МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 • 2003

УДК 532.511:532.527

© 2003 г. Г. Я. ДЫННИКОВА

ДВИЖЕНИЕ ВИХРЕЙ В ДВУМЕРНЫХ ТЕЧЕНИЯХ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Рассматривается диффузия и аннигиляция вихрей в осесимметричных и плоских течениях несжимаемой вязкой жидкости. Получена формула, связывающая давление со скоростью движения вихрей в вязкой жидкости.

Ключевые слова. Движение вихрей, диффузия завихренности, аннигиляция вихрей, вязкость, несжимаемая жидкость, метод дискретных вихрей, расчет давления.

Вихревые линии при движении идеальной жидкости связаны с одними и теми же ее частицами, и интенсивности вихревых трубок сохраняются [1]. Это послужило основой для развития вычислительных методов вихрей, рассматривающих совокупности вихревых трубок в лагранжевых координатах. Данная область вычислительной гидродинамики в настоящее время интенсивно развивается (см. обзор [2], монографию [3]).

В вязкой жидкости циркуляция скорости по замкнутому контуру, движущемуся вместе с жидкостью, вообще говоря, не сохраняется, так как помимо конвективного переноса вихрей имеет место диффузия завихренности. При необходимости учета вязкости в вихревых методах при расчете плоских течений используют различные приемы, в частности метод случайных блужданий [4], который состоит в том, что к смещению вихрей, определяемому скоростью несущей жидкости, добавляется случайное смещение с Гауссовым распределением вероятности, зависящим от числа Рейнольдса. Доказано, что в пределе при стремящемся к бесконечности числе дискретных вихрей в единице объема эта процедура сходится к решению уравнения диффузии завихренности. В [5] вводится понятие диффузионного притяжения и отталкивания вихрей, основанного на представлении дискретных вихрей в виде вихрей Лэмба и вычислении градиента завихренности от совокупности таких вихрей. В [6] предложен способ перераспределения вихрей в ячейках на каждом временнóм шаге.

Во всех перечисленных работах тем или иным способом учитывается диффузионное перемещение вихрей относительно жидкости. В случае плоских течений оно подчиняется тем же законам, что и обычная диффузия скалярной величины: диффузионный поток пропорционален градиенту завихренности, а диффузионная скорость – градиенту логарифма завихренности [5]. В трехмерных течениях имеет место диффузия векторной величины, и представить ее как результат диффузионного движения вихревых линий более сложно, а в общем случае, может быть, и невозможно. В данной работе показано, что в осесимметричных течениях несмотря на то, что вектор завихренности имеет в цилиндрических координатах только одну неравную нулю компоненту, диффузия завихренности отличается от обычной диффузии скалярной величины. Получено единое для двумерных течений выражение диффузионной скорости.

1. Вывод формулы для скорости диффузионного движения вихрей. Течение вязкой несжимаемой жидкости описывается уравнениями Навье–Стокса и неразрывности

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{V} - \nu\Delta\mathbf{V} = -\text{grad}\left(\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + \Pi\right)$$
$$\text{div}\mathbf{V} = 0 \quad \mathbf{\Omega} = \text{rot}\mathbf{V} \tag{1.1}$$

Здесь p, ρ, $\mathbf{V}$, Π – давление, плотность, скорость и отнесенный к единице массы потенциал объемных сил, ν – кинематический коэффициент вязкости. Соответственно, уравнение, описывающее изменение завихренности $\mathbf{\Omega}$ имеет вид

$$\frac{\partial\mathbf{\Omega}}{\partial t} = \mathrm{rot}(\mathbf{V}\times\mathbf{\Omega}+\nu\Delta\mathbf{V}), \quad \nu = \mathrm{const} \tag{1.2}$$

Покажем, что для двумерных течений несжимаемой жидкости слагаемое, связанное с вязкостью, можно записать в виде

$$\nu\Delta\mathbf{V} = \mathbf{V}_d\times\mathbf{\Omega}, \quad \mathbf{V}_d = \frac{\nu\,\mathrm{rot}\mathbf{\Omega}\times\mathbf{\Omega}}{\Omega^2} \tag{1.3}$$

