

УДК 532.517.3

© 2003 г. А. А. ПАВЕЛЬЕВ, А. И. РЕШМИН, С. Х. ТЕПЛОВДСКИЙ, С. Г. ФЕДОСЕЕВ

**О НИЖНЕМ КРИТИЧЕСКОМ ЧИСЛЕ РЕЙНОЛЬДСА ДЛЯ ТЕЧЕНИЯ  
В КРУГЛОЙ ТРУБЕ**

Проведены экспериментальные исследования течения в круглой трубе при числах Рейнольдса, превышающих значение, при котором коэффициенты сопротивления, полученные по формуле Блазиуса для ламинарного течения и формуле Прандтля для турбулентного течения, равны между собой. Соответствующее число Рейнольдса, построенное по среднерасходной скорости и диаметру трубы, близко к 1000. Опыты проводились при высоком уровне пульсаций на входе, создаваемых путем подачи газа в трубу через отверстие, диаметр которого в несколько раз меньше диаметра трубы. Критическое число Рейнольдса определялось в данных экспериментах как независящее от расстояния до входа значение числа Рейнольдса, при котором в зависимости от отношения скорости на оси трубы к среднерасходной скорости от числа Рейнольдса величина этого отношения отклоняется от значения, равного двум. При максимальном отношении площади трубы к площади отверстия, через которое газ подавался в трубу, равном ~26, критическое число Рейнольдса было близко к 2300. При увеличении площади отверстия в пять раз критическое число Рейнольдса увеличивалось приблизительно на 4%.

Выполнены эксперименты при числах Рейнольдса, меньших 2000, в которых после того как в трубе при высоком уровне входных пульсаций сформировалось течение, близкое к ламинарному, в поток вносилось возмущение с помощью установленного по диаметру трубы цилиндрического стержня с диаметром в 10–20 раз меньше диаметра трубы. При этом для чисел Рейнольдса, превышающих 1000, на расстоянии от стержня, равном 50 диаметрам трубы, отношение скорости на оси к среднерасходной скорости было меньше двойки, а на больших расстояниях от стержня это отношение вновь стремилось к значению, равному двум. Постановка стержня приводила к уменьшению критического числа Рейнольдса приблизительно на 12%.

*Ключевые слова:* течение в круглой трубе, турбулентный и ламинарный режимы, критическое число Рейнольдса, эксперимент.

Число Рейнольдса ( $Re$ ), выше которого в трубе реализуется установившееся турбулентное течение, зависит от характеристик пульсаций скорости на начальном участке трубы. Эти пульсации могут определяться как условиями втекания в трубу, так и конструктивными особенностями начального участка трубы, например, шероховатостью поверхности, наличием в потоке твердых тел, вдувом газа со стенки, вибрацией трубы и т.д. Разнообразие условий, при которых реализуется течение в трубах, определяет большое различие в значениях  $Re$ , при которых наблюдается переход от ламинарного течения к турбулентному.

Большое внимание исследователей привлекает вопрос о так называемых верхнем и нижнем критических числах Рейнольдса [1–6]. Под верхним критическим числом Рейнольдса подразумевается такое число Рейнольдса, выше которого установившееся течение может быть только турбулентным, как бы малы не были пульсации скорости во входном участке трубы. Эксперименты показывают, что уменьшение возмущений во входном участке трубы приводит к росту числа Рейнольдса, при котором наблюдается ламинарное течение. К настоящему времени ламинарное течение в экспериментах наблюдалось до  $Re \approx 10^5$ . Это позволяет предположить, что дальнейшее уменьшение возмущений, вводимых в поток, приведет к дальнейшему увели-

чению числа Рейнольдса, при котором можно наблюдать установившееся ламинарное течение. Поэтому есть основания считать, что верхнего критического числа Рейнольдса не существует.

