

УДК 532.526.5

© 2003 г. С. К. БЕТЯЕВ

## КОНИЧЕСКИЕ И КВАЗИКОНИЧЕСКИЕ ТЕЧЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Получено в замкнутой форме решение задачи о течении жидкости внутри конуса с малым углом раствора. В рамках теории конических течений рассмотрены условия возникновения сингулярного отрыва. Обнаружен класс конических течений, когда завихренность переносится по линиям тока потенциальной составляющей скорости.

По аналогии со сверхзвуковым течением сжимаемой жидкости определено квазиконическое течение несжимаемой жидкости – течение внутри и вне осесимметричного тела со степенными образующими. В результате инспекционного анализа обнаружены условия, когда существенно влияние завихренности и закрутки. Найдено приближенное решение задачи о течении жидкости внутри нулевого угла.

Построено координатное разложение в окрестности точки отрыва ползущего потока от гладкой поверхности, представляющее собой плоский аналог конического течения.

*Ключевые слова:* коническое течение, квазиконическое течение, сингулярный отрыв, краевой угол, прекурсионный слой.

Конические решения обнаружены как в теории сверхзвуковых течений, т.е. для гиперболических уравнений [1–3], так и в гидродинамике несжимаемой жидкости, т.е. для эллиптических уравнений [4–6]. В коническом течении, как и в автотомельном, среди определяющих параметров нет размерности длины, число независимых переменных уменьшено на 1. Первоначально это название – конические течения – относилось к трехмерным течениям идеальной жидкости, а затем и к плоским течениям, и к течениям вязкой жидкости, таким как течение Джеффри–Гамеля, течение Фокнера–Скэн, струя Ландау, вихрь Моффата [7].

Коническим называется стационарное течение, которое априори известным, степенным образом зависит от линейной координаты. Так, в сферической системе координат  $R$ ,  $\varphi$  скорость  $\mathbf{u}$  осесимметричного конического течения представима в виде  $\mathbf{u} = R^{\sigma-1} \mathbf{U}(\varphi)$ , где  $\varphi$  – полярный угол. Конические течения описывают обтекание клиновидной кромки, взрыв вихря, дифракцию вихря на конической вершине.

Локальная теория изучает асимптотические или координатные разложения в окрестностях складок течения – особых многообразий (поверхностей, линий и точек), на которых потеряна требуемая гладкость решения [8, 9]. Такими складками являются линии отрыва, пересечение поверхностей разрыва скорости друг с другом и с телом, изломы поверхности обтекаемого тела и так далее. Конические решения следует трактовать как координатные разложения в окрестности складок по степеням  $R$ . Если разложение обрывается, т.е. все члены ряда начиная с некоторого, обычно первого, зануляются, то решение становится точным.

В теории конических течений условия на бесконечности не выставляются, поэтому течение вдали от вершины описывается неправильно, появляются дополнительные, так называемые скрытые параметры, которые нельзя определить заранее, например, из соображений размерности. Наличие скрытых параметров приводит к дополнительной многозначности локальной теории.

С другой стороны, при определенных распределениях завихренности и закрутки в теории конических течений идеальной жидкости имеет место парадокс отсутствия решения: оно либо становится сингулярным при некотором фиксированном значении определяющего параметра (парадокс Койтера–Стернберга [10]), либо его не существует в некотором диапазоне значений этого параметра.

В теории квазиконических течений, которые формально являются расширением класса конических течений идеальной жидкости, скорость представляется в виде разложения по степеням продольной цилиндрической координаты  $x$  и, кроме того, зависит от переменной  $\xi = r/x^n$ . Показатель квазиконичности  $n$  равен 1 в случае конического течения. Ранее исследовалось отрывное обтекание изогнутых по степенному закону тел [11], а также сверхзвуковые квазиконические течения [12].

Если формально подставить координатное разложение для скорости в уравнение Навье–Стокса, считая, что число Рейнольдса  $Re \sim 1$ , то инерциальные и вязкие члены окажутся однопорядковыми только в случае  $\sigma = 0$ . При  $\sigma < 0$  уравнение Навье–Стокса вырождается в уравнение Эйлера, при  $\sigma > 0$  – в уравнение Стокса.

Решение задачи об осесимметричном обтекании вершины конуса, равно как и решение задачи об обтекании вершины клина, в рамках модели Навье–Стокса неизвестны [8]. Локальное решение уравнений Эйлера дает внешний предел этой, пока нерешенной задачи. Если локальное решение уравнения Навье–Стокса является сложной многоярусной конструкцией, то локальное решение уравнения Эйлера представляет собой однослойное координатное разложение.

Цель работы – исследование новых постановок задач теории конических и квазиконических течений: сингулярный отрыв, перенос завихренности потенциальным потоком, течение внутри и вне нулевого угла, отрыв ползущего течения от вершины клина.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим невязкое осесимметричное течение. В сферической системе координат функция тока  $\psi$  удовлетворяет уравнению [5]

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial R^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} - \frac{\text{ctg} \varphi}{R^2} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = R^2 H' \sin^2 \varphi - CC' \quad (1.1)$$

$$H(\psi) = p + \frac{1}{2}(u_R^2 + u_\varphi^2 + u_\alpha^2), \quad C(\psi) = Ru_\alpha \sin \theta$$

$$R^2 u_R \sin \varphi = \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}, \quad Ru_\varphi \sin \varphi = -\frac{\partial \psi}{\partial R}$$

где  $p$  – давление,  $u_\alpha$  – азимутальная составляющая скорости, плотность жидкости равна 1.

Первый член в правой части (1.1) ответствен за завихренность потока, второй – за закрутку.