Преобразуем выражение $\mathbf{V}_d\times\mathbf{\Omega}$ с учетом того, что $(\mathbf{\Omega}\,\mathrm{rot}\mathbf{\Omega}) = 0$

$$\mathbf{V}_d\times\mathbf{\Omega} = \nu\,\mathrm{rot}\mathbf{\Omega} + \frac{\nu\mathbf{\Omega}(\mathbf{\Omega}\,\mathrm{rot}\mathbf{\Omega})}{\Omega^2} = \nu\Delta\mathbf{V}$$

В результате, уравнение (1.2) приобретает вид

$$\frac{\partial\mathbf{\Omega}}{\partial t} = \mathrm{rot}((\mathbf{V}+\mathbf{V}_d)\times\mathbf{\Omega}) \tag{1.4}$$

Перепишем выражение диффузионной скорости (1.3) для плоского и осесимметричного течений, заменяя $\mathbf{\Omega}$ на $\Omega\mathbf{e}_\Omega$

$$\mathbf{V}_d = -\frac{\nu}{y^k\Omega}\nabla(y^k\Omega) \tag{1.5}$$

Здесь $k = 0$ для плоского течения и $k = 1$ для осесимметричного. Ось Y в осесимметричном течении перпендикулярна оси симметрии. В случае плоского течения выражение (1.5) совпадает с полученным в [5]. В случае же осесимметричного течения особенностью этого выражения является то, что в отличие от диффузии скалярной величины при $\nabla\Omega = 0$ диффузионный поток и диффузионная скорость не равны нулю $\mathbf{V}_d = -\nu\mathbf{e}_y/y \neq 0$, $\mathbf{e}_y$ – единичный вектор, направленный вдоль оси Y.

2. Сохранение циркуляции вихревых трубок и аннигиляция вихрей. Покажем, что циркуляция Γ скорости $\mathbf{V}$ по произвольному контуру C, движущемуся в каждой его точке со скоростью $\mathbf{V} + \mathbf{V}_d$, остается неизменной, если нормальная к контуру составляющая скорости $\mathbf{V}_d$ на контуре конечна

$$\frac{d}{dt}\Gamma = \frac{d}{dt}\oint_C \mathbf{V}d\mathbf{l} = \frac{d}{dt}\iint_S \mathbf{\Omega}d\mathbf{s} = \oint_C \mathbf{\Omega}(\mathbf{V}+\mathbf{V}_d)\times d\mathbf{l} + \iint_S \frac{\partial}{\partial t}d\mathbf{s}$$

Преобразуем второе слагаемое

$$\iint_S \frac{d}{dt}\mathbf{\Omega}d\mathbf{s} = \iint_S \mathrm{rot}((\mathbf{V}+\mathbf{V}_d)\times\mathbf{\Omega})d\mathbf{s} = -\oint_C \mathbf{\Omega}((\mathbf{V}+\mathbf{V}_d)\times d\mathbf{l})$$

Складывая первое слагаемое со вторым, получаем $d\Gamma/dt = 0$, т.е. циркуляция остается постоянной.

Рассмотрим окрестность точек, в которых $\mathbf{\Omega} = 0$. В таких точках $\mathbf{V}_d = \infty$, если $\mathrm{rot}\mathbf{\Omega} \neq 0$, но в уравнения везде входит произведение $\mathbf{\Omega}\times\mathbf{V}_d$. Это произведение в плоском случае конечно при непрерывном распределении $\mathbf{\Omega}$, а в осесимметричном случае еще и при условии, что $\mathbf{\Omega} = O(r)$. Рассматриваемые точки могут образовывать линии, разделяющие области с положительными и отрицательными значениями Ω.

В малой окрестности такой линии диффузионная скорость с обеих сторон направлена в сторону линии. Это нетрудно увидеть, сделав тождественное преобразование

$$\mathbf{V}_d = -\frac{\nu}{y^k\Omega}(y^k\Omega) = -\frac{\nu}{|y^k\Omega|}\nabla|y^k\Omega|$$

Так как $|y^k\Omega|$ имеет минимум при $|y^k\Omega| = 0$, то в окрестности линии $\Omega = 0$ градиент этой функции направлен от линии. Следовательно скорость $\mathbf{V}_d$ с обеих сторон направлена к линии. В результате вихри противоположных знаков в окрестности линии движутся во встречных направлениях и сливаются на ней, что можно интерпретировать как их аннигиляцию. В осесимметричном течении аннигиляция происходит еще и на оси симметрии ($r = 0$). В этом случае она носит характер схлопывания вихревых колец.