Под нижним критическим числом Рейнольдса подразумевается такое число Рейнольдса, выше которого возможно установившееся турбулентное течение, а ниже которого установившееся течение может быть только ламинарным независимо от величины и структуры пульсаций скорости на входном участке трубы. Это означает, что при увеличении возмущений, вводимых в поток, числа Рейнольдса, при которых можно наблюдать установившееся турбулентное течение, уменьшаются только до некоторого предела, в качестве которого многие авторы называют различные величины в диапазоне 1760–2300 [1–11]. Только в монографии [7] отмечается, что значения нижнего критического числа Рейнольдса находятся в диапазоне 1000–2300.

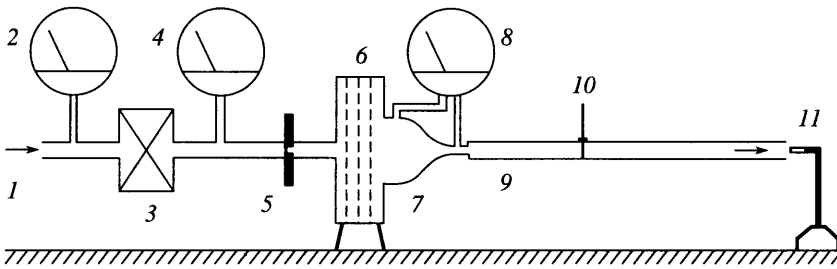
Различия в профиле скорости и коэффициенты сопротивления ламинарного и турбулентного течений с уменьшением числа Рейнольдса уменьшаются. Число Рейнольдса, при котором коэффициенты сопротивления, вычисленные по формуле Блазиуса для ламинарного течения и формуле Прандтля для турбулентного течения, равны, близко к 1000. Таким образом исследование вопроса о существовании и значении нижнего критического числа Рейнольдса сводится к исследованию течения при  $1000 \leq Re \leq 1800$ .

В данном случае речь идет не о переходе от ламинарного течения к турбулентному вследствие потери устойчивости первого, а о возможности существования установившегося турбулентного течения в условиях, когда пульсации на входном участке значительно превышают пульсации при установившемся турбулентном течении. В этом случае на участке, предшествующем установившемуся течению, происходит не рост, а уменьшение интенсивности пульсаций, а ламинарного режима течения на входном участке не существует. Вопрос состоит только в том, будут ли пульсации, существующие на входном участке, для рассматриваемого диапазона чисел Рейнольдса стремиться к нулю в случае установившегося ламинарного течения или к значениям, характерным для установившегося турбулентного режима течения.

Если пульсации, существующие на входном участке, будут стремиться к нулю, то можно предположить, что при  $Re \leq 1800$  пульсационное движение, возникшее из-за неустойчивости к конечным возмущениям сдвигового ламинарного течения, сформировавшегося на некотором расстоянии от входа в трубу, также может на больших расстояниях от источника возмущений угасать. В этом случае неустойчивость установившегося ламинарного течения может не приводить к установившемуся турбулентному течению.

В работе [12] с использованием трехпараметрической модели турбулентности были выполнены расчеты течения в трубе, которые позволили найти зависимость критического числа Рейнольдса,  $Re^*$ , от интенсивности и масштаба пульсационного движения на входе в трубу. Эти расчеты показали, что при  $Re < 1000$  при любых характеристиках пульсационного движения на входе вдали от начала устанавливается ламинарное течение. При  $Re > 1000$  в расчетах вдали от входа реализовывалось установившееся турбулентное течение. Однако это происходило при задании в начальном сечении трубы очень высоких уровней пульсаций скорости, осуществление которых в экспериментах является затруднительным. Тем не менее возникло предположение, что увеличение входных пульсаций в эксперименте до уровней, значительно превышающих те, что были в ранее проводившихся экспериментах, приведет к реализации установившегося турбулентного течения при  $Re < 1800$ .