На оси конуса ( $\varphi = 0$ ) и на его поверхности ( $\varphi = \varphi_0$ ) имеют место условия непротекания (фиг.1)

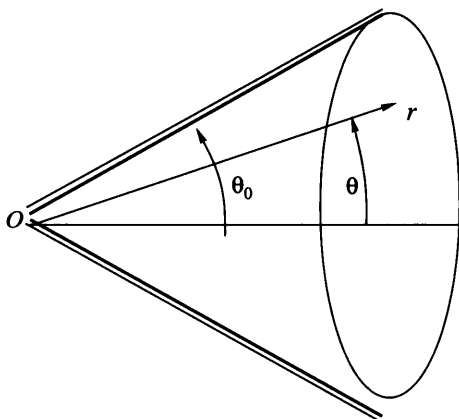
$$\psi(R, 0) = \psi(R, \varphi_0) = 0 \quad (1.2)$$

В цилиндрической системе координат  $x, r$  функция тока удовлетворяет уравнению [7]

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = r^2 H' - CC' \quad (1.3)$$

$$H(\psi) = p + \frac{1}{2}(u_x^2 + u_r^2 + u_\theta^2), \quad C(\psi) = ru_\theta, \quad ru_x = \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad ru_r = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

где  $u_\theta$  – окружная составляющая скорости.



Фиг. 1. Система координат

**2. Сингулярный отрыв пограничного слоя.** Наряду с обычным отрывом пограничного слоя, происходящим при конечном градиенте давления, существует так называемый сингулярный отрыв, вызванный бесконечным градиентом давления. Появление сингулярного отрыва предсказуемо в рамках теории конических течений идеальной жидкости.

Рассмотрим (кусочно) потенциальное обтекание клина. Градиент давления в безотрывном течении внутри угла с раствором  $\theta_0$  пропорционален  $r^{\omega_1}$ , где  $\omega_1 = 2\pi/\theta_0 - 3$  – показатель сингулярности;  $r, \theta$  – полярные координаты,  $0 < \theta_0 < 2\pi$ . Если  $\theta_0 \leq 2\pi/3$ , то при  $r \rightarrow 0$  градиент конечный. Линии тока такого течения показаны на фиг. 2,а. Если  $2\pi/3 < \theta_0 < \pi$ , то градиент в вершине клина бесконечный, и должен возникнуть сингулярный отрыв пограничного слоя.

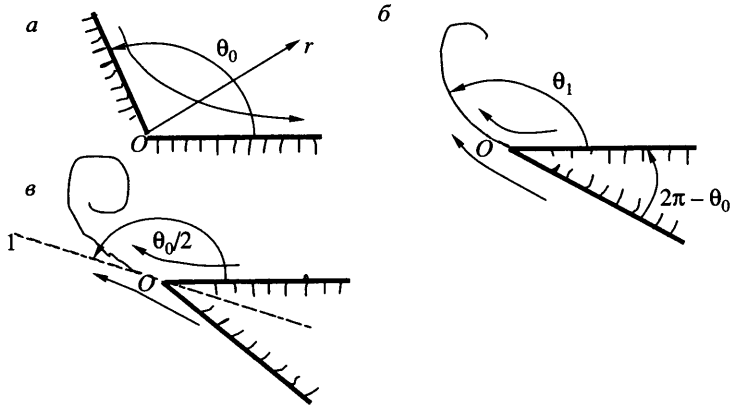
Если  $\theta_0 > \pi$ , то при  $r \rightarrow 0$  становится бесконечным само давление. В этом случае выставляется условие Кутта, которому можно удовлетворить, введя в схему отходящий от вершины клина тангенциальный разрыв (на фиг. 2,б показана спиральная вихревая пелена). Тогда в заотрывной области ( $\pi < \theta_0 < 2\pi$ ) частицы жидкости будут двигаться в угле с раствором  $\theta_1 = \theta_0 - \pi$ , показатель сингулярности окажется равным  $\omega_2 = 2\pi/(\theta_0 - \pi) - 3$ . Если  $\theta_0 > 5\pi/3$ , то градиент давления в вершине клина снова бесконечен. Поскольку точка отрыва, совпадающая с вершиной клина, фиксирована, нет свободного параметра, изменяя который можно было бы добиться выполнения условия Бриллюэна–Вилля, т.е. устранить сингулярность в распределении давления. При этих условиях потенциальность течения нарушится, возникнет сингулярный отрыв.

В течении с точечными вихрями (течение Никольского [11]) тангенциального разрыва нет, разделительная траектория отходит от вершины клина по биссектрисе  $l$ , изображенной на фиг. 2,в ( $\pi < \theta_0 < 2\pi$ ).

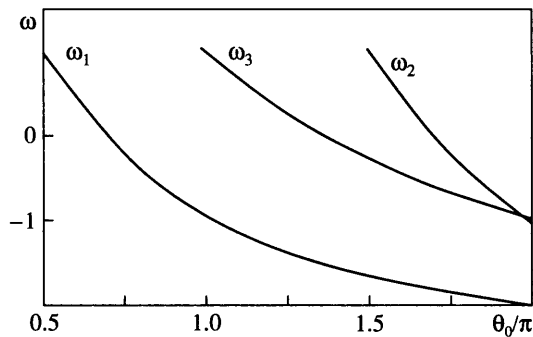
Поэтому угол поворота сходящих со сторон клина частиц жидкости равен  $\theta_1 = \theta_0/2$ , а показатель сингулярности равен  $\omega_3 = 4\pi/\theta_0 - 3$ .

