пограничном слое с внешним трансзвуковым потоком. Процессы вязко-невязкого взаимодействия при трансзвуковых скоростях характеризуются рядом свойств, отличающих их от соответствующих процессов в дозвуковых и сверхзвуковых течениях, исследованных в [1–3]. Эти особенности изучены в [4–7]. В то же время проблема описания всех возможных режимов взаимодействия остается открытой.

Исследование нестационарных процессов в трансзвуковых течениях вязкого газа имеет два существенных приложения. Первое из них связано с линейной и нелинейной неустойчивостью и с развитием возмущений, приводящих к ламинарно-турбулентному переходу. Второе приложение прямо не связано с неустойчивостью и относится скорее к задачам аэроакустики. В этом смысле первое относится к развитию собственных возмущений в пограничных слоях (волн неустойчивости), а второе – к развитию акустических волн во внешнем потоке. Во всех указанных случаях существенную роль могут играть процессы вязко-невязкого взаимодействия, роль которых оказалась принципиальной при возникновении отрывных течений.

1. Постановка задачи. Предполагается, что на расстоянии l от передней кромки плоской поверхности расположена локальная область взаимодействия, инициируемого некоторым возмущением, например препятствием на поверхности или ударной волной. Предполагается, что начало декартовой системы координат совпадает с передней кромкой пластины, обтекаемой трансзвуковым потоком газа. Для времени, декартовых координат, компонентов вектора скорости, давления, плотности, динамического коэффициента вязкости введены следующие обозначения: $t/l, u_\infty, x/l, y/l, u_{u_\infty}, v_{u_\infty}, p/p_\infty, u_\infty^2, \rho/\rho_\infty, \mu/\mu_\infty$. Предполагается также, что число Рейнольдса $Re = \rho_\infty u_\infty l / \mu_\infty \gg 1$. Вместе с тем

рассматривается ламинарный режим течения. Это предположение оправдано по крайней мере для рассматриваемых нестационарных задач, в том числе линейных задач устойчивости.

Кроме малого параметра $\epsilon = \text{Re}^{-1/2}$, характеризующего толщину пограничного слоя, задача содержит еще два малых параметра: $\beta = \sqrt{|M^2 - 1|}$ и амплитуду возмущения давления Δp . Возмущение может характеризоваться и другими параметрами, такими как характерные пространственный и временной масштабы, так же как для турбулентности внешнего течения важны масштаб и спектральный состав возмущений. Последующий анализ ограничен рассмотрением режимов, для которых существенны процессы вязко-невязкого взаимодействия. Из этого рассмотрения пространственный и временной масштабы будут определены как функции амплитуды и чисел M и Re .

Предположим, что структура возмущенного течения включает в себя три характерные области, характеризующиеся одинаковым продольным размером. Эти области имеют разный поперечный размер как для дозвуковых, так и сверхзвуковых течений. Высота области внешнего невязкого течения при заданной длине области взаимодействия определяется из характеристических соотношений, высота второй области совпадает с толщиной пограничного слоя, поперечный размер третьей области определяется условием нелинейного изменения продольной скорости. Оценим вначале соотношение сил вязкости и инерции в пристеночной области течения. Профиль продольной скорости в невозмущенном пограничном слое при малых по сравнению с толщиной пограничного слоя расстояниях от поверхности имеет вид

$$u \sim y/\epsilon \quad (1.1)$$

Тогда одинаковый вклад сил вязкости и инерции соответствует соотношению

$$u \frac{\partial u}{\partial x} \sim \epsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (1.2)$$

откуда с учетом (1.1) следует оценка для толщины пристеночной области

$$y \sim \epsilon x^{1/3} \quad (1.3)$$

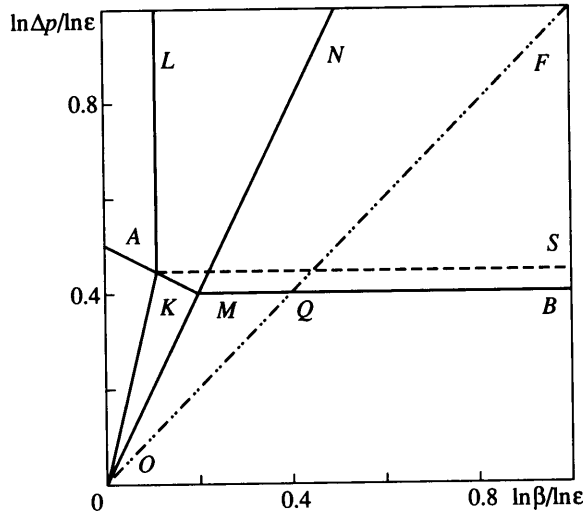
Для того чтобы реализовывался режим с одновременным влиянием вязкости и инерции необходимо, чтобы и градиент давления имел тот же порядок величины, что и вышеуказанные члены

$$\Delta p \sim x^{2/3} \quad (1.4)$$

К этим соотношениям нужно добавить условие взаимодействия, которое определяет величину индуцированного возмущения давления

$$\Delta p \sim y/(\beta x) \quad (1.5)$$

Оценка (1.5) получена в предположении о линейности возмущений, вносимых пограничным слоем во внешний поток. Ниже найдены границы применимости соотношения (1.5) и показано, что возможны и другие режимы, которые характеризуются другими зависимостями между возмущением давления и возмущением толщины вытеснения пограничного слоя. В результате анализа вышеприведенных соотношений получаем искомое соотношение между параметрами задачи, при выполнении которого



Фиг. 1. Диаграмма режимов взаимодействия

на пристеночное течение будут влиять силы вязкости, инерции и индуцированный градиент давления

$$\Delta p \sim \frac{\varepsilon^{1/2}}{\beta^{1/2}} \quad (1.6)$$

В дальнейшем удобно данное соотношение и последующие графически представить в виде соотношения $\ln(\Delta p)/\ln \varepsilon = f(\ln \beta / \ln \varepsilon)$. Тогда соотношение (1.6) изображается линией АМ на фиг. 1.