3. Генерация завихренности на поверхности. Полученные выше результаты позволяют описывать нестационарное течение вязкой жидкости в лагранжевых координатах, связанных с движущимися вихрями, подобно тому, как это делается в методе дискретных вихрей в случае идеальной жидкости. Отличие состоит в добавлении к конвективной скорости движения вихрей диффузионной составляющей, а также в том, что в вязкой жидкости генерация свободной завихренности осуществляется на всей поверхности обтекаемых тел. Покажем, что поток завихренности с поверхности, так же как и скорость движения вихрей, выражается через мгновенное распределение Ω в пространстве.

В несжимаемой жидкости скорость течения связана с распределением завихренности формулой Био–Савара, которая в двумерных течениях имеет вид

$$\mathbf{V}(\mathbf{R}) = \int_S \mathbf{Q}\Omega d\mathbf{r} + \int_{S_{in}} \mathbf{Q}\Omega_{in} d\mathbf{r} + \int_C \mathbf{Q}\gamma dl + \mathbf{V}_\infty \tag{3.1}$$

где $\mathbf{Q}(\mathbf{R}, \mathbf{r})$ – скорость в точке $\mathbf{R}$, индуцируемая расположенным в точке $\mathbf{r}$ бесконечным прямолинейным вихрем (в случае плоского течения), или вихревым кольцом единичной циркуляции (в случае осесимметричного течения), s – пространство течения, s_{in} – пространство внутри тела, C – контур тела, на котором может быть присоединенная завихренность γ. Завихренность внутри тела может быть задана неоднозначно. Обычно для невращающихся тел она полагается равной нулю. Поверхностная завихренность γ представляет собой разрыв тангенциальной скорости на границе внешнего и гипотетического внутреннего течений. От выбора распределения завихренности внутри тела зависит только внутреннее течение и распределение γ на контуре. Последнее выражается через распределение Ω из условия непротекания, согласно которому

$$\mathbf{V}(\mathbf{R}_C)\mathbf{n}(\mathbf{R}_C) = \mathbf{W}_C(\mathbf{R}_C)\mathbf{n}(\mathbf{R}_C) \quad \mathbf{R}_C \in C \tag{3.2}$$

Здесь $\mathbf{n}(\mathbf{R}_C)$ – нормаль к контуру в точке $\mathbf{R}_C$, $\mathbf{W}_C$ – скорость движения поверхности. После подстановки (3.1) в (3.2) получается интегральное уравнение относительно γ

$$\mathbf{n}\oint_C \mathbf{Q}\gamma dl = -\mathbf{n}\left(\int_{S,\,S_{in}} \mathbf{Q}\Omega ds + \mathbf{V}_\infty - \mathbf{W}_C\right) \tag{3.3}$$

Процедура решения таких уравнений хорошо отработана [7]. Обычно контур разбивают на конечное число участков, и в левой части уравнения оказывается линейный оператор, действующий на вектор значений неизвестной функции. В плоских течениях уравнение (3.3) имеет неединственное решение. Для выделения единственного решения должна быть задана суммарная циркуляция всех вихрей или условие, определяющее эту величину.

Если в некоторый момент времени распределение завихренности удовлетворяет условию непротекания, то для дальнейшего условия необходимо выполнение равенства

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{Vn} = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{Wn} \tag{3.4}$$

Для простоты предположим, что система координат жестко связана с поверхностью тела. Обозначим интеграл по внутренней области как $\mathbf{V}_*(\mathbf{R}, t)$ и преобразуем производную $\partial\mathbf{V}/\partial t$, используя (3.1)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{V} &= \frac{\partial}{\partial t}\int_S \mathbf{Q}\Omega ds + \frac{\partial}{\partial t}\int_C \mathbf{Q}\gamma dl + \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{V}_\infty + \mathbf{V}_*) = \\ &= \frac{d}{dt}\int_S \mathbf{Q}\Omega ds + \int_C \mathbf{Q}\left(J_C + \frac{\partial}{\partial t}\gamma\right)dl + \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{V}_\infty + \mathbf{V}_*)\end{aligned} \tag{3.5}$$