Зависимости показателей сингулярности  $\omega_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) от угла  $\theta_0$  представлены на фиг. 3. Сингулярному отрыву соответствуют отрицательные значения  $\omega_j$ . При  $\theta_0 \rightarrow 2\pi$  зависимости терпят разрыв. Обтеканию пластины ( $\theta_0 = 2\pi$ ) соответствует значение  $\omega_2 = -1/2$ .

По поводу зависимости  $\omega_j(\theta_0)$  следует сделать одно замечание. Во-первых, значение  $\omega_1 = -1$  означает лишь предел при ( $\theta_0 \rightarrow \pi \pm 0$ ). На самом деле, при обтекании гладкой поверхности ( $\theta_0 = \pi$ ) сингулярности нет:  $\omega_1 = 0$ . Во-вторых, обтеканию ост-



Фиг. 2. Схемы обтекания вершины клина в границах: а) “стенка – стенка” ( $\theta_0 \leq 2\pi/3$ ), б) “стенка – тангенциальный разрыв” ( $\theta_0 < 5\pi/3$ ), в) “стенка – линия тока” (течение Никольского)



Фиг. 3. Зависимость показателей сингулярности  $\omega_j$  от  $\theta_0$

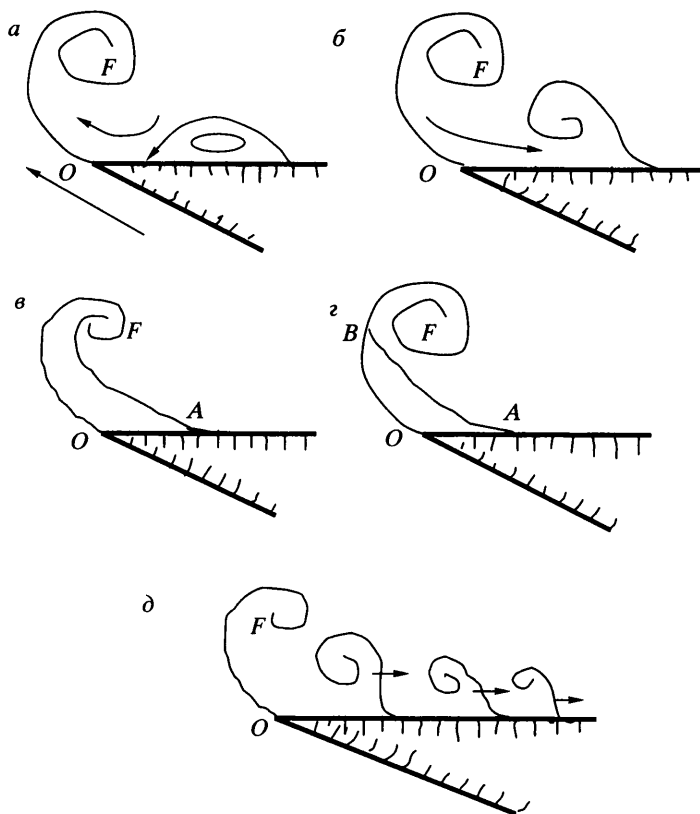
рой кромки пластины ( $\theta_0 = 2\pi$ ), как следует из локального решения [6], соответствуют значения  $\omega_2 = \omega_3 = -1/2$ .

Какова форма сингулярного отрыва? Окончательного ответа на этот вопрос еще не получено ввиду многоликости явления и отсутствия систематических численных расчётов. Такой тип отрыва, как пузыревидный (фиг. 4,а), не ликвидирует сингулярности при  $r \rightarrow 0$ .

Может ли вторичный отрыв (фиг. 4,б) предстать в качестве сингулярного? Может. Дело в том, что необходимым условием наличия сингулярного отрыва является не только условие бесконечности градиента давления:  $|\nabla p| \rightarrow \infty$  при  $r \rightarrow 0$ , но и условие его направленности по потоку:  $\mathbf{u}\nabla p > 0$ , где произведение подразумевается скалярным. В рассматриваемом случае это условие принимает вид

$$u_r \frac{\partial p}{\partial r} > 0 \quad (2.1)$$

При наличии вторичного отрыва условие (2.1) нарушится, если скорость будет направлена против градиента давления, как показано стрелкой на фиг. 4,б.

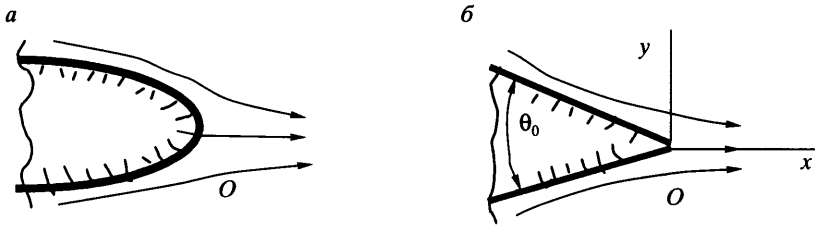


Фиг. 4. Схемы сингулярного отрыва: *a* – пузырьвидный, *б* – вторичный, *в* – отрыв Чаплыгина–Лаврентьева, *г* –  $\lambda$ -отрыв, *д* – каскадный

В схеме Чаплыгина–Лаврентьева ( $AF$  и  $OF$  – свернутые в логарифмические спирали свободные границы, фиг. 4, *в*) и в схеме  $\lambda$ -отрыва (“треугольная” область  $ABO$  ограничена двумя кусками линий тангенциального разрыва скорости  $AB$  и  $OB$ , которые в точке соединения  $B$  переходят в уходящий на бесконечность контактный разрыв или в вихревую пелену  $BF$ , заканчивающуюся спиральным завитком, как показано на фиг. 4, *г*) сингулярность расположена не в угловой точке  $O$ , а в точке отрыва от гладкой поверхности  $A$ . Эти схемы корректны, если в точке  $A$  выполняется условие Бриллюэна–Вилля. Структура замкнутой области  $AOB$  может быть разнообразной: вихревой, изобарической, двухзонной и так далее. Положение точки  $B$  достаточно произвольно. При  $OB = 0$  схема  $\lambda$ -отрыва переходит в обычную схему одинарного отрыва, а в другом предельном случае, когда точка  $B$  совпадает с центром спирали  $F$ , получается схема Чаплыгина–Лаврентьева.