В настоящих экспериментах формирование пульсационного движения на входе в трубу производилось с помощью подачи газа через отверстие, диаметр которого был меньше, чем диаметр трубы. Кроме больших пульсаций скорости на входе предполагалось воздействовать на поток там, где уже сформировался профиль скорости,



Фиг. 1. Схема экспериментальной установки. 1 – подача воздуха от магистрали высокого давления; 2 – манометр высокого давления; 3 – редуктор ручной; 4 – манометр редуцированного давления; 5 – дроссельная шайба; 6 – успокоительная камера; 7 – сопловая вставка; 8 – дифференциальный манометр (на сопловой вставке); 9 – цилиндрическая труба; 10 – место установки цилиндрического стержня для внесения возмущения в поток; 11 – термоанемометр для измерения скорости в центре выходного сечения трубы

близкий к параболическому, вводя возмущения на некотором удалении от входа с помощью постановки по диаметру трубы цилиндрического стержня с диаметром значительно меньше диаметра трубы. Стержень устанавливался на расстоянии 100 калибров от входа в трубу. Как показывают расчеты для ламинарного течения при  $Re < 2000$ , отношение скорости на оси трубы к среднерасходной скорости на таких расстояниях от входа отличается от значения этого отношения для профиля Пуазейля на несколько процентов.

**1. Экспериментальная установка.** Схема установки, на которой проводились эксперименты, приведена на фиг. 1. Воздух в установку подавался от магистрали с давлением не менее 5 МПа через ручной редуктор и шайбу диаметром 0.8 мм, обеспечивающую сверхкритический перепад давления в том диапазоне расходов, который использовался при проведении экспериментов. Изменение и установка расхода производились с помощью ручного редуктора. Далее воздух проходил через успокоительную камеру, обеспечивающую на выходе равномерный (с точностью 1%) профиль скорости и низкий уровень пульсаций скорости. Интенсивность продольных пульсаций скорости на выходе из успокоительной камеры была менее 1%. Затем устанавливалась сменная сопловая вставка, на которой проводились измерения перепада давления. Входной диаметр сопловых вставок был равен 60 мм. Выходные диаметры сопловых вставок составляли 3.91 и 8.74 мм, что соответствует площадям выходного сечения 12 и 60 мм<sup>2</sup>.

Переход к турбулентности исследовался на трубах диаметром 10 и 20 мм. При этом отношении площади сопла, через которое газ подается в трубу, к площади сечения трубы и соответственно отношению средней скорости в трубе к средней скорости на выходе из сопловой вставки изменялось от 1.3 до 26. Длина труб выбиралась из условия формирования в случае ламинарного течения параболического профиля скорости на выходе из трубы. Для длины, при которой максимальная скорость на оси трубы отличается от максимального значения для параболического профиля на 1%, справедливо соотношение  $L/D = 0.06 \cdot Re$ . Здесь  $L$  – длина трубы,  $D$  – диаметр трубы.  $Re$  построено по диаметру трубы и среднерасходной скорости в трубе.

Поскольку в данной работе предполагалось исследовать течения при  $Re < 2500$ , длина трубы должна превышать 150 калибров. Для трубы диаметром 20 мм максимальная длина составляла 3.5 м. Для трубы диаметром 10 мм максимальная длина также бралась 3.5 м, что составляло 350 калибров. Среднерасходная скорость в трубе диаметром 10 мм при  $Re = 1000$  была близка к 1.5 м/с. Плотность и вязкость воз-

духа определялись по температуре и давлению окружающей среды. Температура исследуемого потока в трубе не отличалась от температуры окружающей среды более чем на  $1^\circ$ .

Для исследования устойчивости течения с профилем скорости, близким к параболическому, сформировавшимся на некотором расстоянии от входа в трубу, в поток по диаметру трубы устанавливались сменные цилиндрические стержни диаметром 1 и 0.5 мм, для чего в стенке трубы делались отверстия. В данной работе приводятся экспериментальные результаты для случая, когда стержни устанавливались в трубу диаметром 10 мм на расстоянии 1 м от входа. Труба была секционированной, что позволило проводить измерения на срезе трубы на различных расстояниях от входа.

