

УДК 532.51:551.46

© 2003 г. И. П. СЕМЕНОВА, Л. Н. СЛЕЗКИН

## ДИНАМИЧЕСКИ РАВНОВЕСНАЯ ФОРМА ИНТРУЗИОННЫХ ВИХРЕВЫХ ОБРАЗОВАНИЙ В ОКЕАНЕ

Дана постановка задачи о нахождении динамически равновесной формы однородной по плотности вращающейся массы жидкости (линзы), погруженной в покоящийся стратифицированный океан на вращающейся Земле. Получено уравнение для формы поверхности раздела водных масс. Точное решение задачи для антициклонически вращающейся линзы в линейно стратифицированном океане в окрестности ее залегания показывает, что динамически равновесная форма поверхности раздела представляет собой наклоненный к горизонту трехосный эллипсоид, близкий к эллипсоиду вращения для реальных параметров явления. Определены предельные значения широт, где возможно существование таких образований. Исследовано вырождение формы при уменьшении скорости собственного вращения линз.

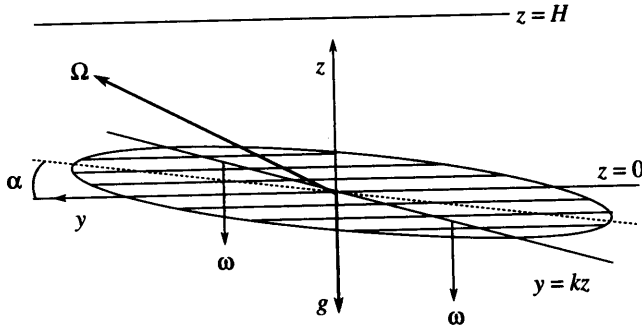
*Ключевые слова:* абсолютный вихрь, стратификация, гидростатический момент, прецессия, линза-интрузия.

Натурные измерения в Атлантическом океане [1, 2] свидетельствуют о существовании в наблюдаемых мезомасштабных антициклонических вихрях, называемых "линзами", однородных или слабо стратифицированных [3, 4] ядер, с горизонтальными размерами  $\sim 10^2$  км и вертикальными размерами  $\sim 5 \cdot 10^2$  м, содержащих интрузионную водную массу средиземноморского происхождения. Долгая жизнь линз, порядка 3–10 лет, по мнению авторов настоящей работы, объясняется существованием их динамически равновесной замкнутой формы. Механическая модель явления кратко изложена ранее в [5].

При рассмотрении вопроса о приспособлении к динамическому равновесию антициклонически вращающегося твердого тела в стратифицированном океане на вращающейся Земле было показано [5], что для достижения равновесия в идеальной стратифицированной жидкости тело должно повернуться вокруг касательной к параллели на угол  $\alpha$  так, чтобы его южный край оказался притоплен, а северный приподнят относительно горизонта, на котором расположен центр масс уравновешенного тела. Такой наклон создает воздействие на тело момента внешних гидростатических сил, направленного на запад, который обеспечивает прецессию вектора собственного момента количества движения в абсолютном пространстве с угловой скоростью вращения Земли.

Дадим постановку гидродинамической задачи. Однородная по плотности вращающаяся идеальная несжимаемая жидкость конечного объема погружена в стратифицированный океан, покоящийся относительно Земли, вращающейся с угловой скоростью  $\Omega$ . Строится динамически равновесная форма поверхности раздела водных масс из условия равенства давлений на границе раздела.

1. Введем систему координат  $x, y, z$  с началом в точке  $O$  – неподвижном центре масс линзы. Ось  $z$  направлена по местной вертикали вверх, ось  $x$  – на восток, ось  $y$  – на север. Поскольку характерный горизонтальный размер линзы много меньше радиуса Земли, пренебрежем кривизной поверхности Земли, и рассмотрим вопрос о равновесной форме вращающегося однородного ядра идеальной несжимаемой жидкости проведем в касательном к Земле плоском слое стратифицированной идеальной жид-



Фиг. 1. Меридиональное сечение через центр линзы

кости в плоскопараллельном поле силы тяжести. Меридиональное сечение через центр линзы показано на фиг. 1.

Для описания движения в линзе используем уравнения гидродинамики в форме Громеки-Лэмба в системе координат, связанной с вращающейся Землей

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0$$

$$(2\boldsymbol{\Omega} + \operatorname{rot} \mathbf{V}) \times \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} \Phi, \quad \Phi = p + 0.5\rho V^2 + \rho gz \quad (1.1)$$

Здесь  $\mathbf{V}$  – вектор относительной скорости жидкости,  $\rho$  – плотность,  $p$  – давление,  $\boldsymbol{\Omega}$  – вектор угловой скорости вращения Земли.

