

УДК 532.595 + 612.13

© 2003 г. Н. Н. КИЗИЛОВА

## ОТРАЖЕНИЕ ПУЛЬСОВЫХ ВОЛН И РЕЗОНАНСНЫЕ СВОЙСТВА АРТЕРИАЛЬНЫХ РУСЕЛ

Исследуется задача об осесимметричном волновом течении вязкой несжимаемой жидкости в системе, состоящей из длинной тонкой деформируемой трубки и терминального элемента, который определяет условия отражения волн на конце трубки. Получено выражение для входной проводимости системы и исследована зависимость проводимости от параметров системы. Определены резонансные частоты, на которых амплитуда проводимости имеет экстремумы, и показано, что на резонансных частотах изменения проводимости при вариациях параметров терминального элемента максимальны. Исследована зависимость резонансной частоты от длины трубки. Обсуждаются возможные применения полученных результатов для гидромеханической интерпретации новой методики пульсовой диагностики.

*Ключевые слова:* волны в упругих трубах, входная проводимость, пульсовая диагностика, спектральный анализ.

Особенности распространения и отражения волн давления в заполненных жидкостью растяжимых трубках исследовались в гидромеханике, в том числе в связи с возможностями пульсовой диагностики. Согласно канонам восточной медицины, состояние 10–12 внутренних органов может быть определено по характеристикам пульса лучевой артерии в области запястья. Один из новых подходов основан на наличии у сосудистых систем внутренних органов резонансных гармоник, различных для разных органов. Амплитуды этих гармоник значительно меняются при патологических изменениях состояния органа, в то время как амплитуды остальных гармоник меняются незначительно [1–6]. Новая методика позволяет проводить диагностику, основываясь на спектральных характеристиках давления, регистрируемого сфигмоманометром на произвольной, удобной для измерения, периферической артерии. Наличие резонансных частот и механизмы изменения их амплитуд при патологиях остаются пока малоизученными с точки зрения гидромеханики, в то время как сама методика используется в клинической практике [3, 5, 6].

Ниже на основе модели волнового течения несжимаемой вязкой жидкости в системе, состоящей из деформируемой трубки с терминальным сопротивлением, исследуются резонансные свойства системы и влияние ее параметров на характеристики отраженной волны.

**1. Резонансные свойства артериальных русел.** Экспериментальные исследования пульса показали, что при состояниях, классифицируемых в восточной медицине синдромами избытка (недостатка), амплитуды соответствующих резонансных гармоник давления оказываются выше (ниже) нормальных значений на 30–40% в зависимости от степени выраженности синдрома [1–4]. В ходе клинических исследований выявлены резонансные гармоники для ряда внутренних органов [3, 4] и изучено влияние терапевтических воздействий на спектральные характеристики пульса лучевой артерии человека [5, 6]. Наличие резонансных гармоник подтверждается при измерениях *in vivo* с помощью микроманометра [2, 4] и на модели системы кровообращения в виде податливой трубки с системой упругих камер [1, 7].

Для описания свойств артериального русла в гидромеханике кровообращения используется входная проводимость  $Y_{in}$ , которая определяется как отношение амплитуд потока  $Q$  и давления  $P$  на входе в подводящую артерию  $Y_{in} = Q/P$ . В основе резонансных свойств сосудистых русел органов могут лежать закономерности отражения волн в артериальном дереве с определенной геометрией. Входная проводимость русла зависит от частоты  $\omega$  гармоники и может быть как больше, так и меньше проводимости подводящей артерии [8–10]. Экспериментальные измерения *in vivo* показали, что резонансные гармоники соответствуют экстремумам проводимости  $Y_{in}(\omega)$  [4]. Поскольку внутренние органы включены в общую систему кровообращения, связанное с патологией изменение проводимости сосудистого русла органа будет менять параметры отраженной им пульсовой волны и, следовательно, спектральные характеристики давления в используемой для диагностики периферической артерии.

Параметры пульсовой волны на входе в артериальное русло органа определяются характеристиками сердца, аорты и условиями отражения волн в системе аорта – внутренние органы. В рассматриваемой задаче эти параметры считаются заданными, а исследуются особенности отражения волн в артериальном русле органа и спектральные свойства входной проводимости.

**2. Отражение волн в системе трубка–терминальное сопротивление.** В качестве простейшей модели артериального русла органа рассмотрим последовательное соединение тонкой длинной упругой трубки кругового сечения с невозмущенной площадью  $S_0$  и длиной  $L$ , где  $\sqrt{S_0}/L \ll 1$  с терминальным элементом, имеющим проводимость  $Y_t$ . Будем считать, что рассматриваемая система включена в качестве отдельного составного элемента в общую модель артериального русла, так что на входе в трубку задано давление  $p_{in}(t) = P e^{i\omega t}$ , где  $\omega = 2\pi f$ ,  $f$  – частота волны, а во входном сечении трубки проводится регистрация давления и объемного расхода.

Рассмотрим осесимметричное течение однородной несжимаемой вязкой жидкости с плотностью  $\rho$ . Используем уравнения движения в квазиодномерном приближении в предположении малой податливости трубки  $\lambda$  [11 – 13]

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(SU) = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{8\pi\nu}{S}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (2.2)$$

$$s = \lambda(p - p_0) + S_0 \quad (2.3)$$

с начальными условиями и условиями непрерывности давления и расхода на конце трубки

$$x = 0: \quad p = p_{in}(t), \quad x = L: \quad p = Q_t(t)/Y_t, \quad Q = Q_t(t) \quad (2.4)$$

где  $x$  – продольная координата, отсчитываемая от входного сечения трубки,  $S(t, x)$  – площадь сечения,  $U(t, x)$  – осредненная по сечению продольная скорость,  $p(t, x)$  – давление,  $p_0$  и  $S_0$  – невозмущенные давление и площадь сечения,  $\nu$  – кинематическая вязкость жидкости,  $Q = US$ ,  $Q_t(t)$  – расход во входном сечении терминального элемента.

