

УДК 532.135:532.522

© 2003 г. А. Н. РОЖКОВ

ПАРАДОКС “САМОИСТЕЧЕНИЯ” СВОБОДНОЙ СТРУИ ЖИДКОСТИ

Теоретически анализируется влияние эффектов накопления обратимых деформаций на величину напорного давления при истечении упругих и упруговязких жидкостей из сужающихся каналов. Показано, что в зависимости от реологических особенностей жидкостей может происходить как увеличение напорного давления, так и его уменьшение по сравнению с давлением, определяемым формулой Бернулли. В частности, в рамках модельных представлений возможна ситуация, когда истечение жидкости с конечной скоростью происходит без приложения напорного давления (парадокс “самоистечения”). На примере канала с резким сужением прослежен переход к различным режимам истечения упруговязкой жидкости в зависимости от определяющих параметров.

Ключевые слова: струя, жидкость, канал, упруговязкая жидкость.

1. Эффекты упругих деформаций при истечении свободных струй упруговязких жидкостей. Во многих технологических процессах переработки полимерных материалов и при функционировании разного рода гидротехнических устройств имеет место истечение упруговязких жидкостей из сужающихся каналов или фильер [1]. Как показывают практика и лабораторные исследования, истечение упруговязких полимерных жидкостей может сопровождаться рядом гидродинамических эффектов. Например, может происходить увеличение сечения (утолщение) струи на выходе из сужающегося сопла (эффект Баруса) [2], возникновение неустойчивости течения при низких числах Рейнольдса [1–3]. При прочих равных условиях напорное давление при истечении упруговязких жидкостей может существенно отличаться от напорного давления ньютоновских жидкостей той же самой вязкости [1]. Небольшие добавки высокомолекулярного полимера в жидкости могут повысить устойчивость формируемой струи по сравнению со случаем чистого растворителя [4–6].

Эти же добавки кардинально модифицируют процесс импульсного метания микроструй жидкости. В результате действия микродобавок полимера удается сформировать единую отдельно летящую каплю, в отличие от случая чистого растворителя, когда достаточно протяженная струя распадается в полете на множество вторичных малых капель [7, 8]. При экструзии высоковязких пластиков по мере увеличения скорости экструзии наблюдается развитие дефектов поверхности вытекающей струи сначала в форме шероховатостей малого масштаба (“акуля кожа”), затем большого масштаба (“зубы дракона”), и, наконец, при больших скоростях дефекты приобретают форму высокоамплитудных хаотических волн [9]. При истечении растворов полимеров умеренной концентрации из горизонтального щелевого сопла при превышении некоторой критической скорости первоначально гладкая плоская струя становится существенно ребристой, причем ребра располагаются вдоль направления движения [10, 11]. Детали некоторых перечисленных и ряда других эффектов можно найти в [3, 12].

Возникающие эффекты многообразны, а сами процессы истечения настолько сложны, что не представляется возможным однозначно трактовать, следствием каких факторов эти эффекты являются. Возможно, что в ряде случаев важна именно

определенная совокупность факторов. Поэтому может оказаться эффективным подход, когда сложное явление рассматривается “по частям”. Каждая такая часть, чаще всего, не может быть реализована изолированно в реальной ситуации. Но предварительные оценки индивидуальной роли каждого фактора позволяют затем путем “суперпозиции” восстановить весь процесс в целом.

В сложном движении жидкости в сужающемся канале можно выделить конвергентную (стоковую или входную) составляющую течения. Элементы жидкости при этом подвергаются растяжению вдоль направления движения. Сами продольные (или элонгационные) деформации и их скорости определяются кинематикой течения и могут быть весьма велики.

С другой стороны, известно, что полимерные жидкости именно в условиях продольных деформаций наиболее ярко демонстрируют поведение, которое не укладывается в рамки модели ньютоновской жидкости [13, 14]. В качестве примера можно привести увеличение эффективной продольной вязкости в тысячу и более раз при распаде струй и жидких мостиков растворов полимеров [15].

Таким образом, здесь рассматривается вид течения, который является перспективным в плане поиска новых гидродинамических эффектов. И в то же самое время, этот вид течения может быть использован для тестирования развиваемых подходов в реологии высокоэластичных полимерных жидкостей, а также как “инструмент” для исследования реологических свойств сложных жидкостей.

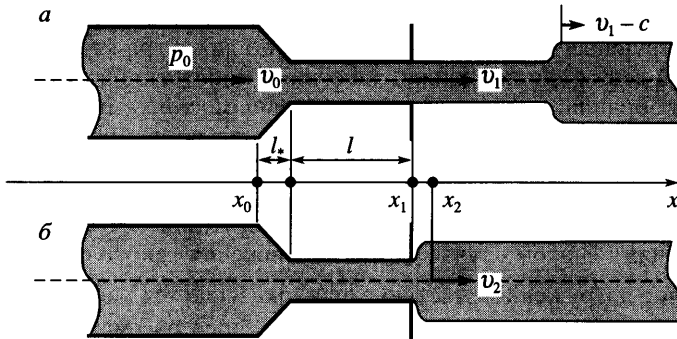
2. Одномерное описание движения жидкости в канале. В настоящей работе проведено теоретическое исследование динамики течения упруговязкой жидкости в сужающемся сопле (канале), на выходе из которого формируется свободная струя. При этом полагается, что трение жидкости о стенки канала отсутствует. Основные подходы сформулированы ранее в [16-18]. Внимание сосредоточено на выявлении роли элонгационных деформаций в процессе течения. Такого рода деформациям жидкость подвергается в результате того, что поперечное сечение сопла уменьшается по мере приближения к выходу и элементы жидкости растягиваются в направлении течения. Возникающие при деформировании напряжения могут вносить существенный вклад в динамику движения.