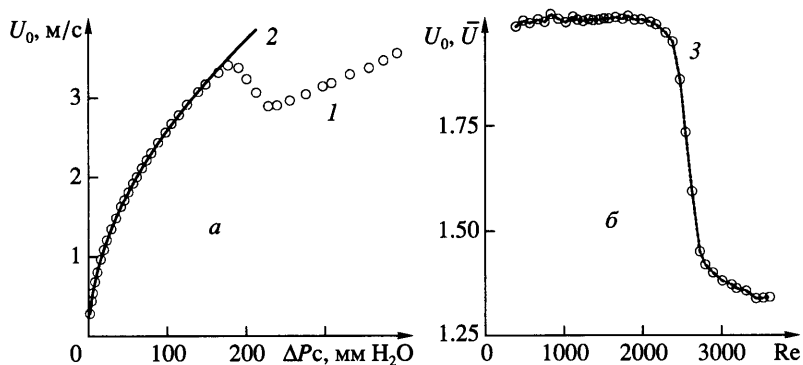
Изменение режима течения определялось по изменению формы профиля скорости в трубе, а именно по изменению отношения скорости на оси трубы  $U_0$  к среднерасходной скорости  $\bar{U}$ . Для этого в эксперименте измерялась скорость на оси в выходном сечении трубы и перепад давления на сопловой вставке. Измерение перепада давления на сопловой вставке  $\Delta P_c$  позволяло определить скорость вне пограничного слоя на срезе сопловой вставки. Так как скоростной напор на входе в сопловую вставку отличался от скоростного напора на выходе из вставки более чем в 1000 раз, при определении скорости на оси в выходном сечении вставки скорость на входе в сопловую вставку можно не учитывать.

Величина  $W = \sqrt{2\Delta P_c/\rho} (F_c/F_T)$ , где  $\rho$  – плотность воздуха,  $F_c, F_T$  – площади выходного сечения сопловой вставки и сечения трубы из-за пограничного слоя на стенке вставки выше, чем  $\bar{U}$ . Поэтому при длине трубы 3.5 м и ламинарном течении отношение скорости на оси трубы  $U_0$  к  $W$  будет несколько меньше двух. С увеличением скорости толщина пограничного слоя на стенке вставки будет уменьшаться и при ламинарном течении в трубе  $U_0/W$  будет возрастать и приближаться к двойке.

Для определения  $\bar{U}$  по перепаду давления на сопловой вставке использовалась тарировка, которая проводилась следующим образом. Построив график зависимости скорости на оси в выходном сечении трубы от перепада давления на сопловой вставке (фиг. 2) можно выделить три характерных участка, которые соответствуют ламинарному, переходному и турбулентному режимам течения. Если график построен для трубы с длиной большей, чем длина, на которой вырабатывается профиль Пуазейля, т.е. большей, чем  $0.06 \cdot \text{Re} \cdot D$ , то та часть графика, которая соответствует ламинарному течению, может рассматриваться как тарировка сопловой вставки, так как в этом случае скорость на оси вдвое больше, чем среднерасходная скорость. Аппроксимируя зависимость скорости на оси от перепада давления на сопловой вставке на ламинарном участке, можно использовать полученную аппроксимацию для приближенного определения среднерасходной скорости по перепаду давления на сопловой вставке в более широком диапазоне расходов.

Перепад давления на сопловой вставке измерялся с помощью наклонного спиртового манометра или при больших перепадах давления с помощью U-образного водяного манометра. Для измерения осевой скорости на выходе трубы использовались (в разных вариантах) либо трубка полного напора с выходом на наклонный спиртовой манометр, либо термоанемометр DISA 55M12. В тех случаях, когда в одних и тех же условиях использовались оба метода, экспериментальные данные хорошо согласовывались между собой.