Возможен каскадный процесс образования вторичных спиральных вихрей, периодически возникающих вблизи вершины и удаляющихся от нее с течением времени (фиг. 4, *д*). Гипотеза о каскадном механизме образования вторичных вихрей объясняет природу нестационарности развитого ( $t \rightarrow \infty$ ) отрывного обтекания тела, погруженного в стационарный поток газа.

В силу условия (2.1) сингулярный отрыв не возникает при натекании жидкости на клиновидную кромку, т.е. в передней точке торможения потока. При обтекании гладкой задней кромки тела (фиг. 5, *а*) течение тоже безударное, так как угол пово-



Фиг. 5. Обтекание задней кромки: *a* – гладкой, *б* – острой

рота потока в этом случае равен  $\pi/2$ , сингулярности нет. При обтекании клиновидной задней кромки (фиг. 5, *б*) сингулярный отрыв возникает, если угол раствора клина  $\theta_0 < 2\pi/3$ .

**3. Перенос завихренности потенциальным потоком.** Используем степенную асимптотику

$$H(\psi) = a\psi^k, \quad C\psi' = b\psi^q \quad (3.1)$$

где *a* и *b* – произвольные константы.

Сюда же формально включается случай, когда на оси конуса расположена вихревая нить, т.е.  $C(\psi) = O(1)$ . Давление и угловая скорость ограничены на оси и поверхности конуса, если  $k \geq 0$ ,  $q \geq -1$ .

Уравнение (1.1) конкретизируется

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial R^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} - \frac{\text{ctg} \varphi \partial \psi}{R^2 \partial \varphi} = kaR^2 \psi^{k-1} \sin^2 \varphi - b\psi^q \quad (3.2)$$

При условии конечности течения, т.е. при  $\psi = R^s f(\varphi)$ , влияние завихренности и закрутки существенно, если  $k = 2q$ ,  $q = 1 - 2/s$ ,  $s > 2$ . Уравнение (3.2) становится обыкновенным

$$f'' - f' \text{ctg} \varphi + s(s-1)f = kaf^{k-1} \sin^2 \varphi - bf^q \quad (3.3)$$

Условие отсутствия особенности в градиенте давления, т.е. условие отсутствия сингулярного отрыва имеет вид:  $ks \geq 1$ .

Приближенное решение в замкнутой форме имеет место в случае потенциально-го потока при  $\theta_0 \ll 1$ . Снова полагая в (3.2)  $\psi = R^s f(\varphi)$ , при  $q = 1$ ,  $\varphi = \theta_0 \vartheta$ ,  $s = \gamma/\theta_0$ ,  $b = B\theta_0^{-2}$ ,  $f = f(\vartheta)$  получим уравнение Бесселя

$$f'' - \frac{1}{\vartheta} f' + (\gamma^2 + B)f = 0$$

Решение  $f = \vartheta I_1(g\vartheta)$ , определенное с точностью до произвольной константы при  $B > \gamma^2$ , имеет (при  $\vartheta = 1$ ) первый корень:  $g\vartheta = g \approx 3.7$ , где  $I_1$  – функция Бесселя первого рода,  $g = (\gamma^2 + B)^{1/2}$ .

Обращаясь снова к уравнению (3.2), заметим, что его решение можно представить в виде суперпозиции двух составляющих: потенциального решения  $\psi_0$  без осевой закрутки и вихревого  $\psi_1$  с осевой закруткой. Так как  $\Delta\psi_0 = 0$ , для определения  $\psi_1$  получается уравнение

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial R^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \varphi^2} - \frac{\text{ctg} \varphi \partial \psi_1}{R^2 \partial \varphi} = kaR^2 (\psi_0 + \psi_1)^{k-1} \sin^2 \varphi - b(\psi_0 + \psi_1)^q \quad (3.4)$$

Пусть  $\psi_0 = R^n f_0(\varphi)$ ,  $\psi_1 = R^s f_1(\varphi)$ . В случае  $n \geq s$  следует рассматривать решение в целом как вихревое, не разделяя его на потенциальную и вихревую части [5]. В случае  $n < s$  поток в первом приближении безвихревой, завихренность и закрутка распределяются по линиям тока этого потенциального течения, правая часть (3.4) становится известной функцией  $\varphi$

$$f_1'' - f_1' \operatorname{ctg} \varphi + s(s-1)f_1 = A(\varphi) \quad (3.5)$$

$$A(\varphi) = k a f_0^{k-1} \sin^2 \varphi - b f_0^q, \quad kn = n + s - 4, \quad qn = s - 2$$

Полное решение задачи представимо в виде  $f_1 = F(\varphi)D(\varphi)$ , где функция  $D$  содержит две константы  $C_1$ ,  $C_2$  и решение однородной задачи  $f_1 = F(\varphi)$ , выражаемое с помощью функций Лежандра первого порядка

$$D = C_1 + \int_0^\varphi F^{-2} \sin \varphi d\varphi \left[ C_2 + \int_0^\varphi A F \frac{d\varphi}{\sin \varphi} \right]$$

Граничным условиям при  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \varphi_0$  можно удовлетворить, приравняв нулю как функцию  $F$ , так и функцию  $D$ . Возможны следующие варианты: 1)  $F(0) = 0$ ,  $D(\varphi_0) = 0$ ; 2)  $C_1 = 0$ ,  $F(\varphi_0) = 0$ ; 3)  $C_1 = 0$ ,  $D(\varphi_0) = 0$ .