Очевидно, что возмущения давления, превосходящие по порядку величины (1.6), будут приводить к нелинейным возмущениям в пристеночной области, где влияние вязкости несущественно. Это требует введения дополнительной подобласти, и структура течения становится четырехслойной. Соответственно уменьшение возмущения давления приводит к преимущественному влиянию сил вязкости и к линейным возмущениям в пристеночной области.

Рассмотрим режим нелинейного невязкого течения, соответствующий возмущениям давления, превосходящим уровень (1.6). Найдем оценки для характерных размеров этой области и характерного времени переноса возмущений за счет конвекции

$$x \sim \varepsilon \beta^{-1} \Delta p^{-1/2}, \quad y \sim \varepsilon \Delta p^{1/2}, \quad t \sim \varepsilon \beta^{-1} \Delta p^{-1} \quad (1.7)$$

Оценим теперь характерное время переноса возмущений в области внешнего невязкого течения, имеющего продольный размер x и поперечный размер $Y \sim x/\beta$. Такая структура внешнего течения определяется видом уравнения малых возмущений в невязком трансзвуковом течении

$$\begin{aligned} (M^2 - 1)\varphi_{xx} - (\gamma + 1)\varphi_x \varphi_{xx} + \varphi_{yy} + 2\varphi_{xt} &= 0 \\ u &= 1 + \varphi_x, \quad v = \varphi_y, \quad p = -\varphi_x \end{aligned} \quad (1.8)$$

Тогда легко найти оценку для характерного времени распространения возмущений во внешней области

$$T \sim \epsilon \beta^{-3} \Delta p^{-1/2} \quad (1.9)$$

Строго говоря, для области трансзвукового течения можно определить два характерных времени – одно для распространения акустических волн в них по потоку, второе – для распространения волн вверх по потоку. Близость скорости потока к скорости звука (скорости распространения малых возмущений) приводит к разным величинам этих скоростей и соответственно к двум характерным временам. Первое из этих времен достаточно мало – оно определяется как время перемещения сигнала вниз по потоку с практически удвоенной скоростью. Второе время определяется как время распространения возмущения на той же длине, что и в первом случае, но с малой скоростью. Следствием такой анизотропии является вырождение уравнений газовой динамики, которые содержат первую производную во времени, а не вторую как при отсутствии анизотропии в распространении волн в дозвуковых течениях.

По существу рассмотрение ограничено процессами распространения волн лишь вверх по потоку, которые характеризуются большими временами.

Полученные выше оценки позволяют сравнить характерные времена во внешней области и в пристеночной области, их отношение имеет вид

$$\frac{T}{t} \sim \frac{\Delta p^{1/2}}{\beta^2} \quad (1.10)$$

Тогда условие одинаковости порядков характерных времен можно изобразить линией *OK* на фиг. 1. Следует отметить, что для дозвуковых или сверхзвуковых течений при конечных значениях параметра β время распространения возмущений во внешней вязкой области при малых амплитудах возмущения всегда мало по сравнению со временем распространения возмущений в пристеночной области на дне пограничного слоя. Соответственно, для трансзвуковых течений может реализовываться ситуация, для которой характерные времена в двух областях имеют одинаковый порядок. Это обстоятельство приводит как к новым возможным физическим эффектам, так и к новым математическим формулировкам краевых задач.

Для линейных режимов, реализующихся когда влияние вязкости в пристеночной области течения превосходит влияние конвективных эффектов, оценки имеют несколько другой вид, поскольку изменение толщины пристеночной области не равно порядку величины самой толщине, как в предыдущем случае, а определяется следующим образом

$$\Delta y \sim \epsilon \Delta p / x^{1/3} \quad (1.11)$$

Оценку (1.11) можно получить, если определить из условия сохранения расхода отношение между толщиной области вязкого течения, которая и для линейного режима имеет вид (1.3), и изменением толщины Δy , возникающим под влиянием изменения скорости Δu

$$\Delta y / y \sim \Delta u / u$$

В свою очередь оценка возмущения скорости следует из уравнения продольного импульса

$$u \Delta u \sim \Delta p, \quad \Delta u \sim \Delta p / u$$

Учитывая приведенные выше оценки, получаем соотношение (1.11). Система оценок для пристеночной области приобретает вид

$$x \sim \varepsilon^{3/4} / \beta^{3/4}, \quad y = \varepsilon^{5/4} / \beta^{1/4}, \quad t \sim \varepsilon^{1/2} / \beta^{1/2} \quad (1.12)$$

Оценка характерного времени во внешней области не меняется, тогда отношение характерных времен имеет вид

$$\frac{T}{t} \sim \frac{\varepsilon^{1/4}}{\beta^{9/4}} \quad (1.13)$$

Тогда одинаковым характерным временам во внешней области и в области пристеночного течения соответствует линия KL на фиг. 1.