На фиг. 2 приведены экспериментальные результаты и их обработка, полученные для трубы диаметром 20 мм и длиной 3.5 м. Площадь выходного сечения сопловой вставки равнялась  $12 \text{ мм}^2$ . На фиг. 2,а приведена зависимость скорости на оси трубы  $U_0$  от перепада давления на сопловой вставке  $\Delta P_c$  (обозначена точками). Экс-

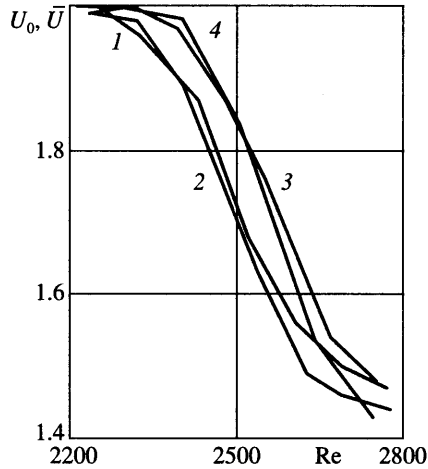


Фиг. 2. Способ представления экспериментальных результатов (труба диаметром 20 мм длиной 3.5 м при выходном сечении сопловой вставки 12 мм<sup>2</sup>): 1 – зависимость скорости на оси  $U_0$ , измеренной термоанемометром, от перепада давления на сопловой вставке ( $\Delta P_c$ ); 2 – аппроксимирующая функция; 3 – зависимость отношения осевой скорости к среднерасходной скорости от числа Рейнольдса

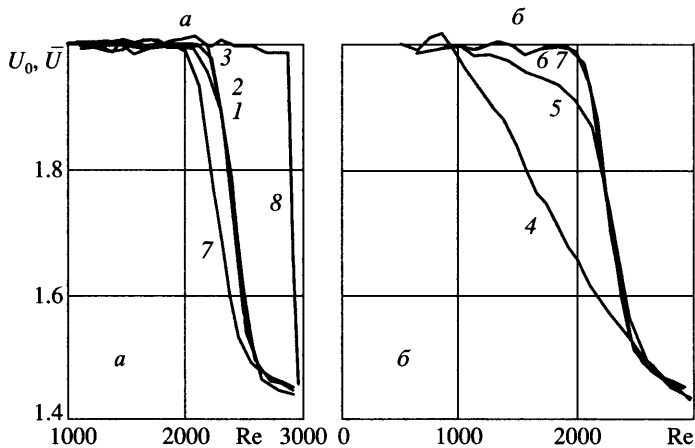
периментальная зависимость в пределах ламинарного участка хорошо аппроксимируется функцией вида  $U_0 = 2W(1 - \Delta P_c^B)^2$ . Для экспериментальных данных, представленных на фиг. 2, а,  $U_0 = 2\bar{U} = 2W(1 - 0.146\Delta P_c^{-0.135})^2$ , где  $U_0$  в м/с,  $\Delta P_c$  в мм H<sub>2</sub>O. Эта функция показана линией на фиг. 2, а. Значения входящих сюда коэффициентов рассчитывались методом наименьших квадратов для  $\Delta P_c$  в диапазоне 0–160 мм H<sub>2</sub>O, включающем 25 экспериментальных точек. Среднее относительное отклонение в данном случае меньше 0.5%, максимальное – меньше 2%. Во всех случаях для расходов меньших тех, при которых происходило отклонение от ламинарного режима течения, точность тарировки определялась разбросом экспериментальных точек. На фиг. 2, б приведена зависимость  $U_0/\bar{U}$  от Re, построенная с помощью такой аппроксимации и экстраполяции аппроксимирующей функции на переходный и турбулентный участки. На обоих графиках четко видны эти три режима течения: ламинарный, переходный и турбулентный. Данные, приведенные на фиг. 2, б, позволяют оценить величины чисел Рейнольдса, при которых происходит смена режимов течения и сопоставить их значения при различных условиях.