**4. Квазиконическое течение.** Осесимметричное течение в окрестности критической точки, совпадающей с вершиной конуса, является коническим течением. Течение в окрестности критической точки, совпадающей с вершиной осесимметричного тела степенной формы, является квазиконическим. В более общем случае квазиконическим течением следует считать течение в области, ограниченной плоскостями и поверхностями степенной формы.

Ограничимся изучением двух задач, показанных на фиг. 6: а) обтекание нулевого угла и б) течение внутри нулевого угла. Снова воспользуемся степенной асимптотикой (3.1). В задаче о внешнем течении (фиг. 6,а) скорость в главном приближении конечна. Решение представимо в виде координатного ряда ( $x \rightarrow 0$ )

$$\psi(x, R) = x^{2n} \Psi(\xi) + o(x^{2n})$$

Здесь  $\xi = rx^{-n}$  – квазиконическая переменная,  $n > 1$ ,  $x > 0$ . Решение определено в области  $x > 0$ ,  $\xi \geq \xi_1$ . Условие непротекания имеет вид:  $\Psi(\xi_1) = 0$ . Подставив это разложение в уравнение (1.3) и отбросив второстепенные члены, получим

$$\Psi'' - \frac{1}{\xi} \Psi' = k a \xi^2 x^{2nk} \Psi^{k-1} - b x^{2nq} \Psi^q \quad (4.1)$$

Такое представление не зависит от  $x$  при  $k = q = 0$ . В этом случае уравнение (4.1) становится линейным

$$\xi \Psi'' - \Psi' = -b \xi$$

Его решение имеет вид:  $\Psi = 0.5(u_\infty/\xi_1 + 0.5b)(\xi^2 - \xi_1^2) + 0.5b\xi^2 \ln(\xi_1/\xi)$ .

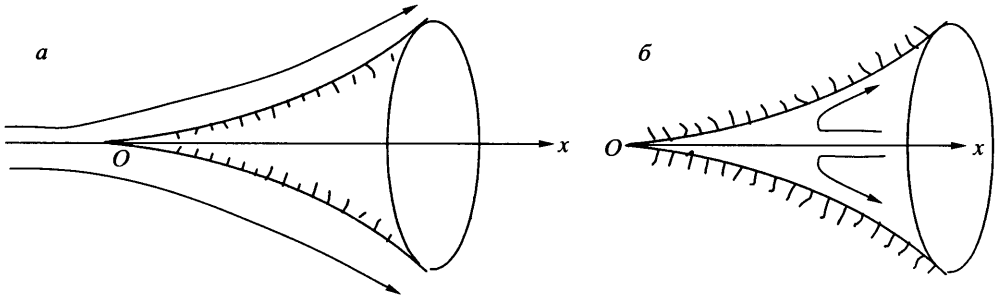
Задача о безвихревом течении без закрутки внутри нулевого угла не имеет степенного решения. Будем искать его в виде  $y = A(x)f(\xi)$ . Из уравнения (1.3) с нулевой правой частью находим

$$x^{2n} \frac{A''}{A} = -\frac{\xi f'' - f'}{\xi f} = \lambda^2$$

Решение при  $x \rightarrow 0$  экспоненциально затухает

$$A \approx C_1 \exp\left(-\frac{1}{n-1} \lambda x^{1-n}\right), \quad f = \xi I_1(\lambda \xi)$$

где  $I_1$  – функция Бесселя первого рода.



Фиг. 6. Схемы квазиконических течений: *a* – внутри нулевого угла, *б* – вне нулевого угла

Первый ноль  $I_1$  достигается при значении аргумента, равном примерно 3.7. Поэтому граничное условие  $f(\xi_1) = 0$  удовлетворится, если  $\lambda \approx 3.7/\xi_1$ .

Рассмотрим степенное решение внутри нулевого угла

$$\psi = x^s f(\xi) + o(x^s)$$

Оно определено в области  $x > 0$ ,  $0 \leq \xi \leq \xi_1$ . Из (1.3) и (3.1), пренебрегая малыми членами, получим

$$x^{s-2n} \left( f'' - \frac{1}{\xi} f' \right) = kar^2 x^{s(k-1)} f^{k-1} - bx^{qs} f^q$$

Уравнение будет линейным при  $k = 2$ ,  $q > 1 - 2n/s$

$$f'' - \frac{1}{\xi} f' = 2a\xi^2 f$$

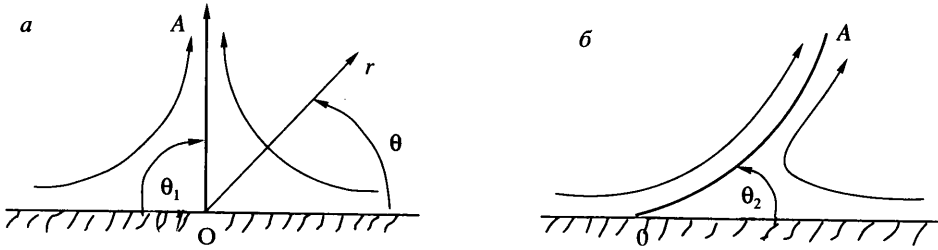
Решение  $f = \text{const} \sin(\sqrt{-a/2\xi^2})$  существует, если  $a < 0$ .