Таким образом, для режимов течения, параметры которых расположены слева от линии OKL , характерны нестационарные процессы в пристеночной области и стационарные процессы в области внешнего течения. Для параметров, расположенных справа от линии OKL , характерны нестационарные процессы во внешней области и стационарные процессы в пристеночной области.

Оценим влияние трансзвукового параметра $K = \beta^2 / \delta^{2/3}$ или границу применимости линейной теории малых возмущений для внешнего невязкого потока. Используя полученные выше оценки, можно получить соотношения в линейном и нелинейном режимах, при которых этот параметр имеет конечный порядок. В линейном режиме используем оценки (1.12)

$$\delta \sim \Delta y / x, \quad \Delta p \sim \beta^2 \quad (1.14)$$

Для нелинейных режимов получается аналогичная оценка. Используя (1.7), получим

$$\delta \sim y / x, \quad \Delta p \sim \beta^2 \quad (1.15)$$

Последнее соотношение изображается линией OMN на фиг. 1.

Следует отметить, что для параметров, лежащих справа от линии OMN , необходимо использовать другие оценки для индуцированного возмущения давления. Можно показать, что для параметров, расположенных правее линии OMN , первый член в уравнении (1.8) становится несущественным, поэтому приходим к следующей системе оценок

$$\varphi / x^3 \sim 1 / Y^2, \quad \Delta p \sim \varphi / x, \quad V \sim \delta \sim y / x \sim \varphi / Y \quad (1.16)$$

Откуда следуют оценки для области внешнего течения

$$Y \sim x / \delta^{1/3}, \quad \Delta p \sim \delta^{2/3} \quad (1.17)$$

Объединяя эти оценки с оценками для пристеночной области, получаем следующее соотношение для границы линейных режимов (одинакового влияния сил вязкости и инерции)

$$\Delta p \sim \varepsilon^{2/5} \quad (1.18)$$

Это соотношение изображается линией MB на фиг. 1.

Таким образом, для параметров в области выше линии MB течение в пристеночной области описывается линейными уравнениями. В области параметров ниже линии MB , в пристеночной области и в области внешнего течения существенны нелинейные эффекты.

Сформулируем теперь краевые задачи, описывающие характерные режимы течения, для линии *АКМВ*, соответствующей наиболее общему случаю одинакового влияния сил вязкости и инерции. Заметим, что следует использовать разные представления решения на отрезках *АМ*, *МК* и *КВ*. Можно показать, что течения, соответствующие линии *АМ*, описываются известными уравнениями свободного взаимодействия для дозвуковых или сверхзвуковых течений. В этом смысле влияние трансзвуковых эффектов начинается только на линии *ОМN*.

Для всех рассматриваемых ниже режимов характерна трехслойная структура (четырёхслойная структура для нелинейных режимов невязкого течения) возмущенного течения, включающая в себя пристеночную область, область внешнего течения, а также промежуточную область, толщина которой равна толщине пограничного слоя. Логика введения этих областей диктуется неравномерностью разложений во всей возмущенной области. Все эти области имеют одинаковую длину, которая, как предполагается, превосходит толщину пограничного слоя. Тогда в соответствии с принципом минимального вырождения следует ввести в рассмотрение область 1, содержащую струйки тока внешнего течения. Поперечный размер этой области определяется наклоном характеристик и характерным продольным размером *x*. Промежуточная область, или область 2, содержит струйки тока внешнего течения, и имеет тот же продольный размер. Толщина пристеночной области, или области 3, определяется из условий баланса сил вязкости и сил инерции.

2. Краевые задачи. Для параметров на линии *МК* в соответствии с полученными выше оценками характерны следующие представления

$$\begin{aligned} x &= 1 + x_a \varepsilon^{3/4} \beta^{-3/4}, & y &= y_a \varepsilon^{5/4} \beta^{-1/4}, & t &= t_a \varepsilon^{2/4} \beta^{-2/4} \\ u &= \varepsilon^{1/4} \beta^{-1/4} u_a + \dots, & v &= \varepsilon^{3/4} \beta^{1/4} v_a + \dots \\ p &= \frac{1}{\gamma M^2} + \Delta p p_a + \dots, & \rho &= \rho_w + \dots \end{aligned} \quad (2.1)$$

Как предполагалось выше, параметр Δp определяется или наклоном поверхности тела в области взаимодействия или перепадом давления в слабой ударной волне.