**2. Экспериментальные результаты.** Влияние выходного диаметра сопловой вставки на переход к установившемуся турбулентному течению исследовалось на трубах диаметром 20 и 10 мм. На фиг. 3 приведены зависимости  $U_0/\bar{U}(Re)$ , полученные на трубах  $D = 20$  мм длиной 3 и 3.5 м и двухсопловых вставок с площадями выходных сечений 12 и 60 мм<sup>2</sup>. Для каждой сопловой вставки экспериментальные данные для труб длиной 3 и 3.5 м практически совпадают.

Будем называть критическим числом Рейнольдса ( $Re^*$ ) такое, начиная с которого в зависимости  $U_0/\bar{U}(Re)$ , построенной при таком расстоянии от входа в трубу, увеличение которого уже не влияет на результат, на фоне экспериментальной погрешности четко наблюдается отклонение величины отношения скоростей от значения равного двум. В данном случае  $Re^* \approx 2250$  и для двух сопловых вставок различается приблизительно на 100. Столь незначительное различие наблюдается при изменении скорости подачи газа в трубу в 5 раз.

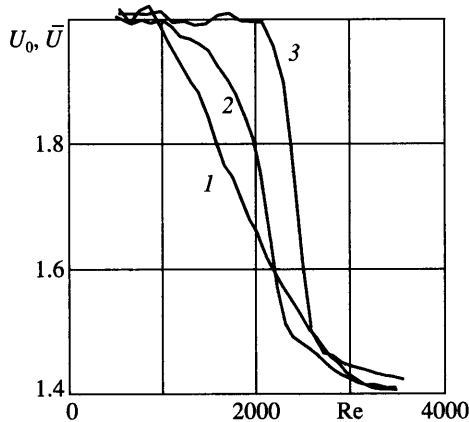


Фиг. 3. Зависимость отношения осевой скорости  $U_0$  к среднеразходной скорости  $\bar{U}$  на выходе трубы  $D = 20$  мм от числа Рейнольдса: 1, 2 – сопловая вставка сечением  $F_c = 12$  мм<sup>2</sup>,  $L = 3.5$  и 3 м. 3, 4 – сопловая вставка сечением  $F_c = 60$  мм<sup>2</sup>,  $L = 3.5$  и 3 м



Фиг. 4. Влияние длины трубы  $D = 10$  мм, площади выходного сечения сопловой вставки и наличия стержня  $d = 1$  мм на  $U_0/\bar{U}$  (Re): 1, 2, 3 –  $F_c = 12$  мм<sup>2</sup>, без стержня;  $L = 1.5$ ; 2; 3 м (соответственно). 4, 5, 6, 7 –  $F_c = 12$  мм<sup>2</sup>, стержень;  $L = 1.5$ , 2, 3, 3.5 м (соответственно). 8 –  $F_c = 60$  мм<sup>2</sup>, без стержня,  $L = 3$  м

На фиг. 4 представлены зависимости  $U_0/\bar{U}$  (Re) для различных длин труб и при наличии или отсутствии цилиндрического стержня, создающего возмущения в том месте, где уже сформировался профиль скорости, близкий к ламинарному. Результаты экспериментов показывают, что на расстоянии 0.5 м от стержня значение  $U_0/\bar{U}$  отклоняется от значения, равного 2, начиная с числа Рейнольдса, равного  $\sim 1000$ . При увеличении расстояния от стержня до среза трубы числа Рейнольдса, при которых значение  $U_0/\bar{U}$  отклоняется от значения, равного 2, возрастают и на расстояниях от



Фиг. 5. Влияние стержня на  $U_0/\bar{U}(Re)$  для трубы  $D = 10$  мм и  $L = 1.5$  м.  $F_c = 12$  мм<sup>2</sup>. Диаметр стержня: 1 – 1 мм; 2 – 0.5 мм; 3 – без стержня

входа, превышающих 250 калибров, не зависят от расстояния от входа в трубу и  $Re^*$  имеет значение несколько меньшее 2000.