**5. Отрыв ползущего течения.** Понятие отрыва потока обычно относится к слабовязкому ( $Re \gg 1$ ) или идеальному ( $Re = \infty$ ) течениям. В обоих случаях природа этого явления нелинейная. Пытаясь распространить это понятие на случаи  $Re = O(1)$  и  $Re = o(1)$ , прежде всего заметим, что для построения локальной теории отрыва достаточно рассмотреть течение в плоскости, нормальной к линии отрыва, так как зависимость от продольной координаты регулярная и параметрическая.

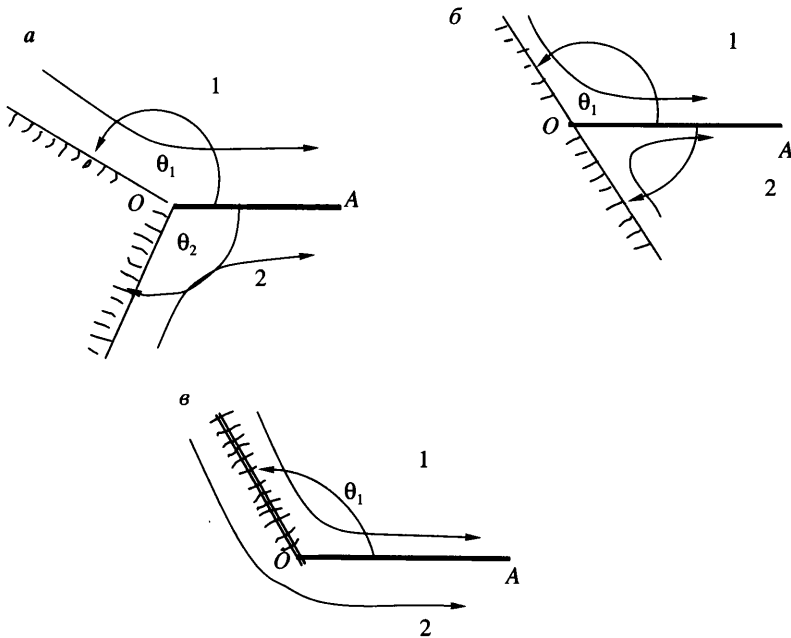
Геометрически ясно, что отрыв представляет собой отход пристеночной линии тока  $\psi = 0$  от непроницаемой твердой границы. Однако такому определению удовлетворяет и обычный отход линии тока от тела. На фиг. 7,а изображена критическая линия тока  $OA$ , отходящая от точки торможения  $O$  невязкого потока; угол наклона к поверхности тела  $\theta_1$  равен  $\pi/2$ . На фиг. 7,б изображена разделительная линия отрыва идеального потока ( $Re = \infty$ ), отходящая от точки отрыва  $O$ ; она касается твердой поверхности. Отрыв пограничного слоя – трехмасштабное явление, вызванное самоорганизованной индукцией давления [9].

Введем следующие определения. Явление, связанное с отходом от тела или приходом к телу критической линии тока, будем называть разделением потока [7, 13]. На этой линии тока решение аналитично, т.е. непрерывны функции и все необходимые производные. Точка торможения (фиг. 7,а) не является особой. Отрывом будем называть явление, связанное с отходом от тела линии тока, на которой решение неана-





Фиг. 7. Топология линий тока и отрыва в окрестности точки отхода и отрыва потока: *a* – отход потока идеальной жидкости ( $\theta_1 = \pi/2$ ), *б* – отрыв потока идеальной жидкости ( $\theta_2 = 0$ )



Фиг. 8. Схемы отрыва ползущего течения (*OA*-линия отрыва): *a* – отрыв от вершины клина с углом раствора  $\theta_0 = \theta_1 - \theta_2$ , *б* – отрыв от гладкой стенки ( $\theta_0 = \pi$ ), *в* – отрыв от вершины пластины ( $\theta_0 = 2\pi$ ); 1, 2 – области  $\theta > 0$  и  $\theta < 0$

литично. Точка отрыва (фиг. 7,б) является особой. Такое определение распространяется и на линейное уравнение Стокса:  $\partial u/\partial t + \nabla p = \mu \nabla^2 u$ , где  $t$  – время,  $\mu$  – коэффициент динамической вязкости. В этом случае угол наклона критической линии тока *OA* как к гладкой поверхности тела, так и к острой кромке конечен и произволен [13]. В окрестности точки торможения имеет место оценка  $u \approx r^{s-1}U(\theta)$ , где  $s > 1$ , центр полярных координат  $r, \theta$  расположен в подвижной точке отрыва *O*.

На фиг. 8,а показана схема отрыва ползущего течения от вершины клина ( $\theta_2 \leq \theta \leq \theta_1$ ), на линии отрыва *OA* угол  $\theta = 0$ , угол клина  $\theta_0 = \theta_1 - \theta_2$ . На фиг. 8, б, в даны схемы отрыва от гладкой поверхности ( $\theta_0 = \pi$ ) и от вершины пластины ( $\theta_0 = 2\pi$ ).