Линеаризованная около состояния покоя система (2.1)–(2.3) описывает распространение малых возмущений со скоростью  $c$  вверх и вниз по течению (проходящая и отраженная волны)

$$c = c_0 \sqrt{\frac{2}{\sqrt{\xi^2 + 1} + 1}}, \quad \xi = \frac{8\pi\nu}{\omega S_0}, \quad c_0 = \sqrt{\frac{S_0}{\rho\lambda}}$$

где  $c_0$  – скорость распространения возмущений в идеальной жидкости. Решение (2.1)–(2.4) будем искать в виде

$$p(t, x) = p_0 + p^* e^{i\omega t} e^{-\gamma x}, \quad U(t, x) = U^* e^{i\omega t} e^{-\gamma x} \quad (2.5)$$

Подставив (2.5) в линеаризованные уравнения (2.1)–(2.2), получим

$$\gamma = \frac{\omega}{c_0} \sqrt{i\xi - 1}, \quad \alpha = \operatorname{Re}(\gamma) = \frac{\omega}{c_0} \sqrt{\frac{1 + \xi^2 - 1}{2}}$$

При этом  $\alpha$  определяет затухание волн, а  $\operatorname{Im}(\gamma) = \omega/c = k$  – волновое число. Обозначив амплитуды проходящей и отраженной волн  $p_f$  и  $p_b$  соответственно, для малых возмущений давления и расхода получим решение в виде суперпозиции (здесь и далее верхний индекс, соответствующий возмущенным переменным, опускается)

$$p(t, x) = p_f e^{i\omega t} (e^{-\gamma x} + \Gamma e^{\gamma(x-2L)}), \quad \Gamma = \frac{p_b}{p_f} \quad (2.6)$$

$$Q(t, x) = Y p_f e^{i\omega t} (e^{-\gamma x} - \Gamma e^{\gamma(x-2L)}), \quad Y = \frac{S_0}{\rho c_0}$$

где  $Y$  – характеристическая проводимость трубки (проводимость при отсутствии отраженных волн [11]),  $\Gamma$  – коэффициент отражения в месте соединения трубки с терминальным элементом. При  $x = L$  из (2.6) имеем

$$p(t, L) = p_f e^{i\omega t - \gamma L} (1 + \Gamma), \quad Q(t, L) = Y p_f e^{i\omega t - \gamma L} (1 - \Gamma) \quad (2.7)$$

Используя (2.4), из (2.7) получим  $\Gamma = (Y - Y_t)/(Y + Y_t)$ . Теперь, вводя входную проводимость системы  $Y_{in} = Q(t, 0)/p(t, 0)$ , из (2.6) имеем

$$Y_{in} = Y \frac{Z + i \operatorname{tg}(kL)}{1 + i Z \operatorname{tg}(kL)}, \quad Z = \frac{Y \operatorname{th}(\alpha L) + Y_t}{Y + Y_t \operatorname{th}(\alpha L)} \quad (2.8)$$

Величина  $Y_{in}$  определяет параметры волны, отраженной системой. В случае если  $kL \ll 1$ , а также если  $kL = \pi n$ , где  $n \in N$ , из (2.8) следует  $Y_{in} = YZ$ . При  $\alpha L \rightarrow 0$  из (2.8) получим  $Y_{in} = Y_t$ . В общем случае  $Y_t = Y_1 + iY_2$ , где  $Y_1$  – действительная часть проводимости терминального элемента, а величина  $Y_2$  связана с его податливостью и определяет изменение фазы волны при отражении в сечении  $x = L$  [11]. Если  $Y_2 = 0$ , то  $\operatorname{Im}(\Gamma) = 0$  и отраженная волна совпадает с проходящей по фазе. При  $\operatorname{Re}(\Gamma) = 1$  происходит отражение от закрытого ( $Y_t = 0$ ) конца трубки, а при  $\operatorname{Re}(\Gamma) = 0$  отраженная волна отсутствует. В этом случае входная проводимость трубки совпадает с характеристической:  $Y_{in} = Y = Y_t$ . Представляя входную проводимость в виде  $Y_{in} = Y_0 e^{i\psi}$ , для параметров  $y_0 = Y_0/Y$  и  $\psi$  из (2.8) получим

$$y_0 = \left( \frac{Z_1^2 + Z_2^2 + 2Z_2\varphi + \varphi^2}{1 + 2Z_2\varphi + (Z_1^2 + Z_2^2)\varphi^2} \right)^{1/2} \quad (2.9)$$

$$\psi = \operatorname{arctg} \left( \frac{Z_2(1 - \varphi^2) + (1 - Z_1^2 - Z_2^2)\varphi}{Z_1(1 + \varphi^2)} \right) \quad (2.10)$$

$$Z_1 = \frac{(1 + y_1^2 + y_2^2)\tau + y_1(1 + \tau^2)}{1 + 2y_1\tau + (y_1^2 + y_2^2)\tau^2}, \quad Z_2 = \frac{y_2(1 - \tau^2)}{1 + 2y_1\tau + (y_1^2 + y_2^2)\tau^2}$$

$$\varphi = \operatorname{tg}(kL), \quad \tau = \operatorname{th}(\alpha L), \quad y_1 = Y_1/Y, \quad y_2 = Y_2/Y$$