Полученные результаты позволяют предположить, что постановка стержня в поток в таком месте, где уже сформировался профиль скорости, близкий к ламинарному, приводит к турбулизации потока, однако возникшее турбулентное движение не является установившимся и постепенно угасает. На больших расстояниях течение со стержнем отклоняется от ламинарного при числах Рейнольдса несколько меньших, чем при отсутствии стержня, т.е.  $Re^*$  при наличии стержня несколько меньше, чем без стержня.

На фиг. 5 приведена зависимость  $U_0/\bar{U}(Re)$  для расстояния 0.5 м от стержня при постановке стержней диаметром 0.5 и 1 мм. На этой же фигуре приведена зависимость  $U_0/\bar{U}(Re)$  в отсутствие стержня на расстоянии 1.5 м от входа. Из результатов, представленных на фиг. 5, следует, что зависимость  $U_0/\bar{U}(Re)$  при постановке стержней сильно отличается от аналогичной зависимости без постановки стержня. Причем это справедливо даже для стержня диаметром 0.5 мм. Для обоих стержней число Рейнольдса, при котором величина  $U_0/\bar{U}$  начинает отличаться от 2, близко к 1000. Отметим, что в этом случае число Рейнольдса, построенное по диаметру стержня  $d$  и среднерасходной скорости, равно 50 и 100, если  $d = 0.5$  и 1 мм соответственно.

**3. Обсуждение результатов.** При формировании пульсационного движения на входе в трубу путем подачи газа через отверстие, диаметр которого меньше диаметра трубы, критическое число Рейнольдса изменялось в диапазоне 2900–2250 при изменении отношения площади сечения трубы к площади отверстия в диапазоне 1.3–26, т.е. если при одном и том же диаметре трубы изменять площадь отверстия, через которое подается газ, в 20 раз,  $Re^*$  изменится всего приблизительно в 1.3 раза. При этом наименьшие значения  $Re^*$  находятся в диапазоне значений, приведенных в [3] для случая, когда площадь отверстия была в 2 раза меньше площади трубы.

Реализация турбулентного течения при подаче газа в трубу через отверстие, площадь которого в 26 раз меньше площади сечения трубы и соответственно при скорости подачи в 26 раз больше среднерасходной, не позволяет говорить о том, что турбулентное течение возникает как результат неустойчивости ламинарного течения в

трубе, как неоднократно отмечалось в работах, посвященных этой проблеме, начиная с работы [1]. В данном случае при формировании установившегося турбулентного течения ламинарное течение вообще отсутствует. Но и при неустойчивости ламинарного течения не обязательно возникает установившееся турбулентное течение. Этот вывод подтверждается результатами экспериментов, в которых при числах Рейнольдса меньших 2000, там, где вдали от входа устанавливалось ламинарное течение, в поток вводился стержень, диаметр которого был в 10–20 раз меньше диаметра трубы. В этом случае наблюдалось отклонение отношения скорости на оси к среднерасходной скорости от значения, равного 2, при числах Рейнольдса больших 1000 и на расстоянии от стержня, равном 50–100 диаметров трубы. Это свидетельствует о том, что развитие возмущений, возникших при обтекании стержня, привело к изменениям формы профиля скорости. В результате сформировался профиль скорости, характерный для турбулентного движения в трубе. Таким образом, можно утверждать, что ламинарный профиль скорости неустойчив к возмущениям, возникающим при обтекании стержня. Однако в данных экспериментах при  $Re < 1900$  неустойчивость ламинарного профиля скорости не приводит к возникновению установившегося турбулентного течения в трубе. При увеличении расстояния от стержня в потоке вновь восстанавливается профиль скорости, характерный для установившегося ламинарного течения. Таким образом, возникшее за стержнем при  $Re < 1900$  турбулентное течение оказывается в некотором смысле неустойчивым, и поток вновь становится ламинарным.