Величина J_C – поток свободной завихренности с поверхности. Подставляя (3.5) в (3.4) получим уравнение для функции $J_t = J_C + \partial\gamma/\partial t$

$$\mathbf{n}\oint_C \mathbf{Q}J_t dl = -\mathbf{n}\left(\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{Q}\Omega ds + \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{V}_\infty + \mathbf{V}_* - \mathbf{W}_s)\right) \tag{3.6}$$

Первое слагаемое в правой части выражает изменение скорости $\mathbf{V}(\mathbf{R}_C)$, индуцированной вихрями в области s, возникающее из-за изменения положения вихрей при их движении со скоростью $\mathbf{u} = \mathbf{V} + \mathbf{V}_d$. При этом границы области также движутся.

В случае плоского течения величина Ωds при движении выделенного объема со скоростью $\mathbf{u}$ сохраняется, следовательно

$$\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{Q}\Omega ds = \int_S \frac{d\mathbf{Q}}{dt}\Omega ds = \int_S \mathbf{B}\Omega ds, \quad \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} = (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{Q}$$

После подстановки этого выражения в (3.6) получаем интегральное уравнение относительно J_t

$$\mathbf{n}\oint_C \mathbf{Q}J_t dl = -\mathbf{n}\left(\int_S \mathbf{B}\Omega ds + \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{V}_\infty + \mathbf{V}_* - \mathbf{W}_s)\right) \tag{3.7}$$

Уравнение (3.7) имеет такую же структуру, как и (3.3). Функция, стоящая в правой части, зависит только от мгновенного распределения завихренности в пространстве. Следовательно, J_t также выражается через это распределение.

Функцию $\partial\gamma/\partial t$, а вместе с тем и поток свободной завихренности $J_C = J_t - \partial\gamma/\partial t$, можно найти из условия, накладываемого на поверхности. Так, например, при условии прилипания в случае поступательного движения тела и нулевой скорости гипотетического течения внутри него скачок скорости на поверхности отсутствует, следовательно $\gamma(\mathbf{R}_C, t) = 0$. Для тела, вращающегося с постоянной скоростью $\gamma(\mathbf{R}_C, t) = \gamma(\mathbf{R}_C, t_0)$, т.е. $\partial\gamma/\partial t = 0$. При ускоренном вращении циркуляция вихрей внутри тела пропорциональна скорости вращения $\omega(t)$ и функция $\gamma(\mathbf{R}_C, t) = \gamma(\mathbf{R}_C, t_0)\omega/\omega(t_0)$.

Физический смысл приведенных формул можно выразить так. Вихри во внутренних точках течения движутся со скоростью $\mathbf{V} + \mathbf{V}_d$. Одновременно на поверхности образуется завихренность, обеспечивающая выполнение условия непротекания. При этом часть образовавшейся завихренности становится свободной, а часть остается присоединенной, обеспечивая условие прилипания или другое заданное условие для тангенциальной составляющей скорости.

В случае плоского течения уравнение (3.7), так же как и (3.3), имеет неединственное решение. Для выделения единственного решения должна быть задана интегральная циркуляция генерируемых вихрей

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int_C J_t dl$$

Покажем, что

$$\frac{d\Gamma}{dt} + \frac{d\Gamma_{in}}{dt} = 0 \qquad (3.8)$$

где Γ_{in} – суммарная циркуляция вихрей внутри контура. Проведем произвольный контур C_1 вокруг тела и вычислим производную циркуляции скорости $d\Gamma_{C_1}/dt$, используя уравнение Навье–Стокса в форме (1.3). Получим

$$\frac{d\Gamma_{C_1}}{dt} = \oint_{C_1} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}\mathbf{dl} = -\oint_{C_1}((\mathbf{V}+\mathbf{V}_d)\times\mathbf{\Omega})\mathbf{dl} - \oint_{C_1}\nabla\left(\frac{p}{\rho}+\frac{V^2}{2}+\Pi\right)\mathbf{dl} =$$
$$= \oint_{C_1}\Omega\mathbf{e}_\Omega(\mathbf{V}+\mathbf{V}_d)\times\mathbf{dl} = \oint_{C_1}\Omega(V_n+V_{dn})dl \qquad (3.9)$$

Из (3.9) видно, что скорость изменения циркуляции на контуре равна потоку завихренности через этот контур. С другой стороны, величина Γ_C равна суммарной циркуляции вихрей внутри контура, следовательно, она может изменяться вследствие генерации завихренности, изменения циркуляции внутри тела и потока завихренности через контур,

$$\frac{d\Gamma_C}{dt} = \frac{d\Gamma}{dt} + \frac{d\Gamma_{in}}{dt} + \int_C \Omega(V_n+V_{dn})$$

Сравнивая это выражение с (3.9), получаем (3.8).