**3. Исследование свойств входной проводимости системы.** Функции  $y_0(\varphi, \tau)$  и  $\psi(\varphi, \tau)$  при заданных ненулевых  $y_1$  и  $y_2$  непрерывны и ограничены, имеют предельные значения

$$y_0(0, 0) = (y_1^2 + y_2^2)^{1/2}, \quad y_0(\pm\infty, \pm\infty) = (y_1^2 + y_2^2)^{-1/2}$$

$$\psi(0, 0) = \psi(\pm\infty, \pm\infty) = \arctg(y_2/y_1)$$

Из (2.9) следует, что входная проводимость рассматриваемой системы больше характеристической проводимости трубки ( $y_0 > 1$ ), если выполняются условия  $Y_1^2 + Y_2^2 > Y^2$ ,  $|\varphi| < 1$ ; или  $Y_1^2 + Y_2^2 < Y^2$ ,  $|\varphi| > 1$ . В противном случае  $y_0 < 1$ . При определенном соотношении между  $Y, Y_1, Y_2$  входная проводимость системы  $Y_{in}$  для некоторых гармоник становится больше или меньше характеристической проводимости трубки. При этом значения частот соответствующих гармоник определяются из условий  $|\varphi| > 1$  и  $|\varphi| < 1$ . В частном случае при  $\xi = 0, Y_2 = 0, kL = \pi/2$  и при  $Y_1 = 0$  эти особенности исследовались в [11]. При  $\tau \rightarrow 0$  в (2.9)–(2.10) имеем  $Z_1 = y_1, Z_2 = y_2$ .

Если выполняются условия  $kL \ll 1$  или  $kL \sim \pi$ , то (2.9)–(2.10) вырождаются в соотношения  $y_0 = (Z_1^2 + Z_2^2)^{1/2}, \psi = \arctg(Z_2/Z_1)$ , а трубка при этом передает падающую волну к терминальному элементу без изменения фазы (при  $kL \sim 0$ ) или с фазой, измененной на  $\pi$  (при  $kL \sim \pi$ ) и ее длина не влияет на параметры отраженной волны.

В случае  $y_1 = 1, y_2 = 0$ , когда проводимости трубки и терминального элемента согласованы и отсутствует отраженная волна,  $Z_1 = 1, Z_2 = 0$  и  $y_0 = 1, \psi = 0$ . Соответственно при  $Y_t = 0$  (отражение от закрытого конца трубки), из (2.9)–(2.10) получим

$$y_0 = \left( \frac{\tau^2 + \varphi^2}{1 + \tau^2 \varphi^2} \right)^{1/2}, \quad \text{tg}(\psi) = \frac{(1 - \tau^2)\varphi}{(1 + \varphi^2)\tau}$$

Поскольку  $\tau < 1$ , амплитуда проводимости  $y_0$  увеличивается с ростом  $\alpha L$ , если  $0 < |\varphi| < 1$ , и убывает, если  $|\varphi| > 1$ . Соответственно  $\psi$  монотонно убывает с ростом  $\alpha L$  и  $\psi > 0$  при  $\varphi > 0$ . В предельном случае  $\xi = 0$  из (2.9)–(2.10) получим, аналогично [11],  $y_0 = \varphi, \psi = \pm\pi/2$ .

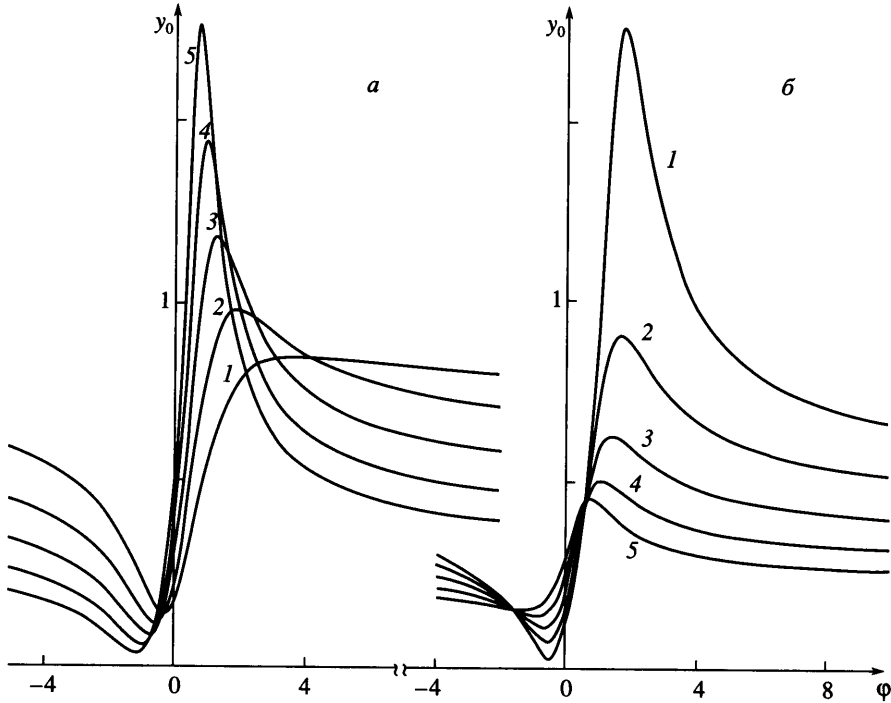
Исследуем резонансные по [1–6] значения  $\omega$ , на которых  $y_0(\omega)$  достигает экстремума. Условие  $(y_0)'_{\omega} = 0$  приводит к трансцендентному уравнению для  $\omega$ , которое может быть решено численными методами для конкретных наборов параметров  $y_{1,2}, L, c_0, \xi$ .