Экспериментальные результаты показывают также, что критическое число Рейнольдса при установке стержня несколько ниже, чем без стержня. Можно предположить, что критическое число Рейнольдса зависит не только от амплитуды турбулентных пульсаций, но и от структуры пульсационного движения на входе. Поэтому возникает вопрос о том, возможно ли так сформировать турбулентное движение в канале, чтобы установившееся турбулентное течение реализовалось при меньших числах Рейнольдса, чем получено в выполненных к настоящему времени экспериментах.

**Заключение.** Выполненные в данной работе эксперименты позволяют сделать следующие выводы.

Увеличение интенсивности пульсаций на входе в трубу слабо влияет на значение критического числа Рейнольдса. При самой большой интенсивности пульсаций на входе, соответствующей наименьшей площади отверстия, через которое газ подавался в трубу, критическое число Рейнольдса составило величину, близкую к 2300, что согласуется с ранее выполненными экспериментами.

Внесение возмущений в поток с профилем скорости, близким к параболическому, путем постановки цилиндрического стержня с диаметром в 10–20 раз меньше диаметра трубы приводит к формированию за стержнем профиля скорости, в котором отношение скорости на оси к среднерасходной скорости, начиная с числа Рейнольдса, приблизительно равного 1000, отличается от значения, характерного для ламинарного течения и равного 2. Таким образом, можно утверждать, что ламинарный профиль скорости при числах Рейнольдса больших 1000 неустойчив. По мере удаления от места внесения возмущения профиль скорости, характерный для установившегося ламинарного течения, восстанавливается.

Критическое число Рейнольдса при постановке стержня меньше, чем без него, и имеет значение несколько меньшее 2000. Эти результаты позволяют предположить, что значение критического числа Рейнольдса зависит от способа формирования пульсационного движения на входном участке трубы, но оставляют открытым вопрос о существовании и значении нижнего критического числа Рейнольдса.

Авторы выражают глубокую признательность А.Г. Введенскому и Д.А. Введенскому за помощь в подготовке и проведении экспериментов.



Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 02-01-00375).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рейнольдс О. Динамическая теория движения несжимаемой вязкой жидкости и определенные критерия // Проблемы турбулентности. М.; Л.: ОНТИ, 1936. С. 185–227.
2. Титъенс О. Гидро- и аэромеханика. По лекциям профессора Л. Прандтля. Т. 2. Движение жидкостей с трением и технические приложения. М.; Л.: ОНТИ, 1936. 311 с.
3. Шиллер Л. Движение жидкости в трубах. М.; Л.: ОНТИ, 1936. 230 с.
4. Прандтль Л. Гидроаэромеханика. М.: Изд. Иностр. лит., 1951. 576 с.
5. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 711 с.
6. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности. Ч. 1. М.: Наука, 1965. 639 с.
7. Чугаев Р.Р. Гидравлика. Техническая механика жидкости. Л.: Энергоиздат, 1982. 672 с.
8. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
9. Tritton D.J. Physical Fluid Dynamics. N.Y.: Clarendon Press, Oxford Univ. Press, 1988. 519 p.
10. Фабер Г.Е. Гидроаэродинамика. Постмаркет. М., 2001. 559 с.
11. Darbyshire A.G., Mullin T. Transition to turbulence in constant mass-flux pipe flow // J. Fluid Mech. 1995. V. 289. С. 83–114.
12. Павельев А.А., Решмин А.И. Переход к турбулентности на начальном участке круглой трубы // Изв. РАН. МЖГ. 2001. № 4. С. 113–121.

Москва

Поступила в редакцию  
24.XII.2002