Подстановка (2.1) в систему уравнений Навье – Стокса и предельный переход

$$M \rightarrow 1, \quad Re \rightarrow \infty, \quad \Delta p \rightarrow 0 \quad (2.2)$$

приводят к следующей системе уравнений

$$\begin{aligned} \Pi_t \frac{\partial u_a}{\partial t_a} + \rho_w u_a \frac{\partial u_a}{\partial x_a} + \rho_w v_a \frac{\partial u_a}{\partial y_a} + \Pi_p \frac{\partial p_a}{\partial x_a} &= \mu_w \frac{\partial^2 u_a}{\partial y_a^2} \\ \frac{\partial u_a}{\partial x_a} + \frac{\partial v_a}{\partial y_a} &= 0, \quad \frac{\partial p_a}{\partial x_a} = 0 \\ x_a \rightarrow -\infty: u_a &= a y_a, \quad y_a \rightarrow \infty: u_a = a y_a + a A_a \\ \Pi_t &= \frac{\beta}{\varepsilon^{1/4}}, \quad \Pi_p = \Delta p \frac{\beta^{1/2}}{\varepsilon^{1/2}} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Первый из параметров подобия Π_t пропорционален отношению характерных времен – времени распространения возмущений против течения в невязком потоке и времени распространения возмущений в пристеночной области. Второй параметр подо-

бия Π_p пропорционален отношению сил инерции к силам вязкости (в определенном смысле это локальное число Рейнольдса, относящееся к пристеночной области).

Для области 1 характерны следующие асимптотические представления

$$\begin{aligned} x &= 1 + x_a \varepsilon^{3/4} \beta^{-3/4}, \quad y = Y_a \varepsilon^{3/4} \beta^{-7/4}, \quad t = t_a \varepsilon^{3/4} \beta^{-1} \\ \varphi &= x_a \varepsilon^{3/4} \beta^{-3/4} + \varphi_a \varepsilon^{3/4} \beta^{-3/4} + \dots \end{aligned} \quad (2.4)$$

Для области 1 справедлива следующая задача

$$\operatorname{sgn}(1 - M) \frac{\partial^2 \varphi_a}{\partial x_a^2} + \frac{\partial^2 \varphi_a}{\partial Y_a^2} - 2 \frac{\partial^2 \varphi_a}{\partial x_a \partial t_a} = 0 \quad (2.5)$$

Сращивание решений в областях 1, 2 и 3 дает

$$\frac{\partial \varphi_a(x_a, 0, t_a)}{\partial x_a} = -\Pi_p p_a \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial \varphi_a(x_a, 0, t_a)}{\partial Y_a} = -\frac{\partial A_a}{\partial x_a} \quad (2.7)$$

В сформулированной задаче, устремляя параметры подобия к различным пределам, можно получить различные режимы взаимодействия при трансзвуковых скоростях.

Случай $\Pi_t \rightarrow 0$, $\Pi_p \rightarrow 0$ соответствует линейным возмущениям в стационарном вязком течении в области 3 и линейным нестационарным возмущениям в области 1. Случай $\Pi_t \rightarrow 0$, $\Pi_p \rightarrow \infty$ соответствует нелинейно возмущенному невязкому стационарному течению в области 3 и линейно возмущенному нестационарному течению в области 1. В этом случае структура течения становится четырехслойной, поскольку на дне области 3 необходимо ввести дополнительную область, где существенно влияние сил вязкости. Случай $\Pi_t \rightarrow \infty$, $\Pi_p \rightarrow \infty$ соответствует нелинейно возмущенному невязкому нестационарному течению в области 3 и линейно возмущенному стационарному течению в области 1. Случай $\Pi_t \rightarrow \infty$, $\Pi_p \rightarrow 0$ соответствует линейно возмущенному вязкому нестационарному течению в области 3 и линейно возмущенному стационарному течению в области 1.

Перейдем к рассмотрению режимов, соответствующих линии MK . В области 3 справедливы следующие представления

$$\begin{aligned} x &= 1 + x_b \varepsilon^{3/5}, \quad y = y_b \varepsilon^{6/5}, \quad t = t_b \varepsilon^{1/5} \\ u &= \varepsilon^{1/5} u_b + \dots, \quad v = \varepsilon^{4/5} v_b + \dots \\ p &= 1/(\gamma M^2) + \Delta p p_b + \dots, \quad \rho = \rho_w + \dots \end{aligned} \quad (2.8)$$

В результате подстановки (2.8) в систему уравнений Навье – Стокса и предельного перехода (2.2) получаем следующую систему уравнений и граничных условий

$$\begin{aligned} \rho_w u_b \frac{\partial u_b}{\partial x_b} + \rho_w v_b \frac{\partial u_b}{\partial y_b} + \Theta_p \frac{\partial p_b}{\partial x_b} &= \mu_w \frac{\partial^2 u_b}{\partial y_b^2} \\ \frac{\partial u_b}{\partial x_b} + \frac{\partial v_b}{\partial y_b} &= 0, \quad \frac{\partial p_b}{\partial y_b} = 0 \\ x_b \rightarrow -\infty: u_b &= a y_b, \quad y_b \rightarrow \infty: u_b = a y_b + a A_b \end{aligned} \quad (2.9)$$

Здесь параметр подобия, характеризующий отношение сил вязкости к силам инерции, имеет вид

$$\Theta_p = \Delta p / \epsilon^{2/5}$$

В области 1 справедливы разложения вида

$$\begin{aligned} x &= 1 + x_b \epsilon^{3/5}, \quad y = Y_b \epsilon^{2/5}, \quad t = t_b \epsilon^{1/5} \\ \varphi &= x_b \epsilon^{3/5} + \varphi_b \epsilon + \dots \end{aligned} \quad (2.10)$$

Соответствующее уравнение для области 1 имеет вид

$$\operatorname{sgn}(1 - M) \Theta_K \frac{\partial^2 \varphi_b}{\partial x_b^2} + (\gamma + 1) \frac{\partial \varphi_b}{\partial x_b} \frac{\partial^2 \varphi_b}{\partial x_b^2} + \frac{\partial^2 \varphi_b}{\partial Y_b^2} - 2 \frac{\partial^2 \varphi_b}{\partial x_b \partial t_b} = 0 \quad (2.11)$$

где параметр $\Theta_K = \beta^2 / \epsilon^{2/5}$ представляет собой обычный параметр подобия для трансзвуковых течений.