4. Выражение давления через скорости движения жидкости и вихрей. Если в (3.9) взять интеграл не по замкнутому контуру, а по некоторой дуге ab, получим выражение, связывающее скорость изменения циркуляции на дуге с потоком завихренности через эту дугу и константами Бернулли на ее концах

$$\frac{d\Gamma_{ab}}{dt} = \int_{ab}\Omega(V_n+V_{dn})dl + \left(\frac{p}{\rho}+\frac{V^2}{2}+\Pi\right)\bigg|_a - \left(\frac{p}{\rho}+\frac{V^2}{2}+\Pi\right)\bigg|_b \qquad (4.1)$$

Для стационарного течения (4.1) получено в работе [8]. Если взять дугу ab на поверхности тела, где при условии прилипания $\mathbf{V} = 0$ получим [9]

$$\oint_{ab}\Omega V_{dn}dl = \left(\frac{p}{\rho}+\Pi\right)_b - \left(\frac{p}{\rho}+\Pi\right)_a \Rightarrow \Omega V_{dn} = \frac{d}{dl}\left(\frac{p}{\rho}+\Pi\right)$$

В работе [10] выведена формула, связывающая характеристики движущихся вихрей с давлением в трехмерных течениях идеальной жидкости

$$\frac{p}{\rho}+\frac{V^2}{2}+\Pi-\int_{T,T_{in}}\mathbf{v}(\mathbf{r},\mathbf{R})\mathbf{u}(\mathbf{r})d\tau = \mathrm{const} \quad \mathbf{r}\in T$$
$$\mathbf{v}(\mathbf{r},\mathbf{R}) = \mathbf{K}(\mathbf{r},\mathbf{R})\times\mathbf{\Omega}(\mathbf{r}) \quad \mathbf{K} = -\frac{(\mathbf{R}-\mathbf{r})}{4\pi|\mathbf{R}-\mathbf{r}|^3} \tag{4.2}$$

где p, ρ, V, Π являются функциями от координат $\mathbf{R}$, $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ – скорость движения вихревого элемента, расположенного в точке $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}(\mathbf{r}, \mathbf{R})$ – скорость, индуцированная в точке $\mathbf{R}$ этим элементом.

Область интегрирования T, T_{in} включает в себя как пространство течения (внешнее и внутреннее), так и поверхности разрыва, на которых $\mathbf{\Omega}$ заменяется на поверхностную завихренность γ.

Аналогичная формула может быть получена и для вязкой несжимаемой жидкости. Рассмотрим вначале безграничное трехмерное пространство с непрерывной функцией $\mathbf{J} = \mathbf{u}\times\mathbf{\Omega}$, в каждой точке которого

$$\frac{\partial\mathbf{\Omega}}{\partial t} = \mathrm{rot}\mathbf{J} \tag{4.3}$$

Преобразуем $\partial\mathbf{V}/\partial t$, используя формулу Био–Савара и (4.3)

$$\frac{\partial\mathbf{V}(\mathbf{R})}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\int_T\mathbf{K}(\mathbf{R}-\mathbf{r})\times\mathbf{\Omega}(\mathbf{r})d\mathbf{r} = \int_T\mathbf{K}(\xi)\times(\nabla_R\times\mathbf{J}(\mathbf{R}-\xi))d\xi =$$
$$= \int_T(\nabla_R\mathbf{K})\mathbf{J}d\xi - \int_T\nabla_R(\mathbf{K}\mathbf{J})d\xi$$