Рассмотрим случай  $\xi < 1$ . Поскольку  $\xi = \xi_0/f, \xi_0 = 4v/S_0$ , этот случай соответствует высокочастотным гармоникам пульсовой волны, причем если для некоторой гармоники с частотой  $f_0$  условие  $\xi_0 < 1$  выполняется, то оно будет выполнено для всех  $f > f_0$ . Оценки области применимости рассматриваемого случая приведены в п. 4. Раскладывая  $\alpha(\xi)$  в ряд, получим

$$\tau = \text{th} \left( \frac{\pi L \xi_0}{c_0} \left( 1 - \frac{\xi^2}{4} + O(\xi^4) \right) \right)$$

Пренебрегая слагаемыми порядка  $\xi^2$ , положим  $\tau \approx \text{th}(\pi L \xi_0 / c_0) \equiv \tau_0$ . Рассмотрим теперь функции  $y_0(\varphi, \tau_0)$  и  $\psi(\varphi, \tau_0)$ . Условие  $(y_0)'_{\varphi} = 0$  дает квадратное уравнение для  $\varphi$

$$Z_2(\tau_0)(\varphi^2 - 1) + (Z_1^2(\tau_0) + Z_2^2(\tau_0) - 1)\varphi = 0$$



Фиг. 1 Семейства кривых  $y_0(\varphi)$  для  $y_1 = 0.5, y_2 = 0.2; 0.4; 0.6; 0.8; 1$  (а) и  $y_1 = 0.2; 0.4; 0.6; 0.8; 1, y_2 = 0.5$  (б)

решение которого суть

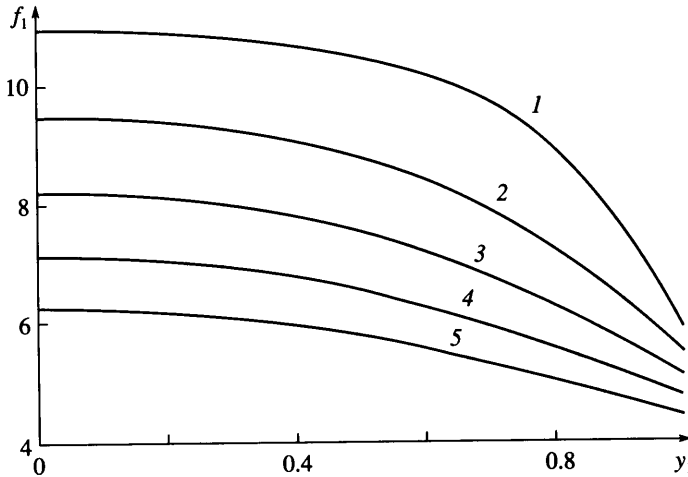
$$\varphi_{1,2} = \frac{1 - Z_1^2(\tau_0) - Z_2^2(\tau_0) \pm \sqrt{\Theta}}{2Z_2(\tau_0)} \tag{3.1}$$

$$\Theta = (Z_1^2(\tau_0) + Z_2^2(\tau_0))^2 + 1 - 2Z_1^2(\tau_0) + 2Z_2^2(\tau_0)$$

Здесь  $\varphi_1 > 0$  определяет максимум, а  $\varphi_2 < 0$  – минимум функции  $y_0(\varphi, \tau_0)$ . В качестве иллюстрации на фиг. 1 представлены семейства кривых  $y_0(\varphi, \tau_0)$  для ряда значений  $y_{1,2}$ . При фиксированном  $y_1$  значение  $y_0$  в точке максимума возрастает, а в точке минимума убывает с ростом  $y_2$ . При фиксированном  $y_2$  те же закономерности проявляются при уменьшении  $y_1$ . Для чисто резистивного терминального элемента ( $y_2 = 0$ ) в случае идеальной жидкости ( $\xi_0 = 1$ ) эти особенности исследовались в [11].

Функции  $y_0(\omega)$  и  $\psi(\omega)$  периодические, поэтому в амплитудном и фазовом спектрах будут чередоваться локальные максимумы и минимумы, соответствующие резонансным частотам. Из условия  $\text{tg}(\omega L/c(\omega)) = \varphi_{1,2}$  можно определить частоты  $\omega_{1,2}$ , которые являются для трубки длины  $L$  резонансными в том смысле, что амплитуды соответствующих гармоник максимальны (минимальны) среди амплитуд всех гармоник отраженной волны. Разрешая это условие относительно  $\omega$ , получим

$$\omega_{1,2} = \frac{2c_0^2 \arctg^2(\varphi_{1,2})}{L\sqrt{\xi_0^2 L^2 + 4c_0^2 \arctg^2(\varphi_{1,2})}}$$



Фиг. 2. Семейства кривых  $f_1(y_1)$ , кривые 1–5 соответствуют значениям  $y_2 = 0.2; 0.4; 0.6; 0.8; 1$

На фиг. 2 представлены семейства кривых  $f_1(y_1) = \omega_1/(2\pi)$  при фиксированных значениях  $y_2$  для  $L = 10$  см. Соответствующие зависимости  $f_2(y_1) = \omega_2/(2\pi)$  получаются из приведенных на фиг. 2 параллельным переносом  $k_2 = k_1 + \arctg(Z_2(\tau_0)\sqrt{\Theta}/(Z_1^2(\tau_0) + Z_2^2(\tau_0)))/L$ . Сходный вид имеют зависимости  $f_{1,2}(y_2)$  при фиксированных значениях  $y_1$ . Таким образом, при изменении  $0 \leq y_{1,2} \leq 1$  все изменения резонансных частот  $f_{1,2}$  лежат в пределах одной гармоники (на рис. 2 это гармоника  $n = 4$  для случая  $f_1 = 1$  Гц).