Условия сращивания с решениями для областей 1, 2 и 3 дают

$$\frac{\partial \varphi_b(x_b, 0, t_b)}{\partial x_b} = -\Theta_p P_b, \quad \frac{\partial \varphi_b(x_b, 0, t_b)}{\partial Y_b} = -\frac{\partial A_b}{\partial x_b} \quad (2.12)$$

Здесь предельные переходы $\Theta_p \rightarrow 0$, $\Theta_K \rightarrow 0$ соответствуют линейному вязкому стационарному течению в области 3 и нелинейному нестационарному течению в области 1. Случай $\Theta_p \rightarrow \infty$, $\Theta_K \rightarrow 0$ соответствует нелинейному невязкому стационарному течению в области 3 и нелинейному нестационарному течению в области 1. Два других предельных перехода дают уже изученные выше режимы течения.

Сформулированные выше задачи могут быть решены как в линейном, так и нелинейном приближениях. В первом случае можно получить аналитические решения и вывести дисперсионные соотношения (или условия разрешимости), связывающие длины волн, частоты и другие параметры задач. Во втором случае в результате численного анализа можно получить решения, описывающие возникновение зон отрыва под влиянием нестационарных возмущений.

3. Линейные режимы. Задача (2.3), (2.5), (2.6) может быть преобразована к виду

$$\Pi_t \frac{\partial u_c}{\partial t_c} + u_c \frac{\partial u_c}{\partial x_c} + v_c \frac{\partial u_c}{\partial y_c} + \Pi_p \frac{\partial p_c}{\partial x_c} = \frac{\partial^2 u_c}{\partial y_c^2}$$

$$\frac{\partial u_c}{\partial x_c} + \frac{\partial v_c}{\partial y_c} = 0, \quad \frac{\partial p_c}{\partial y_c} = 0$$

$$x_c \rightarrow -\infty: u_c = y_c; \quad y_c \rightarrow \infty: u_c = y_c + A_c$$

$$\operatorname{sgn}(1 - M) \frac{\partial^2 \varphi_c}{\partial x_c^2} + \frac{\partial^2 \varphi_c}{\partial Y_c^2} - 2 \frac{\partial^2 \varphi_c}{\partial x_c \partial t_c} = 0$$

$$\frac{\partial \varphi_c(x_c, 0, t_c)}{\partial x_c} = -\Pi_p P_c, \quad \frac{\partial \varphi_c(x_c, 0, t_c)}{\partial Y_c} = -\frac{\partial A_c}{\partial x_c}$$

$$x_a = x_c a^{-5/4} \rho_w^{-1/2} \mu_w^{-1/4}, \quad u_a = u_c a^{1/4} \rho_w^{1/2} \mu_w^{1/4}$$

$$p_a = p_c a^{1/2} \mu_w^{1/2}, \quad y_a = y_c a^{-3/4} \rho_w^{-1/2} \mu_w^{1/4}$$

$$\Phi_a = \Phi_c a^{-3/4} \rho_w^{-1/2} \mu_w^{1/4}, \quad A = A_c a^{-2/3} \rho_w^{-1/2} \mu_w^{1/3}$$

$$t_a = t_c a^{-5/4} \rho_w^{-1/2} \mu_w^{-1/4}, \quad Y_a = Y_c a^{-5/4} \rho_w^{-1/2} \mu_w^{-1/4}, \quad \Pi_r = \Pi_r' a^{-1/4} \rho_w^{-3/2} \mu_w^{-1/4}$$

Если $\Pi_p \rightarrow 0$, решение можно искать в виде

$$u_c = \Pi_p V(y_c) \exp(\omega t_c + ikx_c) + \dots, \quad p_c = \Pi_p P(y_c) \exp(\omega t_c + ikx_c) + \dots$$

$$\Phi_c = \Pi_p F(y_c) \exp(\omega t_c + ikx_c) + \dots, \quad A_c = \Pi_p B \exp(\omega t_c + ikx_c) + \dots$$

Задача сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \Pi_r' \omega U + y_c ikU + V + ikP &= \frac{d^2 U}{dy_c^2}, \quad ikU + \frac{dV}{dy_c} = 0 \\ -k^2 \operatorname{sgn}(1-M)\Phi + \frac{d^2 \Phi}{\partial Y_c^2} - 2ik\omega\Phi &= 0, \quad ik\Phi(x_c, 0, t_c) = -P, \quad \frac{d\Phi(x_c, 0, t_c)}{dY_c} = -ikB \end{aligned} \quad (3.1)$$