Индекс "R" обозначает дифференцирование по компонентам вектора $\mathbf{R}$. Так как функция $\mathbf{J}$ в выбранной системе координат зависит от разности $\mathbf{R}-\xi$ и $\mathrm{div}\mathbf{K} = 0$, в первом слагаемом можно заменить ∇_R на $-\nabla_\xi$, после чего перейти от объемного интеграла к поверхностному по сфере s_0 – бесконечно малого радиуса вокруг точки разрыва $\xi = 0$ и по сфере – бесконечно большого радиуса s_∞, а во втором слагаемом можно вынести оператор ∇_R из-под интеграла. Получим

$$\frac{\partial\mathbf{V}(\mathbf{R})}{\partial t} = \int_{S_0,S_\infty}(\mathbf{n}\mathbf{K})\mathbf{J}ds - \mathrm{grad}\int_T(\mathbf{K}\mathbf{J})d\xi = \mathbf{J} - \mathrm{grad}\int_T\mathbf{K}(\mathbf{u}\times\mathbf{\Omega})d\mathbf{r} \tag{4.4}$$

Подставляя (4.4) в (1.1)получим (4.2).

Перепишем (4.2) в двумерном виде, выполнив интегрирование по третьей координате

$$\frac{p}{\rho}+\Pi+\frac{V^2}{2}-\int_S\Omega\left(\mathbf{u}\mathbf{Q}+k\frac{u_y}{y}(\mathbf{R}-\mathbf{r})\mathbf{Q}\right)ds = \mathrm{const}, \quad \mathbf{r}\in S \tag{4.5}$$

Для плоских течений $k = 0$, для осесимметричных $k = 1$.

Физический смысл условия (4.3) при непрерывности функции J во всем пространстве состоит в том, что вихри нигде не исчезают иначе, чем при слиянии (аннигиляции) вихрей противоположных знаков или стягивании вихревого кольца в точку, и не рождаются иначе, чем в обратном процессе. Поток завихренности, генерируемой поверхностью J_t, можно представить как результат их рождения на поверхности в одной точке и дальнейшего перемещения к точкам, в которых они превращаются в свободные, т.е. найти на поверхности функцию J_s такую, что $J_t = -\partial(J_s)/\partial l$.

В этом случае формула (4.5) будет справедлива, если к интегралу по s добавить аналогичный интеграл I по контуру тела

$$I = \int_C \left(\mathbf{J}_s\mathbf{Q} + k\frac{J_{sy}}{y}(\mathbf{R}-\mathbf{r})\mathbf{Q}\right)dl, \quad \mathbf{J}_s = J_s\frac{d\mathbf{r}}{dl}$$

Если внутри тела вихри изменяются, то для выполнения (4.5) необходимо найти также функцию $\mathbf{J}_{in}$, удовлетворяющую равенству (4.3), и интегрирование по s дополнить интегрированием по s_{in}.

Покажем, что подынтегральное выражение в (4.5) равно $-\Omega\partial\varphi/\partial t$, где φ – потенциал скорости движущегося прямолинейного вихря единичной циркуляции (при $k = 0$) и вихревого кольца (при $k = 1$).

Потенциал φ есть функция от вектора $\mathbf{d} = (\mathbf{R} - \mathbf{r})/y^k$, поэтому

$$\frac{\partial\varphi(\mathbf{R}, \mathbf{r}(t))}{\partial t} = \mathbf{u}\nabla_r\varphi = -\frac{\mathbf{u}}{y^k}\nabla_d\varphi - k\frac{u_y}{y^{k+1}}((\mathbf{R}-\mathbf{r})\nabla_d\varphi) =$$

$$= -\left(\mathbf{u} + k\frac{u_y}{y}(\mathbf{R}-\mathbf{r})\right)\nabla_R\varphi = -\left(\mathbf{u} + k\frac{u_y}{y}(\mathbf{R}-\mathbf{r})\right)\mathbf{Q}$$

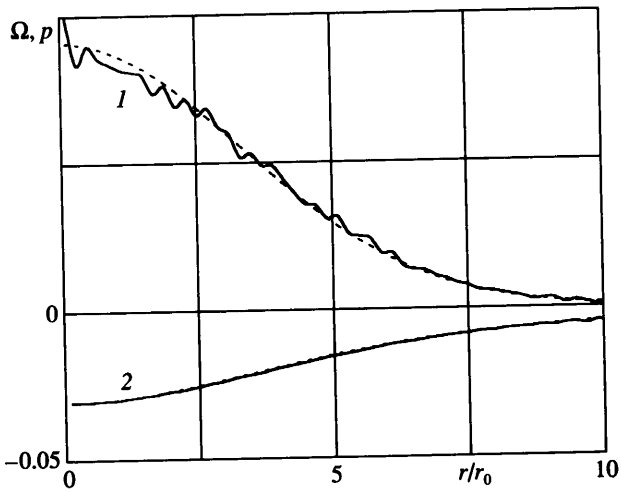
Следовательно (4.5) можно переписать в виде

$$\frac{p}{\rho} + \Pi + \frac{V^2}{2} + \int\limits_{\Gamma, \Gamma_{in}} \frac{\partial\varphi}{\partial t}d\Gamma = \text{const}$$