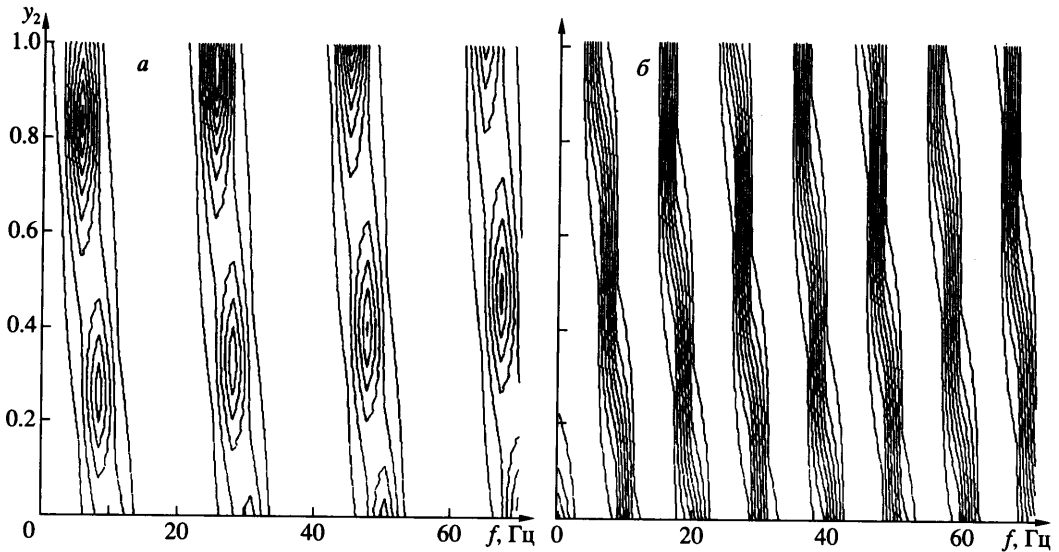
Линии уровня функций  $y_0(y_2, f)$  и  $\psi(y_2, f)$  при фиксированных  $y_1$  приведены на фиг. 3. Области сгущения линий соответствуют максимумам  $y_0$  (фиг. 3, а) и нулям  $\psi$  (фиг. 3, б), а разрежения – минимумам  $y_0$  (фиг. 3, а) и экстремумам  $\psi$  (фиг. 3, б). Из фиг. 3, а видно, что области максимумов  $y_0$  соответствуют узким диапазонам в окрестности резонансных частот. Общую оценку изменения резонансных частот при вариациях  $y_1, y_2$  можно провести, определяя диапазон частот  $[f - f_1, f + f_1]$ , для которого изменения  $y_0(f)$  не превышают  $\beta y_0(f_1)$ , где  $0 < \beta < 1$ . Крайние значения частот этого диапазона определим из условия  $y_0(\varphi(f)) = \beta y_0(\varphi(f_1))$ , которое с учетом (2.10) приведет к квадратному уравнению для  $\varphi(f)$

$$(1 - (y_1^2 + y_2^2)\beta_0^2)\varphi^2(f) + 2y_2(1 + \beta_0^2)\varphi(f) + y_1^2 + y_2^2 - \beta_0^2 = 0$$

$$\beta_0 = \beta y_0(\varphi(f_1))$$

Находя положительный корень  $\varphi_+$ , получим общую оценку изменения резонансной частоты  $f \in [f_1 - \delta, f_1 + \delta]$ , где  $\delta = \arctg(\varphi_+)c/(2\pi Lf_1) - 1$ .

**4. Численные расчеты и обсуждение результатов.** Если  $L$  – длина подводящей артерии органа, а  $Y_t$  – проводимость сосудистого русла, расположенного вниз по течению, то с учетом различий размеров тела и индивидуальных особенностей строения русла величина  $L$  может варьировать в широком диапазоне значений:  $2 \leq L \leq 20$  см [14, 15]. Скорость пульсовой волны для артерий эластического и мышечного типов в норме и при патологическом или возрастном снижении податливости сосудистой стенки  $500 \leq c_0 \leq 2500$  см/с. Для остальных параметров модели примем  $3.8 \cdot 10^{-2} < n < 5.7 \cdot 10^{-2}$  см<sup>2</sup>/с,  $0.2 < r < 0.5$  см