Зададим относительные скорости в виде

$$u = -\omega(y - kz), \quad v = \omega x, \quad w = 0, \quad \omega = \text{const} \quad (1.2)$$

Такое поле скоростей соответствует плоским движениям относительно Земли по окружностям, центры которых расположены на прямой  $y = kz$  в плоскости меридиана, с угловой скоростью  $\omega$ , одинаковой для всех горизонтальных сечений (фиг. 1).

Непосредственной проверкой убеждаемся в выполнении уравнения неразрывности.

Система (1.1) принимает вид ( $\rho_l$  – плотность линзы)

$$x\omega(2\Omega_z + 2\omega) = \frac{1}{\rho_l} \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

$$\omega(y - kz)(2\Omega_z + 2\omega) = \frac{1}{\rho_l} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (1.3)$$

$$-\omega(y - kz)(2\Omega_y + k\omega) = \frac{1}{\rho_l} \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

Проекции относительного вихря суть  $(0, \omega k, 2\omega)$ ; проекции планетарного вихря –  $(0, 2\Omega_y, 2\Omega_z)$ , проекции абсолютного вихря –  $(0, 2\Omega_y + k\omega, 2\Omega_z + 2\omega)$ .

Поскольку поле скоростей задано соотношениями (1.2), следует проверить выполнение условий совместности уравнений (1.3).

Условие совместности первых двух уравнений выполняется автоматически. Из требований совместности двух оставшихся пар уравнений следует условие, которому должен удовлетворять тангенс угла наклона линии центров вращения  $k$

$$k = \frac{2\Omega_y}{2\Omega_z + \omega} \quad (1.4)$$

Отметим, что введенный как характеристика геометрического места центров круговых сечений параметр  $k$  имеет тесную связь с вектором абсолютного вихря, а именно тангенс угла наклона вектора абсолютного вихря к местной вертикали в точности равен  $k$ .

Система (1.3) будет использована для определения давления в линзе. Давление во внешней области находится из уравнений гидростатики для стратифицированной жидкости. Форму границы раздела водных масс определим из условия равенства давлений на ней.

Интегрируя первое уравнение (1.3) по  $x$ , имеем

$$-\frac{\omega}{2}x^2(2\Omega_z + 2\omega) = -\frac{1}{\rho_l}\Phi + \frac{1}{\rho_l}\Pi_1(y, z) \quad (1.5)$$

Здесь  $\Pi_1(y, z)$  – произвольная функция.

Дифференцируя (1.5) по  $y$ , подставляя во второе уравнение (1.3) и интегрируя по  $y$ , имеем

$$-\frac{\omega}{2}y^2(2\Omega_z + 2\omega) + k\omega(2\Omega_z + 2\omega)xy = -\frac{1}{\rho_l}\Pi_1(y, z) + \frac{1}{\rho_l}\Pi_2(z) \quad (1.6)$$

Здесь  $\Pi_2(z)$  – произвольная функция.

Подставляя выражение для  $\Pi_1(y, z)$  из (1.6) в (1.5) и дифференцируя полученное выражение по  $z$ , получаем

$$-\frac{1}{\rho_l}\frac{\partial}{\partial z}\Phi + \frac{1}{\rho_l}\frac{d\Pi_2(z)}{dz} - k\omega(2\Omega_z + 2\omega)y = 0 \quad (1.7)$$

Подставляя (1.7) в третье уравнение (1.3), интегрируем по  $z$  и используем условие совместности (1.4). Для  $\Pi_2(z)$  получаем выражение

$$\Pi_2(z) = 0.5k\omega(2\Omega_y + k\omega)z^2 + \text{const.} \quad (1.8)$$

Используя (1.8), (1.6), (1.5) и (1.2), получаем распределение давления в линзе

$$p_l = \frac{\rho_l\omega}{2}(\omega + 2\Omega_z)(x^2 + y^2) + \rho_l\omega\frac{2\Omega_y^2}{\omega + 2\Omega_z}z^2 - 2\Omega_y\rho_l\omega yz - \rho_lgz + p_l(0, 0, 0) \quad (1.9)$$

Здесь  $p_l(0, 0, 0)$  – давление в центре линзы.