Из этой формы записи хорошо видно, что рассматриваемое выражение представляет собой обобщение формулы Коши–Лагранжа. Вынос из-под интеграла оператора дифференцирования в области течения невозможен, так как потенциал прямолинейного вихря и кольца является многолистной функцией и имеет смысл только в односвязной области, тогда как производная $\partial\varphi/\partial t$ движущегося вихря является однозначной функцией. Однако для потока вихрей, генерируемых поверхностью, и приращения интенсивности вихрей внутри тела существует однозначная непрерывная функция φ вне контура тела, потому что в случае плоских течений их интегральная циркуляция равна нулю, а в осесимметричном случае потенциал вихревых колец на контуре можно считать разрывным только внутри контура. Благодаря этому, формула (4.5) может быть переписана без использования функций $\mathbf{J}_s$ и $\mathbf{J}_{in}$

$$\frac{p}{\rho} + \Pi + \frac{V^2}{2} - \int_S \Omega\left(\mathbf{u}\mathbf{Q} + k\frac{u_y}{y}(\mathbf{R}-\mathbf{r})\mathbf{Q}\right)ds + \int_C \left(\frac{\partial\gamma}{\partial t} + J_C\right)\varphi dl + \int\limits_{S_{in}} \frac{\partial\Gamma_{in}}{\partial t}\varphi ds = \text{const} \qquad (4.6)$$

Формула (4.6) удобна при использовании метода дискретных вихрей для нахождения давления во внутренних точках течения. Вычисление интегралов аналогично нахождению скорости $\mathbf{V}$ по заданному распределению завихренности. Диффузионное перемещение вихрей, по которому легко найти диффузионную скорость, вычисляется тем или иным способом во многих методах, учитывающих вязкость. Процедура вычисления потока завихренности, генерируемой поверхностью, аналогична вычислению присоединенной завихренности в идеальной жидкости. Применение данной фор-



Распределение завихренности (кривые *1*) и давления (кривые *2*). Сплошные линии – результаты расчетов методом дискретных вихрей с учетом их диффузионного движения, пунктирные линии – распределения Лэмба

мулы не требует написания специальных подпрограмм, а время, затрачиваемое на расчет давления в одной точке, близко к времени расчета скорости одного вихря, которую неизбежно вычисляют при любом методе расчета давления.

5. Пример использования полученных формул. В качестве примера приводятся результаты расчета поля завихренности и давления при диффузии прямолинейного вихря, который в начальный момент представлял собой вихрь Рэнкина, т. е. плоское течение с постоянным распределением завихренности $\Omega = 2\omega_0$ внутри круга радиуса r_0 и следующим распределением скорости

$$V = \omega_0 r, \quad r \le r_0, \quad \frac{\omega_0 r_0^2}{r}, \quad r > r_0$$

С этой целью в круге радиуса r_0 равномерно распределялось достаточно большое число ($N = 1000$) дискретных вихрей с циркуляцией $\gamma = 2\pi r_0^2 \omega_0/N$. Далее вихри двигались со скоростью, равной сумме скоростей, индуцированных всеми остальными вихрями и диффузионной скорости. Для вычисления последней область течения разбивалась на концентрические кольца. Величина Ω_i в каждом кольце вычислялась как $\Omega_i = n_i\gamma/s_i$, где n_i – число попавших в это кольцо вихрей, s_i – площадь кольца. Далее по разностной схеме вычислялся градиент завихренности и диффузионная скорость. Под влиянием вязкости при $t \gg r_0^2/\nu$ вихрь Рэнкина превращается в вихрь Лэмба со следующим распределением скорости V и завихренности Ω [8]

$$V = \frac{\omega_0 r_0^2}{r}\left(1 - \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right)\right), \quad \Omega = \frac{\omega_0 r_0^2}{2\nu t}\exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right)$$