Решение задачи (3.1) выражается через функцию Эйри, что приводит к следующему дисперсионному соотношению

$$\frac{d\operatorname{Ai}(\Omega)}{d\xi} \left[\int_{\Omega}^{\infty} \operatorname{Ai}(\xi) d\xi \right]^{-1} = -\frac{(ik)^{7/3}}{\lambda}, \quad \Omega = \frac{\Pi_r' \omega}{(ik)^{2/3}} \quad (3.2)$$

$$\lambda = [2ik\omega + k^2 \operatorname{sgn}(1-M)]^{1/2}, \quad \operatorname{Re} \lambda > 0$$

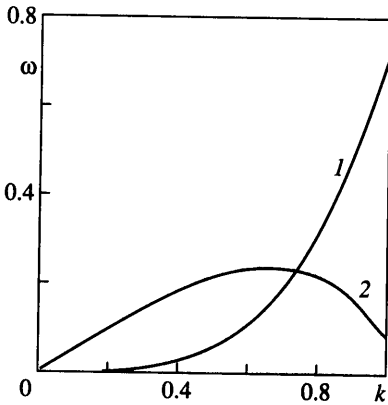
Дисперсионное соотношение для режимов, соответствующих области изменения параметров, лежащих выше линии AM , может быть выделено аналогично

$$\frac{d\operatorname{Ai}(0)}{d\xi} \left[\int_0^{\infty} \operatorname{Ai}(\xi) d\xi \right]^{-1} = -\frac{(ik)^{7/3}}{\tau} \quad (3.3)$$

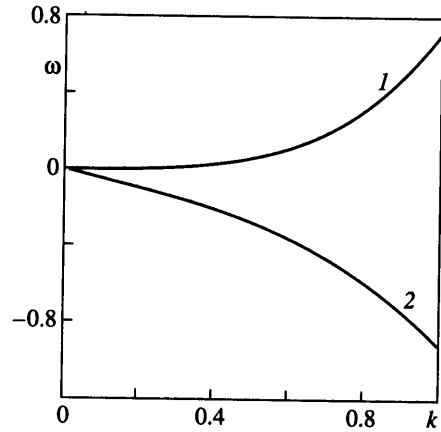
$$\tau = [2ik\omega + k^2 \Theta_k \operatorname{sgn}(1-M)]^{1/2}, \quad \operatorname{Re} \tau > 0$$

Примеры зависимостей действительной и мнимой части параметра ω от числа Маха и волнового числа k представлены на фиг. 2-4, где кривая 1 – действительная часть ω , 2 – мнимая части ω . На фиг. 2 и 3 представлены результаты интегрирования (3.2) для случаев дозвукового и сверхзвукового течений соответственно. Предполагалось, что $\Pi_r = 0$. Зависимости на фиг. 4 соответствуют дисперсионному соотношению (3.3) для $\Theta_k = 0$.

Следует отметить, что полученные дисперсионные соотношения относятся к таким режимам распространения волн Толлмина–Шлихтинга, для которых критический слой расположен в пристеночной области возмущенного течения (область 3). По существу речь идет о длинноволновых возмущениях или о возмущениях, имеющих длины волн и период такие же, какие характерны для пристеночной области. Известно, что для дозвуковых течений нижняя ветвь кривой нейтральной устойчивости описы-



Фиг. 2



Фиг. 3

Фиг. 2. Зависимости действительной (1) и мнимой (2) части параметра ω от волнового числа k для дозвукового режима

Фиг. 3. Зависимости действительной (1) и мнимой (2) части параметра ω от волнового числа k для сверхзвукового режима

ваются трехслойной моделью, в то время как для сверхзвуковых течений нейтральным возмущениям соответствует пятислойная схема, для которой критический слой расположен вне пристеночной области течения. Можно предположить, что выведенные дисперсионные соотношения описывают переход от одной структуры течения к другой.

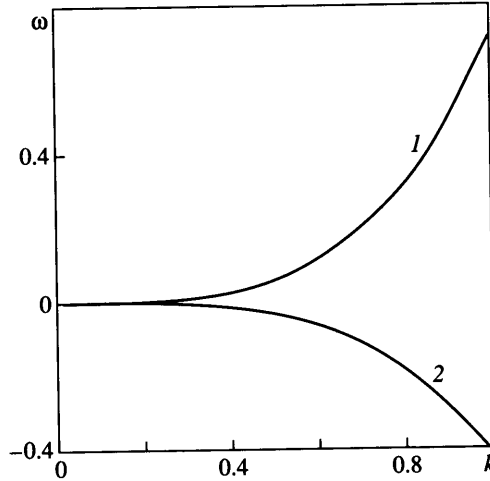
4. Другие возможные режимы взаимодействия. Можно показать, что при малых значениях параметра β возможен режим течения, отличающийся от описанных выше. Такой режим изучен в [6, 7]. Он соответствует области параметров, расположенной справа от линии KL на фиг. 1. Для этого режима характерны одинаковые времена нестационарных процессов в области невязкого течения и в пристеночной области. В соответствующей задаче нестационарные эффекты оказываются существенными как в области 1, так и в области 3, но при этом задача в области 1 претерпевает вырождение – в ней отсутствует член вида φ_{xx} . В линейном приближении в ней отсутствует также член вида $\varphi_x \varphi_{xx}$, в результате решение задачи существует только для нестационарных процессов.