Подставляя представления  $u_r = r^{s-1}u(\theta)$ ,  $u_\theta = r^{s-1}v(\theta)$ ,  $p = r^{s-1}p_0(\theta)$  в уравнение Стокса, получим выражение для определения давления

$$s(2-s)p_0 = \mu(v'' + s^2v')$$

и обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка для определения окружной составляющей скорости

$$v^{iv} + 2(s^2 - 2s + 2)v'' + s^2(2-s)^2v = 0 \quad (5.1)$$

Величины, определенные в областях  $\theta > 0$  и  $\theta < 0$ , снабдим соответственно нижними индексами 1 и 2. На гранях клина (фиг. 8,а) выполняются условия прилипания

$$v_1(\theta_1) = 0, \quad v_1'(\theta_1) = 0 \quad (5.2)$$

$$v_2(\theta_2) = 0, \quad v_2'(\theta_2) = 0 \quad (5.3)$$

На линии отрыва  $\theta = 0$  тоже выполняются условия непротекания и, кроме того, условия непрерывности радиальной составляющей скорости, нормальных и касательных напряжений

$$v_1 = 0, \quad v_2 = 0, \quad v_1' = v_2' \quad (5.4)$$

$$\mu_1 v_1''' = \mu_2 v_2''', \quad \mu_1(v_1''' + s^2v_1') = \mu_2(v_2''' + s^2v_2') \quad (5.5)$$

Решение уравнения (5.1) представим в виде

$$v_1 = a_1 \sin s\theta + a_2 \sin(s-2)\theta + a_3 \cos s\theta + a_4 \cos(s-2)\theta$$

$$v_2 = b_1 \sin s\theta + b_2 \sin(s-2)\theta + b_3 \cos s\theta + b_4 \cos(s-2)\theta$$

Девять граничных условий (5.2) – (5.5) потребуются для нахождения девяти неизвестных:  $a_j$ ,  $b_j$ ,  $\theta_1$  и  $s$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ). В силу их однородности можно принять  $a_2 = 1$ . Тогда из второго условия (5.5) находим  $b_2 = \beta = \mu_1/\mu_2$ . Первые условия (5.2), (5.3) определяют  $a_4 = -a_3$  и  $b_4 = -b_3$ , а второе условие (5.5) –  $b_3 = \beta a_3$ . Выполнение оставшихся условий приводит к системе пяти алгебраических уравнений

$$b_1 = a_1 + (1 - \beta) \frac{s-2}{s}$$

$$a_1 \sin s\theta + \sin(s-1)\theta - 2a_3 \sin\theta_1 \sin(s-1)\theta_1 = 0$$

$$a_1 \cos s\theta_1 + \frac{s-2}{s} \cos(s-1)\theta_1 + a_3 \left[ \frac{s-2}{s} \sin(s-1)\theta_1 - \sin s\theta_1 \right] = 0$$

$$\frac{1}{\beta} b_1 \sin s\theta_2 + \sin(s-2)\theta_2 - 2a_3 \sin\theta_2 \sin(s-1)\theta_2 = 0$$

$$\frac{1}{\beta} b_1 \cos s\theta_2 + \frac{s-2}{s} \cos(s-2)\theta_2 + a_3 \left[ \frac{s-2}{s} \sin(s-2)\theta_2 - \sin s\theta_2 \right] = 0$$

После несложных преобразований задача определения  $\theta_1$  и  $s$  сводится к решению системы двух уравнений

$$\frac{\beta \sin^2(s-1)\theta_1}{\sin^2(s-1)\theta_1 + (s-1)\sin^2\theta_1} = \frac{\sin^2(s-1)\theta_2}{\sin^2(s-1)\theta_2 + (s-1)\sin^2\theta_2} - (1-\beta) \frac{s-1}{s} \quad (5.6)$$

$$\frac{(s-1)\sin 2\theta_1 - \sin 2(s-1)\theta_1}{\sin^2(s-1)\theta_1 + (s-1)\sin^2\theta_1} = \frac{(s-1)\sin 2\theta_2 - \sin 2(s-1)\theta_2}{\sin^2(s-1)\theta_2 + (s-1)\sin^2\theta_2} \quad (5.7)$$

Рассмотрим два предельных случая:  $b \gg 1$  и  $\beta = 1$ . В первом случае (5.6) трансформируется в уравнение Дина – Монтаньона:  $\sin(s-1)\theta_1 = \pm(s-1)\sin\theta_1$ . Его решение, существующее при  $\theta_1 > \theta^* \approx 160^\circ$ , получено в [14, 15].

Второй случай ( $\beta = 1$ ) соответствует течению однородной жидкости. Из (5.6) имеем

$$\frac{\sin(s-1)\theta_1}{\sin\theta_1} = \pm \frac{\sin(s-1)\theta_2}{\sin\theta_2}$$

Тогда уравнение (5.7) вновь приводит к уравнению Дина–Монтаньона, но уже для угла раствора клина  $\theta_0$ :  $\sin(s-1)\theta_0 = \pm(s-1)\sin\theta_0$ . Отрывное решение переходит в тривиальное, описывающее разделение потока:  $\theta_1 = -\theta_2 = \theta_0/2$ .

**6. Замечание о парадоксе краевого угла.** Парадокс динамического краевого угла – это несовместимость условий на контактной поверхности и условия прилипания на твердой стенке в окрестности подвижной линии контакта трех фаз: жидкость–жидкость–твердое тело. Наиболее правдоподобное решение этого парадокса – предположение о том, что жидкость не прилипает к стенке (клину или пластине) ввиду образования прекурсионного подслоя толщиной в несколько сотен ангстрем [16–18].

Рассмотрим влияние межфазной силы поверхностного натяжения  $\alpha K$ , где  $\alpha$  – коэффициент поверхностного натяжения,  $K$  – кривизна линии отрыва в точке отрыва. Зададим эту линию в форме координатного ряда:  $\theta = \text{const} + ar^k + o(r^k)$ . Тогда  $\alpha K = O(r^{k-1})$ , и возможны две постановки задачи:  $k > n$  и  $k = n$ .