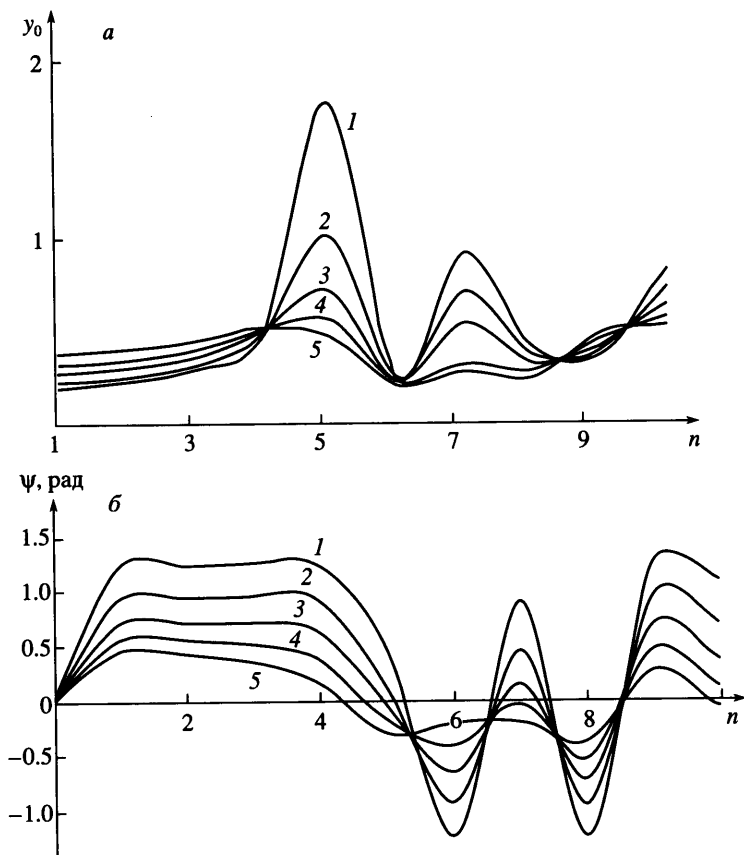
Фиг. 3. Линии уровня функций  $y_0(y_2, f)$  (а) и  $\psi(y_2, f)$  (б) при  $y_1 = 0.5$ ,  $c_0 = 10^3$  см/с,  $L = 20$  см

[11, 13], где  $r = \sqrt{S_0/\pi}$ . Проводя оценки, получим  $\xi_0 \leq 0.807$ , поэтому для  $f_0 = 1-1.25$  Гц, что соответствует пульсу человека в состоянии покоя, рассмотренное выше приближение  $\xi < 1$  верно для всех гармоник. Условие  $\xi < 1$  не выполняется для сосудов с достаточно малым радиусом, но в этом случае в силу эффекта Фареуса–Линдквиста  $\mu = \mu(r)$  и рассматриваемая здесь модель должна быть дополнена и исследована отдельно.

Численное исследование зависимости  $\delta(y_1, y_2, c, L, \beta)$  при вариации параметров  $0 \leq y_{1,2} \leq 1$ ,  $y_0(t_2)/y_0(t_1) \leq \beta \leq 1$  показало, что  $\delta \in [0, 3.3]\%$ . Таким образом, в широком диапазоне изменения параметров модели соответствующие изменения резонансной частоты сосредоточены в узкой окрестности одной гармоники. В применении к анализу спектра пульса периферической артерии это означает, что все патологические изменения проводимости терминального русла будут приводить к изменению амплитуды проводимости системы в окрестности резонансной гармоники в соответствии с результатами [1–6].

В качестве иллюстрации зависимости амплитуды  $y_0(n)$  и фазы  $\psi(n)$  от номера гармоники  $n = 1-10$  приведены на фиг. 4. Диапазон гармоник  $n = 1-10$  доступен для спектрального анализа при регистрации пульса лучевой артерии с помощью манжеточного датчика [1–6]. Для приведенного случая максимальные изменения амплитуды проводимости наблюдаются в области гармоник  $n = 4$  и  $n = 7$ , а соответствующие фазы равны нулю. При анализе дискретного спектра малые изменения величины резонансной гармоники в окрестности соответствующей фурье-компоненты при малых отклонениях  $y_{1,2}$  могут оказаться незаметными, в то время как изменения фазы вблизи резонансной гармоники более заметны, поскольку связаны с изменением ее знака и поэтому предпочтительны при анализе спектра пульса [4–6].

Оценки значений  $kL = 2\pi Lf/c$  при указанных изменениях параметров дают  $0.01f \leq kL \leq 0.2f$ . Следовательно, в области низких частот ( $n = 1-2$  при  $f_0 = 1$  Гц) в соответствии с (2.8) имеем  $Y_{in} \sim Y_t$ . Если  $kL \in ]\pi(1/2 + m); \pi(1 + m)[$ , то  $t < 0$ , а если  $kL \in ]\pi m; \pi(1/2 + m)[$ , то  $t > 0$  (фиг. 1). Следовательно, для любых  $L$  существует ряд частот, на которых  $y_0$  достигает экстремума; при этом изменения  $y_0$  при вариациях  $y_{1,2}$  максимальны, а фазы



Фиг. 4. Зависимость  $y_0(n)$  (а) и  $\psi(n)$  (б) от номера гармоники  $n = 1-10$  для  $L = 10$  см,  $c_0 = 1500$  см/с,  $y_2 = 1$ ,  $\nu_0 = 1$  Гц. Кривые 1-5 соответствуют значениям  $y_1 = 0.2; 0.4; 0.6; 0.8; 1$