Возвращаясь к анализу решений в области 3 для этого режима, предположим, что влияние сил вязкости и инерции здесь одинаково по порядку величины. Тогда справедливы следующие оценки толщины области 3, скорости, давления и характерного времени

$$y \sim \varepsilon x^{1/3}, \quad u \sim x^{1/3}, \quad p \sim x^{2/3}, \quad t \sim x/u \sim x^{2/3} \quad (4.1)$$

Оценки для области 1, где по предположению существенны члены вида φ_x , φ_{yy} , с учетом граничных условий на дне области 1 имеют следующий вид

$$xt \sim Y^2, \quad p \sim \varphi/x, \quad \varphi/Y \sim y/x \quad (4.2)$$



Фиг. 4. Зависимости действительной (1) и мнимой (2) части параметра ω от волнового числа k при $M = 1$

Совместное выполнение (4.1) и (4.2) позволяет определить все необходимые масштабы координат и функций в области возмущенного течения

$$\begin{aligned} x \sim \varepsilon^{2/3}, \quad t \sim \varepsilon^{4/9}, \quad p \sim \varepsilon^{4/9}, \quad u \sim \varepsilon^{2/9}, \quad y \sim \varepsilon^{11/9} \\ Y \sim \varepsilon^{5/9}, \quad \varphi \sim \varepsilon^{10/9} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Граница нелинейных режимов изображается теперь пунктирной линией KS . Следует отметить, что оценки масштабов длины и времени для линейных режимов (область параметров, лежащая выше пунктирной линии KS) имеют тот же вид, что и в (4.3).

Оценки (4.3) позволяют определить относительную величину нелинейного члена в уравнении малых возмущений для внешнего потока (1.8)

$$\frac{\Phi_x \Phi_{xx}}{\Phi_{YY}} \sim \varepsilon^{2/9} \rightarrow 0$$

Следовательно, всюду на линии KS влияние нелинейного члена для области 1 несущественно. Оценим теперь масштабы продольной скорости и координат, характерных для невязкого течения в области 3 при условии, что параметры задачи принадлежат области, расположенной ниже линии KS . В области 3 имеем

$$u \sim \Delta p^{1/2}, \quad y \sim \varepsilon \Delta p^{1/2}, \quad t \sim x / \Delta p^{-1/2} \quad (4.4)$$

Тогда для области 1 справедливы оценки

$$\varphi \sim \Delta p x, \quad \varphi / Y \sim \varepsilon \Delta p^{1/2} / x, \quad Y \sim x^{1/2} t^{1/2} \quad (4.5)$$

Из (4.4) и (4.5) получаем

$$x \sim \varepsilon / \Delta p^{3/4}, \quad t \sim \varepsilon / \Delta p^{3/4} \quad (4.6)$$

Для отношения членов $\Phi_x \Phi_{xx}$ и Φ_{YY} в уравнении продольного импульса для области 1 с учетом (4.6) имеем оценку

$$\Phi_x \Phi_{xx} / \Phi_{YY} \sim \Delta p^{1/2}$$

которая показывает, что при малой амплитуде возмущения давления нелинейный член в области 1 в рассматриваемом режиме несущественен.

5. Воздействие прямого скачка уплотнения на течение в пограничном слое. Проблема воздействия прямого скачка уплотнения на течение в пограничном слое – одна из важнейших в теории трансзвуковых течений вязкого газа. Перепад давления оценивается следующим образом

$$\Delta p \sim \beta$$

На фиг. 1 этой оценке соответствует линия OQF . Краевая задача для рассматриваемого режима следует из задачи (1.27), (1.29) при стремлении параметра $\Theta_K \rightarrow 0$. Эта крайняя задача описывает лишь часть возможных процессов. Как отмечалось выше, использование уравнения (1.8) предполагает выделение только одного из возможных волновых процессов, а именно распространение волн вверх по потоку.

Для рассмотрения процессов распространения волн вниз по потоку и их прохождения через ударную волну необходимо пересмотреть анализ течения во внешней области.

6. Постановка нелинейных задач. Ряд задач, соответствующих диаграмме на фиг. 1, изучен ранее, и их результаты представлены в цитируемой литературе. Вместе с тем ранее не рассматривались задачи, постановки которых приведены ниже. Обе задачи соответствуют нелинейно возмущенным течениям, когда нелинейность характерна как для внешнего невязкого течения, так и для течения в пристеночной области.

Параметрам первой из задач соответствует линия OM . Эта задача получается в результате предельного перехода $\Theta_p \rightarrow 8$ из задачи (1.27), (1.29) после преобразования переменных

$$u_b = \Theta_p^{1/2} U_1, \quad v_b = \Theta_p^{3/2} V_1, \quad A_b = \Theta_p^{1/2} A_1, \quad \Phi_b = \Theta_p^{1/2} \Phi_1,$$

$$Y_b = \Theta_p^{-1/2} Y_1, \quad x_b = \Theta_p^{-1/2} X_1, \quad t_b = \Theta_p^{-1} T_1, \quad y_b = \Theta_p^{1/2} y_1$$