Если  $k > n$ , то воздействие капиллярности оказывается величиной второго порядка малости; в первом приближении справедлива постановка задачи, рассмотренная в п. 4. При тех значениях определяющих параметров, которые соответствуют отсутствию решения задачи, ее постановку следует ослабить, отказавшись, к примеру, от условия прилипания.

Если  $k = n$ , то влияние капиллярности значительно; действие поверхностных сил на линии отрыва следует учитывать уже в главном приближении. Но тогда задача, наоборот, окажется недоопределенной: в граничные условия войдет неизвестная константа  $a$ .

В обоих случаях для разрешения парадокса краевого угла следует изучить структуру капиллярного слоя, определяющего проскальзывание жидкости.

Отказ от условия прилипания расширяет возможности математического моделирования отрывных течений при малых числах Рейнольдса.

**Заключение.** Если глобальные теории, описывающие течение, в целом, опираются на проведение численных расчетов, то локальные теории, раскрывающие особенности решения на складках, основываются на применении асимптотических методов. Представительница последних – теория конических и квазиконических течений – предоставляет мощный аппарат для исследования как невязких, так и вязких течений, позволяющий выяснять их свойства и разрешать парадоксы. Она может быть эффективно использована при численном решении трехмерных задач об обтекании тел с острой кромкой.

В рамках течений идеальной жидкости установлен критерий появления сингулярного отрыва потока в окрестности вершины клина в зависимости от угла раствора клина. Анализ показал, в частности, что схема отрывного обтекания крыльев с одинарными, сходящими с кромок вихревыми пеленами общей циркуляции  $\Gamma_1$  некорректна [19]. На самом деле должен возникнуть вторичный отрыв неизвестной формы с общей циркуляцией  $\Gamma_2$ , причем  $\Gamma_2/\Gamma_1 = O(1)$ . Следовательно, погрешность соответствующих численных расчетов нельзя сделать малой, она всегда порядка  $O(1)$ .

Уравнения конического течения допускают линеаризацию, когда завихренность мала. В этом случае она переносится по линиям тока потенциального течения как примесь.

В отличие от конического течения, которое является точным, квазиконическое решение всегда приближенное.

Установлено, что отрыв ползущего течения моделируется в рамках линейных уравнений Стокса.

Проведенное исследование показывает, что теория конических и квазиконических течений – одна из древних теорий гидродинамики, ещё далека от завершения. Существуют целые классы неизученных конических и квазиконических течений, одни из которых (ламинарные) обнаружены в настоящей работе, а другие (турбулентные конические течения при  $\sigma = 0$ ) еще нуждаются в изучении.

Автор признателен В.В.Щенникову, А.В.Зубцову и А.П.Быркину за плодотворные дискуссии, рецензенту за ценные замечания и научному редактору В.А.Алексину за скрупулезную работу над рукописью.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Франкль Ф.И., Карпович Е.А. Газодинамика тонких тел. М.–Л.: Гостехиздат, 1948. 175 с.
2. Никольский А.А. Теоретические исследования по механике жидкости и газа // Тр. ЦАГИ. 1982. Вып. 2122. 285 с.
3. Булах Б.М. Нелинейные конические течения. М.: Наука, 1970. 343 с.
4. Зубцов А.В. Асимптотическая модель осесимметричного распада вихревой нити в несжимаемой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 6. С. 47–52.
5. Fernandez-de la Mora J., Fernandes-Feria R., Peres-Saborid M., Barrero A. Conically similar swirling flows at high Reynolds numbers // Quart. J. Mech. and Appl. Math. 1999. V. 52. Pt. 1. P. 1–53.
6. Бетяев С.К. Гидродинамика: проблемы и парадоксы // Успехи физ. наук. 1995. Т. 165. № 3. С. 299–330.
7. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 758 с.
8. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310 с.
9. Сычев В.В., Рубан А.И., Сычев Вик.В. и др. Асимптотическая теория отрывных течений. М.: Наука, 1987. 255 с.
10. Баренблатт Г.И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Л.: Гидрометеоиздат, 1982. 256 с.
11. Бетяев С.К., Гайфуллин А.М. Спиральные вихри. М.: Изд. отд. ЦАГИ, 2001. 36 с.
12. Аэродинамика частей самолета при больших скоростях / Под ред. А.Ф. Доновэна и Т.Р. Лоуренса. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. 702 с.
13. Hasimoto H., Sano O. Stokeslets and eddies in creeping flow // Annu Rev. Fluid Mech. 1980. V. 12. P. 335–363.
14. Dean W.R., Montagnon P.E. On the steady motion of viscous liquid in a corner // Proc. Cambr. Philos. Soc. 1949. V. 45. № 3. P. 389–394.
15. Moffatt H.K. Viscous and resistive eddies near a sharp corner // J. Fluid Mech. 1964. V. 18. Pt. 1. P. 1–18.
16. De Gennes P.G. Wetting: statics and dynamics // Rev. Mod. Phys. 1985. V. 57. № 9. P. 827–863.
17. Байокки К., Пухначев В.В. Задачи с односторонними ограничениями для уравнения Навье–Стокса и проблема динамического краевого угла // ПМТФ. 1990. № 2. С. 27–40.
18. Воинов О.В. О растекании капли вязкой жидкости по поверхности под действием капиллярных сил // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 5. С. 767–775.
19. Белоцерковский С.М., Ништ М.И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев несжимаемой жидкостью. М.: Наука, 1978. 351 с.