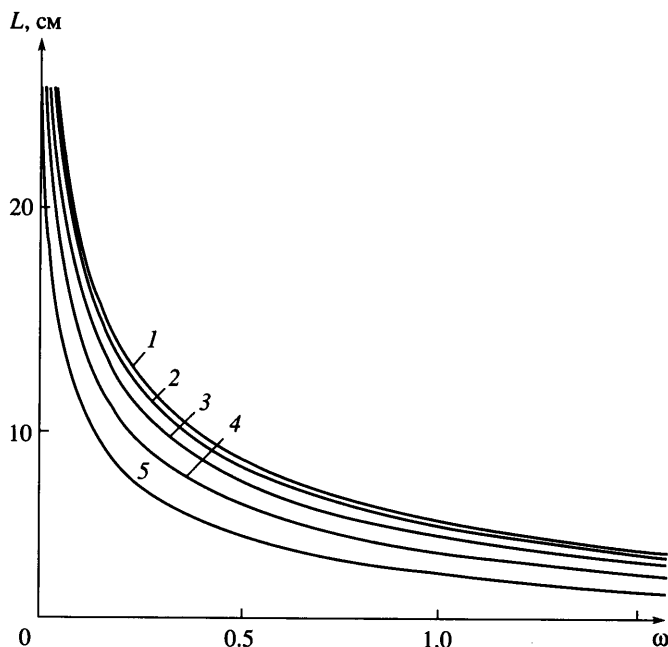
отраженной и падающей волн совпадают. На каждом из отрезков, соответствующих значениям  $m = 0, 1, \dots$ , существует одна пара значений  $t_{1,2}$ , которая определяет резонансные частоты  $\omega$  из уравнения

$$\omega L = \text{arctg}(\varphi_{1,2}(y_1, y_2))c(\omega) \quad (4.1)$$

Результаты расчетов  $L(\omega)$  приведены на фиг. 5. Все зависимости имеют вид  $\omega \sim L^{-2}$ , что соответствует результатам экспериментов [1, 7].

В соответствии с клиническими данными [2-6] основные резонансные частоты сосудистых систем внутренних органов человека соответствуют последовательным гармоникам спектра в следующем порядке: печень ( $n = 1$ ), почки (2), селезенка (3), легкие (4), желудок (5), желчный (6) и мочевой пузырь (7). Постоянная составляющая давления ( $n = 0$ ) ставится в соответствие сердцу, после чего состояние всех основных внутренних органов, которые традиционно рассматриваются в восточной медицине, можно диагностировать по изменению амплитуды соответствующей гармоники. Этот подход является эмпирическим и требует дополнительных детальных оценок с использованием морфометрических данных русел разных органов. Монотонное увеличение частоты основной гармоники  $f_0$  в перечисленном выше ряду органов при наличии зависимости  $f(L)$



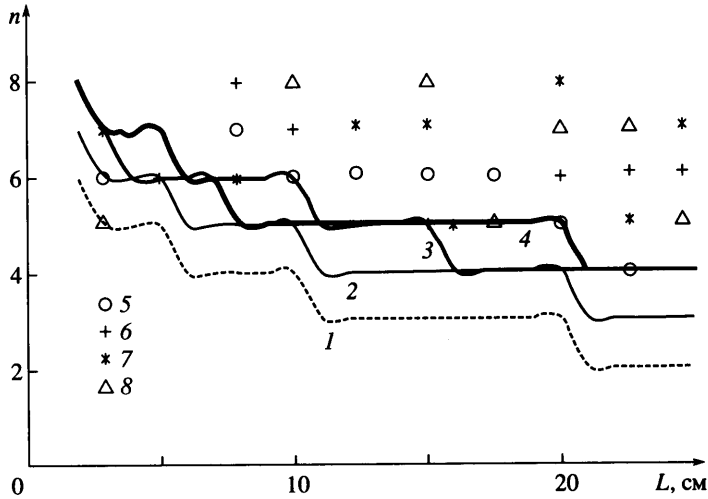


Фиг. 5. Зависимость  $L(\omega)$ , кривые 1–5 соответствуют значениям  $y_1 = 0.2; 0.4; 0.6; 0.8; 1$ ,  $y_2 = 0.5$

означает, что значения  $L$  соответствующего органа должны монотонно убывать в направлении печень  $\rightarrow$  мочевой пузырь. При морфометрических исследованиях сосудистых русел органов подобные закономерности пока не отмечались. Хотя они могли бы иметь место, например, в случае геометрического или аллометрического подобия русел разных органов, но в силу вариаций индивидуальных параметров русел [15] строгая упорядоченность между значениями  $L$  разных внутренних органов представляется идеализированной.

Используя (2.9), (2.10), (3.1), оценим влияние  $L$  на резонансные характеристики модели. В соответствии с принятым в [2–6] подходом резонансная гармоника при  $m = 0$  считается основной (I), а следующая, для  $m = 1$ , — дополнительной (II). Результаты расчетов приведены на фиг. 6. Линиями обозначены значения основных (I) гармоник, а значками — соответствующие дополнительные (II) гармоники. Вариации  $y_{1,2} \in [0, 1]$  вызывают изменения амплитуды одних и тех же основной (I) и дополнительной (II) гармоник. По мере увеличения  $L$  основная гармоника уменьшается, оставаясь постоянной на интервалах длиной  $\delta L \sim 3\text{--}8$  см. Однако диапазон индивидуальных изменений длины подводящей артерии может быть существенно больше. Например, для легочного дерева человека  $L = 10\text{--}25$  см [14], что дает разброс в три гармоники при различных значениях  $c_0$ . Дополнительные гармоники всюду лежат в высокочастотной области спектра, что согласуется с данными [2–6].