На фигуре сплошными линиями представлены результаты расчетов осредненных по кольцу распределений завихренности (кривые *1*) и давления (кривые *2*) при $t - t_0 = 5r_0^2/\nu$ $\mathrm{Re} = \omega_0 r_0^2/\nu = 100$. Завихренность на фигуре обезразмерена на величину ω_0, давление на ρV_0^2. Пунктирными линиями изображены точные аналитические решения для вихря Лэмба. Результаты хорошо согласуются с точным решением. Распределения давления практически совпали.

Давление вычислялось в точках положения вихрей, после чего проводилось усреднение по кольцу. Такой выбор контрольных точек привел к существенному уменьшению флуктуаций, так как влияние близко расположенных вихрей снизилось взаимным уничтожением членов, входящих в сумму, определяющую $V^2/2$ и интеграл в формуле (4.5). Флуктуации давления оказались меньшими, чем в распределении Ω, еще и потому, что скорость и давление являются интегральными функциями от распределения Ω.

Заключение. В осесимметричных течениях вязкой несжимаемой жидкости, так же как и в плоских, диффузию завихренности можно представить как диффузионное движение вихревых трубок относительно жидкости со скоростью, равной $\nu(\mathrm{rot}\,\mathbf{\Omega} \times \mathbf{\Omega})/\Omega^2$, где $\mathbf{\Omega} = \mathrm{rot}\,\mathbf{V}$, $\mathbf{V}$ – скорость жидкости, ν – кинематический коэффициент вязкости. При этом интенсивности вихревых трубок сохраняются, если последние не соприкасаются с вихревыми трубками, имеющими завихренность противоположного знака. На поверхностях соприкосновения таких трубок (при $\mathbf{\Omega} = 0$, $\mathrm{rot}\,\mathbf{\Omega} \neq 0$), происходит их аннигиляция. В осесимметричных течениях аннигиляция вихревых трубок происходит еще и на оси симметрии (схлопывание вихревых колец).

Получено выражение, представляющее собой обобщение формулы Коши–Лагранжа на случай вязкой несжимаемой жидкости, связывающее давление во всех точках течения вязкой жидкости с характеристиками движущихся вихрей и потоком генерируемой завихренности.

Автор выражает глубокую благодарность Г.Ю. Степанову и С.В. Гувернюку за полезное обсуждение работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№№ 02-01-00670 и 01-01-00595).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Helmgoltz H.* Uber Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, velche den Wirbellbewegungen entsprechen // Crelle-Borchardt, J. Reine und Angewandte Mathematik. 1858. Bd 15. S. 25–55.
2. *Сарпкайя Т.* Вычислительные методы вихрей. Фримановская лекция (1988) // Современное машиностроение. Сер. А. 1989. № 10. С. 1–60.
3. *Saffman P.G.* Vortex Dynamics. Cambridge: Univ. Press, 1992. = Сэффмэн Ф. Дж. Динамика вихрей. М.: Науч. мир, 2000. 376 с.
4. *Chorin A. J.* Numerical study of slightly viscous flow //J. Fluid Mech. 1973. V. 57. Pt 4. P. 785–796.
5. *Ogami Y., Akamatsu T.* Viscous flow simulation using the discrete vortex model. The Diffusion Velocity Method //Computers and Fluids. 1991. V. 19, № 3/4. P. 433–441.
6. *Shankar S., van Dommelen L.* A new diffusion procedure for vortex methods // J.Comp. Phys. 1996. V. 127. № 1. P. 88–109.
7. *Белоцерковский С.М., Лифанов И.К.* Численные методы в сингулярных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. М.: Наука, 1985. 256 с.
8. *Chernyshenko S.I.* Asymptotic theory of global separation // Appl. Mech. Rev. 1998. V. 51. № 9. P. 523–536
9. *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. М: Мир, 1973.
10. *Дынникова Г.Я.* Аналог интегралов Бернулли и Коши–Лагранжа для нестационарного вихревого течения идеальной несжимаемой жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 2000. № 1. С. 31–41.

Москва
E-mail: dyn@aerocentr.msk.su

Поступила в редакцию
1.X.2002