Определим гидростатическое давление  $p_f$  в окружающей линзу фоновой воде. Вблизи изопикнической поверхности, определенной как уровень, на котором  $\rho_f = \rho_l$ , имеем

$$\rho_f = \rho_l + \frac{d\rho_f}{dz}\Big|_{z=0}z$$

Из уравнений гидростатики для окружающей жидкости получаем давление на границе линзы  $z_b$  (принято, что давление на поверхности океана при  $z = H$  равно нулю)

$$p_f(z_b) = \rho_lg(H - z_b) + \frac{d\rho_f}{dz}g\frac{H^2 - z_b^2}{2} \quad (1.10)$$

Приравняем (1.10) и (1.9). Отсюда находим уравнение поверхности раздела водных масс

$$\frac{\omega}{2}(\omega + 2\Omega_x)(x^2 + y^2) + \left(\omega\frac{2\Omega_y^2}{2\Omega_z + \omega} - \frac{1}{2}N^2\right)z^2 - 2\Omega_y\omega yz = -\frac{\Delta}{\rho_l} \quad (1.11)$$

Здесь  $\Delta = p_f(0, 0, 0) - p_f(0)$  – избыток давления в центре линзы по отношению к фону на том же горизонте,  $N^2 = - (dp_f/dz)(g/\rho_f)$  – квадрат частоты Вайсяля–Брента, величина  $(dp_f/dz) < 0$  для устойчиво стратифицированной жидкости.

Величину  $N^2$  в окрестности залегания линзы для линейно стратифицированного океана можно считать постоянной, и в этом случае левая часть (1.11) есть квадратичная форма.

Приводя квадратичную форму в левой части (1.11) к каноническому виду поворотом осей на угол  $\alpha$  вокруг касательной к параллели (оси  $x$ ), находим  $\operatorname{tg} 2\alpha$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{4\omega\Omega_y}{\omega(2\Omega_z + \omega)^{-1}[4\Omega_y^2 - (\omega + 2\Omega_z)^2] - N^2} \quad (1.12)$$

Для антициклона ( $\omega < 0$ ) при реальных значениях параметров наблюдавшихся линз имеем

$$4\Omega_y^2 - (\omega + 2\Omega_z)^2 > 0$$

Отсюда следует, что  $\operatorname{tg} 2\alpha > 0$ , следовательно, южный край линзы притоплен относительно плоскости  $z = 0$  (фиг. 1, 2). Приведем количественные оценки:  $|\omega| \sim 0.2\Omega \sim \sim 1.5 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$ ,  $\Omega \sim 7.3 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$ , при широте  $\varphi \sim 20^\circ$  ( $\sin \varphi \sim 0.34$ ,  $\cos \varphi \sim 0.94$ ) первое слагаемое в знаменателе (1.12) имеет порядок  $10^{-12} \text{ с}^{-2}$ , а  $N^2 \sim 10^{-5} \text{ с}^{-2}$ . Следовательно

$$\operatorname{tg} 2\alpha \approx \frac{4|\omega|\Omega \cos \varphi}{N^2}$$

Для океанических (и атмосферных) антициклонов числитель на несколько порядков меньше знаменателя (для линзы – на четыре порядка). Поэтому  $\alpha$  – малый угол

$$\alpha \approx \frac{2|\omega|\Omega \cos \varphi}{N^2} \quad (1.13)$$

Это выражение в точности совпадает с выражением для угла наклона гидростатически уравновешенного вращающегося твердого тела в стратифицированном океане [5]. Для вышеуказанных параметров линзы значение  $\alpha$  имеет порядок одной угловой минуты.

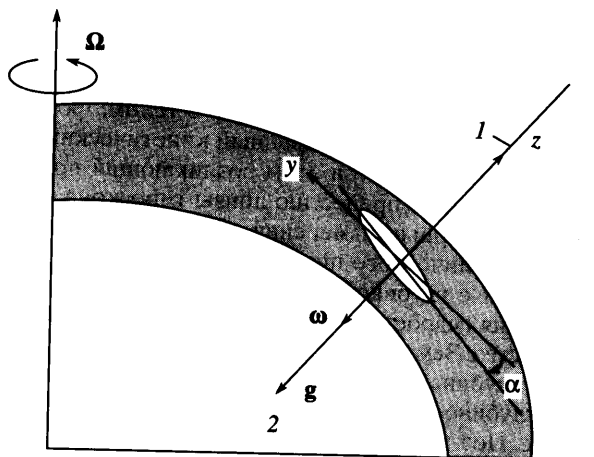
Оценим теперь угол  $\beta$  наклона (1.4) прямой  $\operatorname{tg} \beta = k$  к оси  $z$ . При указанных выше параметрах  $k = 3.96$ ,  $\beta \approx 76^\circ$ .