Увеличение  $c_0$  с 500 до 2000 см/с приводит к сдвигу соответствующих резонансных частот на одну–две гармоники в высокочастотную область. Изменения  $c_0$  могут быть связаны со снижением податливости сосудистой стенки в результате развития атеросклероза, гипертонической болезни и других процессов с большими характерными временами. Кратковременные значительные изменения резонансной картины вызываются сложными перераспределениями кровотока, например, после приема пищи [16].



Фиг. 6. Зависимость номера резонансной гармоники  $n$  от длины  $L$  трубки. Цифрами 1–4 обозначены основные, а 5–8 – дополнительные гармоники для  $c_0 = 500; 1000; 1500; 2000 \text{ см/с}$  соответственно

**Заключение.** Модель сосудистого русла в виде трубки с терминальным элементом обнаруживает избирательные по отношению к разным гармоникам падающей волны свойства. Для одних гармоник проводимость русла максимальна и любые изменения свойств терминального элемента вызывают значительные изменения амплитуды этой гармоники, которая при этом может считаться резонансной. Поскольку русло конкретного органа включено в общую систему кровообращения, это означает, что вклад амплитуды резонансной гармоники в отраженную волну будет минимальным. Отражение волн в сосудистой системе происходит на каждом ветвлении, в том числе и на ответвлениях подводящих артерий всех внутренних органов. В результате различий резонансных гармоник артериальных систем разных органов изменения состояния отдельного органа могут быть выделены в спектре пульса произвольной удобной для измерений периферической артерии, что делает возможной пульсовую диагностику по предложенной в [1–6] методике.

Ценные для клинической практики выводы и рекомендации могут быть сделаны по представленной модели при наличии данных о количественных изменениях действительной и мнимой частей проводимости терминального русла при различных патологиях. Недостаточно ясным остается пока вопрос о диагностике сочетанных патологий, когда основная резонансная для одного органа гармоника является дополнительной резонансной для другого, причем соответствующие изменения, связанные с патологией обоих органов, разнонаправлены.

Автор выражает глубокую признательность С.А. Региреру за внимание к работе и стимулирующие обсуждения.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wang Y.Y., Chang S.L., Wu Y.E., Hsu T.L., Wang W.K. Resonance. The missing phenomenon in hemodynamics // Circ. Res. 1991. V. 69. № 1. P. 246–249.
2. Yu G.L., Wang Y.L., Wang W.K. Resonance in the kidney system of rats // Amer. J. Physiol. 1994. V. 267. № 4 Pt 2. P. H1544–1548.

3. Lu W.A., Cheng C.H., Lin Wang Y.Y., Wang W.K. Pulse spectrum analysis of hospital patients with possible liver problems // Amer. J. Chin. Med. 1996. V. 24. № 3–4. P. 315–320.
4. Young S.T., Wang W.K., Chang L.S., Kuo T.S. The filter properties of the arterial beds of organs in rats // Acta. Physiol. Scand. 1992. V. 145. № 4. P. 401–406.
5. Wang W.K., Bau J.G., Hsu T.L., Wang Y.Y. Influence of spleen meridian herbs on the harmonic spectrum of the arterial pulse // Amer. J. Chin. Med. 2000. V. 28. № 2. P. 279–289.
6. Wang W.K., Hsu T.L., Wang Y.Y. Liu-wei-dihuang: a study by pulse analysis // Amer. J. Chin. Med. 1998. V. 26. № 1. P. 73–82.
7. Wang Y.Y.L., Lia W.C., Hsiu H., Jan M.-Y., Wang W.K. Effect of length on the fundamental resonance frequency of arterial models having radial dilatation // IEEE Trans. Biomed. Eng. 2000. V. 47. № 3. P. 313–318.
8. Taylor M.G. The input impedance of an assembly of randomly branching elastic tubes // Biophys. Journal. 1966. V. 6. № 1. P. 29–51.
9. Brown D.J. Input impedance and reflection coefficient in fractal-like models of asymmetrically branching compliant tubes // IEEE Trans. Biomed. Eng. 1996. V. 43. № 7. P. 715–722.
10. Zamir M. Mechanics of blood supply to the heart: wave reflection effects in a right coronary artery // Proc. Roy. Soc. London, Ser. B. 1998. V. 265. № 1394. P. 439–444.
11. Milnor W.R. Hemodynamics. Baltimore etc.: Williams and Wilkins, 1989. 419 p.
12. Мусеева И.Н., Пезуфер С.А. Некоторые особенности отражения пульсовых волн в артериях // Изв. РАН. МЖГ. 1993. № 4. С. 134–139.
13. Reuderink P.J., Hoogstraten H.W., Sipkema P., Hillen P., Westerhof N. Linear and nonlinear one-dimensional models of pulse wave transmission at high Womersley numbers // J. Biomech. 1989. V. 22. № 8/9. P. 819–827.
14. Huang W., Yen R.T., McLaurine M., Bledsoe G. Morphometry of the human pulmonary vasculature // J. Appl. Physiol. 1996. V. 81. № 5. P. 2123–2133.
15. Лужа Д. Рентгеновская анатомия сосудистой системы. Будапешт: Acad. Kiado, 1973. 379 с.
16. Wang W.K., Hsu T.L., Chiang Y., Wang Y.Y. The prandial effect on the pulse spectrum // Amer. J. Chin. Med. 1996. V. 24. № 1. С. 93–98.

Харьков  
E-mail: knn@hall.nord.net.ua

Поступила в редакцию  
29.VIII.2002