В результате имеем краевую задачу

$$\rho_w U_1 \frac{\partial U_1}{\partial X_1} + \rho_w V_1 \frac{\partial U_1}{\partial y_1} + \frac{\partial p_b}{\partial X_1} = 0$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial X_1} + \frac{\partial V_1}{\partial y_1} = 0, \quad \frac{\partial p_b}{\partial y_1} = 0 \quad (6.1)$$

$$X_1 \rightarrow -\infty: U_1 = a y_1; \quad y_1 \rightarrow \infty: U_1 = a y_b + a A_1$$

$$\operatorname{sgn}(1 - M) \Theta_K \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial X_1^2} + (\gamma + 1) \frac{\partial \Phi_1}{\partial X_1} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial Y_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial X_1 \partial T_1} = 0 \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial \Phi_1(X_1, 0, T_1)}{\partial X_1} = -p_b, \quad \frac{\partial \Phi_1(X_1, 0, T_1)}{\partial Y_1} = -\frac{\partial A_1}{\partial X_1} \quad (6.3)$$

Первое из уравнений (6.1) допускает решение вида

$$U_1 = a y_1 + a A_1$$

В результате уравнение, описывающее нелинейные процессы в пристеночной области, сводится к уравнению Бернулли

$$\rho_w a^2 A_1 \frac{\partial A_1}{\partial X_1} + \frac{\partial p_b}{\partial X_1} = 0 \quad (6.4)$$

которое совместно с уравнением Линя–Рейснера–Цяня (6.2) и граничными условиями (6.3) приводит к задаче оттекания поверхности, форма которой зависит от давления над ней. Следует отметить, что функция A_1 , входящая в задачу, представляет собой изменение толщины пристеночной области (и пограничного слоя в целом), взятое с обратным знаком. При отсутствии возмущений на больших расстояниях вверх по потоку от области взаимодействия решение уравнения (6.4) имеет вид

$$p_b = -\rho_w a^2 A_1^2 / 2 \quad (6.5)$$

Тогда окончательно задача (6.1)–(6.3) принимает вид

$$\text{sgn}(1 - M) \Theta_K \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial X_1^2} + (\gamma + 1) \frac{\partial \Phi_1}{\partial X_1} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial Y_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial X_1 \partial T_1} = 0 \quad (6.6)$$

$$\frac{\partial \Phi_1(X_1, 0, T_1)}{\partial X_1} = \frac{\rho_w a^2 A_1^2}{2}, \quad \frac{\partial \Phi_1(X_1, 0, T_1)}{\partial Y_1} = \frac{\partial A_1}{\partial X_1}$$

Другой режим нелинейного взаимодействия реализуется при условиях, когда нестационарные процессы существенны как во внешнем невязком течении, так и в пристеночной области. Опуская промежуточные преобразования, использующие разложение и оценки (4.5), (4.6), приведем окончательный вид соответствующей этому режиму краевой задачи

$$\rho_w a \frac{\partial A_2}{\partial T_2} + \rho_w a^2 A_2 \frac{\partial A_2}{\partial X_2} + \frac{\partial p_d}{\partial X_d} = 0 \quad (6.7)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial Y_2^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial X_2 \partial T_2} = 0, \quad \frac{\partial \Phi_2(X_2, 0, T_2)}{\partial X_2} = -p_d, \quad \frac{\partial \Phi_2(X_2, 0, T_2)}{\partial Y_2} = -\frac{\partial A_2}{\partial X_2}$$

Эта задача при малых амплитудах возмущений обладает решениями в виде бегущих волн. Можно показать также, что задача (6.7) может быть выведена из соответствующей задачи [9] при $\beta \rightarrow 0$.

Заключение. С использованием метода сращиваемых разложений изучены нестационарные процессы взаимодействия течения в ламинарном пограничном слое и внешнего трансзвукового потока. Выявлены определяющие параметры подобия и сформулированы математические модели, соответствующие различным режимам взаимодействия.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№ 01-01-00999).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lighthill M.J. On boundary layers and upstream influence. II // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1953. V. 217. № 1131. P. 476–507.
2. Нейланд В.Я. К теории отрыва ламинарного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке // Изв. АН СССР. МЖГ. 1969. № 4. С. 53–57.
3. Stewartson K., Williams P.G. Self-Induced Separation. // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1969. V. 312. № 1509. P. 181–206.

4. *Messiter A.F., Feo A., Melnik R.E.* Shock-wave strength for separation of a laminar boundary layer at transonic speeds // *AIAA Journal*. 1971. V. 9. № 6. P. 1197–1198.
5. *Рыжов О.С.* О нестационарном пограничном слое с самоиндуцированным давлением при трансзвуковых скоростях внешнего потока // *Докл. АН СССР*. 1977. Т. 236. № 5. С. 1091–1094.
6. *Рыжов О.С., Савенков И.В.* Об устойчивости пограничного слоя при трансзвуковых скоростях внешнего потока // *ПМТФ*. 1990. № 2. С. 65–71.
7. *Жук В.И.* О вынужденных колебаниях в пограничном слое на частотах, близких к верхней ветви нейтральной кривой // *ПММ*. 1987. Т. 51. Вып. 3. С. 68–78.
8. *Gole J.D., Cook L.P.* *Transonic Aerodynamics*. Amsterdam: North-Holland, 1986. 473 p.
9. *Жук В.И.* Нелинейные возмущения, индуцирующие собственный градиент давления в пограничном слое на пластине в трансзвуковом потоке // *ПММ*. 1993. Т. 57. Вып. 5. С. 68–78.

Москва

Поступила в редакцию
5.XII.2002