Возвращаясь к преобразованию квадратичной формы (1.11) к главным осям  $x, y', z'$ , отметим, что точные выражения коэффициентов при  $(y')^2$  и  $(z')^2$  достаточно сложно выражаются через определяющие параметры. Поэтому воспользуемся тем, что угол  $\alpha$  мал. Опуская громоздкие выкладки, приведем уравнение поверхности раздела в главных осях с приближенными значениями коэффициентов

$$\frac{x^2 + (y')^2}{a^2} + \frac{(z')^2}{c^2} = 1, \quad a^2 = \frac{2\Delta}{\rho_f |\omega| (2\Omega_z - |\omega|)} > 0, \quad c^2 = \frac{2\Delta}{\rho_f N^2} > 0, \quad (1.14)$$

$$y = y' \cos \alpha - z' \sin \alpha, \quad z = y' \sin \alpha + z' \cos \alpha$$

Из точных выражений для коэффициентов квадратичной формы в главных осях следует, что получившаяся поверхность есть трехосный эллипсоид, близкий к эллипсоиду вращения (1.14).



Фиг. 2. Наклон линзы в океане: 1 – местная вертикаль, 2 – экватор

Отношение главных полуосей дается выражением

$$\frac{a}{c} = \frac{N}{\sqrt{|\omega|(2\Omega_z - |\omega|)}} \quad (1.15)$$

Для параметров линзы "Мезополигон-85" [1] отношение  $a/c \sim 1.2 \cdot 10^2$ , что хорошо согласуется с натурными наблюдениями.

Уравнение поверхности (1.14) записано для антициклона ( $\omega < 0$ ). В общем случае (знак  $\omega$  – произвольный) уравнение поверхности с приближенными значениями коэффициентов имеет вид

$$\frac{\omega}{2}(\omega + 2\Omega_z)[x^2 + (y')^2] - \frac{N^2}{2}(z')^2 = -\frac{\Delta}{\rho_l} \quad (1.16)$$

Полученное гидродинамическое решение задачи о равновесной форме однородной антициклонически вращающейся массы жидкости, погруженной в стратифицированный вращающийся океан, в рамках сделанной постановки – точное, так как на границе раздела через условие непрерывности давления сшиты два точных решения уравнений идеальной жидкости. Это решение не осесимметричное, а пространственное, поскольку поле скорости есть функция трех координат. Полученное решение – разрывное, так как на границе раздела жидкостей терпят разрыв плотность и касательная к поверхности скорость. Вопрос о структуре поверхности разрыва требует отдельного рассмотрения.

При циклоническом вращении ( $\omega > 0$ ) не существует замкнутой равновесной конфигурации однородной вращающейся массы жидкости, находящейся в толще устойчиво стратифицированного океана. В этом случае рассмотрение баланса сил в радиальном направлении сечения  $z = \text{const}$  показывает, что все силы (сила от градиента давления, центробежная от собственного вращения и кориолисова сила инерции) направлены наружу.

Существование замкнутой динамически равновесной формы у антициклонов объясняет, почему все долго живущие линзы имеют антициклоническое вращение, а также тот факт, что обнаруженные линзы (в северном полушарии) были именно антициклонами [6, 7].

Вращающиеся линзы представляют собой своеобразные жидкие гироскопы [5]. В отличие от вращающегося твердого тела, погруженного в стратифицированную среду, когда для обеспечения прецессии вместе с Землей собственный кинетический момент отклоняется от местной вертикали вместе с телом, форма жидкой вращающейся массы деформируется так, что собственный кинетический момент остается направленным по местной вертикали. При этом возникающий при деформации гидростатический момент обеспечивает прецессию линзы-гироскопа вместе с Землей в абсолютном пространстве. Натурные измерения показывают, что все обнаруженные линзы находятся в слое океанического пикноклина (глубиной до ~1.5 км, где существенно изменение плотности с глубиной). Именно стратификация фона обеспечивает возможность существования гидростатического момента, поддерживающего движение вращающейся линзы вместе с Землей – прецессию линзы-гироскопа в абсолютном пространстве. При больших глубинах (ниже нижней границы пикноклина) плотность практически не меняется с глубиной, и исчезает гидростатический момент, поддерживающий указанное движение. Поэтому линзы ниже пикноклина не наблюдаются.

Линзы – это специфическое природное явление. Существование стационарной динамически равновесной замкнутой формы антициклонически вращающейся массы жидкости обеспечивается совместным воздействием вращения Земли и стратификации внешней среды.

2. Из-за небольших отклонений от положения равновесия и термохалинных процессов (главным из которых является "остывание" линзы, имеющей температуру и соленость выше фоновых значений), приводящих к малым изменениям плотности линзы, она с малой скоростью (~ 1 см/с) перемещается в горизонтальной плоскости и медленно тонет. Генеральное направление этого перемещения – на юго-запад [5, 7]. За время своей жизни линза проходит тысячи километров.

Воспользуемся интегралом Эртеля [8] и полученным решением (1.14) для грубой оценки предельных значений широт, южнее которых равновесная форма не существует, и для рассмотрения эволюции равновесной формы линзы-интрузии при уменьшении скорости собственного вращения линзы.

Примем, что величина  $\nabla\rho/\rho$  при  $z = 0$  не зависит от широты, т.е. одинакова для всего покоящегося океана. Тогда, рассматривая линзу как частицу, находящуюся в гидростатическом равновесии на изопикне  $\rho_f = \rho_i$ , из условия сохранения в частице некоторого скаляра – потенциальной завихренности Эртеля [8]

$$(2\Omega \sin \varphi + (\text{rot} \mathbf{V})_z) \frac{\nabla \rho}{\rho} = \Pi \quad (2.1)$$

при сделанных предположениях получаем

$$2\Omega \sin \varphi + 2\omega = C, \quad 2\omega = (\text{rot} \mathbf{V})_z, \quad C = \Pi / [(dp/dz)\rho_i^{-1}] \quad (2.2)$$

Здесь  $\Pi, C$  – постоянные величины.

Определим значение  $C$  для линзы "Мезополигон-85" по измерениям на широте ее обнаружения  $\varphi \cong 20^\circ$  с.ш., ( $\sin \varphi \cong 0.34$ ). Угловая скорость собственного вращения  $\omega \cong -0.2\Omega$ . Из (2.2) следует, что  $C \cong 2\Omega(\sin \varphi - 0.1) \cong 0.28 \Omega$ . В рассматриваемой механической модели линзы собственное вращение линзы – один из основных отличительных признаков явления. При отсутствии вращения существование динамической равновесной формы невозможно. Из (2.2) следует, что широта  $\varphi_d$ , на которой  $\omega = 0$ , соответствует  $\sin \varphi_d \cong 0.14$  и равна  $\varphi_d \cong 8^\circ$ . Южнее этой широты линза "Мезополигон-85" существовать не может. Эта грубая оценка дает нижнюю границу продвижения по траектории к югу для линзы "Мезополигон-85". В реальности гибель линзы произойдет, по-видимому, севернее. По этой причине как линзы в океане, так и атмосферные антициклоны не наблюдаются в районе экватора.

Второй отличительный признак линзы, заложенный в механическую модель явления, есть отличие ее плотности от плотности фона. Допустим, что движение линзы по траектории происходит настолько медленно, что в каждый момент времени она имеет равновесную форму, т.е. движение происходит квазистатически. Изменение равновесной формы при  $\omega \rightarrow 0$  проследим, сделав предположение о сохранении объема  $V_l$ , который для эллипсоида вращения выражается через полуоси  $V_l = 4/3 \pi a^2 c$ .

Это соотношение и выражения (1.14) позволяют выразить полуоси эллипсоида через параметры  $V_l, N, \Omega, \varphi$  и  $\omega$

$$a^2 = \alpha_1 \omega^{-1/3}, \quad \alpha_1 = 0.5 \left[ \left( \frac{3V_l N}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{\Omega \sin \varphi} \right]^{1/3}$$

$$c^2 = \alpha_2 \omega^{2/3}, \quad \alpha_2 = \alpha_1 2\Omega \sin \varphi N^{-2}$$

Отсюда при  $\omega \rightarrow 0$  следует  $a \sim \alpha_1 \omega^{-1/6} \rightarrow \infty, c \sim \alpha_2 \omega^{1/3} \rightarrow 0, (a/c) \rightarrow \infty$ , т.е. эллипсоид вырождается в бесконечно тонкую невращающуюся прослойку при конечных значениях широты. Угол  $\alpha$  наклона главных осей в соответствии с (1.13) стремится к нулю, т.е. прослойка располагается на той горизонтальной изопикнической поверхности, где  $\rho_f = \rho_l$ . Таким образом, когда линза приближается к предельной широте, оба отличительных признака линзы – собственное вращение и отличие плотности от фоновой – исчезают. С механической точки зрения, интрузия становится неотличимой от фона.

**Заключение.** Существует замкнутая динамически равновесная форма антициклонически вращающейся однородной по плотности массы жидкости (линзы) в покоящемся относительно Земли стратифицированном океане. При учете полного вектора вращения Земли движение жидкости в линзе отличается от твердотельного вращения и неосесимметрично. Для линейной стратификации океана в окрестности залегания линзы эта динамически равновесная форма есть трехосный эллипсоид, близкий к эллипсоиду вращения, главные оси которого, расположенные в плоскости меридиана, наклонены к горизонту на малый угол. При этом необходимый для прецессии вместе с Землей в абсолютном пространстве линзы-гироскопа момент создается гидростатическими силами, возникающими только в стратифицированном океане. В однородном по плотности окружающем фоне такого момента сил не существует. Это объясняет полученные в натуральных измерениях данные о существовании линз только в слое океанического пикноклина и их отсутствие ниже пикноклина, где плотность практически не меняется с глубиной.

Показано, что есть предельная широта существования равновесной формы линзы, зависящая от ее параметров. Это объясняет отсутствие линз вблизи экватора.

При стремлении собственного вращения линзы к нулю динамически равновесная форма вырождается в бесконечно тонкую плену на изопикне, где плотности фона и линзы совпадают.

Проведенные количественные оценки совпадают с результатами натуральных измерений.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 01-01-00165).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Берестов А.П., Егорихин В.Д., Иванов Ю.А., Корт В.Г., Кошляков М.Н., Лукашев Ю.Ф., Монин А.С., Морозов Е.Г., Морозкин К.В., Овчинников И.М., Пака В.Т., Цыбанева Т.Б., Шадрин И.Ф., Шаповалов С.М., Щербинин А.Д., Яремчук М.И. Термохалинные, гидрохимические и динамические характеристики интрузионной линзы средиземноморских вод по данным экспедиции "Мезополигон-85" в тропической Атлантике // Внутритермоклинные вих-

- ри в океане: Сб. статей / Под ред. К.Н. Федорова. М.: Изд. ин-та океанологии им. П.П. Ширшова АН СССР, 1986. С. 35–49.
2. Иванов Ю.А., Корт В.Г., Шаповалов С.М., Щербинин А.Д. Мезомасштабная интрузионная линза // Гидрофизические исследования по программе “Мезополигон”: Сб. науч. трудов / Отв. ред. Корт В.Г. М.: Наука, 1988. С. 41–46.
  3. Armi L., Hebert D., Oakey N., Price J.F., Richardson P., Rossby T., Ruddick B. Two years in the life of a Mediterranean salt Lens // J. Phys. Oceanogr., 1989. V. 19. № 3. P. 354–370.
  4. Richardson P.L., Walsh D., Armi L., Schröder M., Price J.F. Tracking three meddies with SOFAR floats // J. Phys. Oceanogr. 1989. V. 19. № 3. P. 371–383.
  5. Лавровский Э.К., Семёнова И.П., Слёзкин Л.Н., Фоминых В.В. Средиземноморские линзы – жидкие гироскопы в океане // Докл. АН. 2000. Т. 375. № 1. С. 42–45.
  6. Белкин И.М., Емельянов М.В., Костяной А.Г., Федоров К.Н. Термохалинная структура промежуточных вод океана и внутритермоклинные вихри в океане // Внутритермоклинные вихри в океане: Сб. статей / Под ред. К.Н. Федорова. М.: Изд. ин-та океанологии АН СССР, 1986. С. 8–34.
  7. Белкин И.М., Костяной А.Г. Линзы средиземноморских вод в северной Атлантике // Гидрофизические исследования по программе “Мезополигон”: Сб. науч. трудов / Отв. ред. Корт В.Г. М.: Наука, 1988. С. 110–123.
  8. Монин А.С. Теоретические основы геофизической гидродинамики, Л.: Гидрометеоздат, 1988. 424 с.

Москва  
E-mail: ipse@imec.msu.ru

Поступила в редакцию  
3.XII.2002