Особое значение эффект продольных деформаций может иметь в случае растворов полимеров – жидкостей, способных накапливать гигантские обратимые деформации и в то же время проявляющих псевдопластичность при сдвиге [19, 20]. Последнее свойство обеспечивает профиль скорости, близкий к прямоугольному (см. [21]), что соответствует условию проскальзывания жидкости на стенке канала. В случае, когда эффекты элонгационной упругости доминируют, а трение о стенки незначительно, можно следовать одномерному (или гидравлическому) приближению, согласно которому все величины считаются постоянными по поперечному сечению потока. Плоский профиль скорости может быть также целенаправленным образом организован с использованием разного рода технических средств (сверхтекучих смазок, воздушных прослоек, подвижных стенок и т.д.); по крайней мере отсутствуют какие-либо принципиальные ограничения, не позволяющие реализовать указанную ситуацию. Для канала переменного сечения уравнения движения в этом случае принимают вид [16–18, 22, 23]

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (\tau - p) - \frac{\tau}{v} \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.1)$$

$$vf = q$$

где t – время, x – продольная координата канала, v – скорость течения жидкости, ρ – плотность жидкости (предполагается постоянной), q – объемный расход, p – давление, τ – осевая компонента тензора избыточных напряжений (предполагается, что



Фиг. 1. Схема вытеснения жидкости из сужающегося канала: а – “сверхзвуковое” истечение, б – “дозвуковое” истечение

из-за преимущественно элонгационного характера деформации только эта компонента отлична от нуля). Уравнения (2.1) описывают также движение свободной струи в рамках квазиодномерного приближения [24].

3. Граничные условия. Ограничимся случаем стационарного течения в канале несжимаемой жидкости. Решение уравнений (2.1) определяет перепад давления, необходимый для истечения струи с заданной скоростью, если заданы граничные условия в какой-нибудь точке канала. Данная постановка задачи подобна той, что принята в [18] при рассмотрении задачи о движении упруговязкой жидкости в канале с периодическим изменением сечения. Отличие состоит в том, что граничные условия в [18] следуют из условия периодичности, в данном же случае для задания граничных условий необходимо рассмотреть процессы на входе в сужающуюся часть канала и на выходе из нее.

На входе в сужающуюся часть канала в точке x_0 принимается условие, что жидкость находится в разгруженном состоянии ($\tau_0 = 0$), а вытеснение жидкости осуществляется под действием напорного давления p_0 (фиг. 1). Здесь и далее – индексы 0, 1, 2 идентифицируют величины, относящиеся соответственно к входу в сужающуюся часть канала, к выходу из канала и к концу участка разгрузки струи (фиг. 1).

Вытекающая из сужающегося сопла струя упругой жидкости имеет осевое натяжение благодаря тому, что при движении в сужающемся канале элементы жидкости вынуждены растягиваться в направлении движения [4, 25]. Так же как свободная пленка жидкости не может иметь неподвижный свободный край [26], свободная струя жидкости не может иметь неподвижный (по отношению к струе) свободный конец, так как на свободном краю струи упругие и капиллярные силы в струе оказываются несбалансированными. Действие этих сил на свободном конце струи вызывает сокращение струи. Далее для простоты полагается, что эффект капиллярных сил мал по сравнению с эффектом упругих сил.

В [17, 27, 28] показано, что за счет разгрузки свободной струи жидкости от продольных упругих напряжений в струе упругой жидкости могут формироваться волны разгрузки, внешне проявляющиеся в форме утолщения струи. Волна разгрузки перемещается по струе (как при лагранжевом, так и при эйлеровом рассмотрении), вызывая ее локальное сокращение (фиг. 1). В результате упругая деформация жидкости исчезает, и после прохождения такой волны жидкость оказывается разгруженной от упругих напряжений. В рамках одномерного приближения каждому значению диаметра струи в волне утолщения соответствует определенное значение упругой деформации жидкости.

В общем случае волна разгрузки распространяется по струе таким образом, что точка, соответствующая определенному значению диаметра струи в волне утолщения (или упругой деформации), движется со своей собственной скоростью в лагранжевой системе координат, связанной с материальными точками струи. Подобная ситуация реализуется, например, при распространении волны нагрузки в результате удара по тонкому волокну [29]. Однако в случае больших деформаций и при выполнении достаточно естественных для полимерных жидкостей условий волна разгрузки распространяется по струе в виде скачка диаметра (или, что эквивалентно, в виде скачка деформации). В этом случае скорость движения такого скачка в системе отсчета, связанной с нагруженной частью струи, оказывается равной $c = \sqrt{\tau/\rho}$, где τ – осевое напряжение в нагруженной части струи. Далее рассматривается волна разгрузки в виде скачка.

На выходе из канала могут быть реализованы две ситуации (фиг. 1). В зависимости от соотношения значений скорости истечения и скорости распространения возмущений по струе волна разгрузки может сноситься прочь от сопла, а может, наоборот, оказаться не в состоянии покинуть некоторую окрестность выхода из канала. Первая ситуация отвечает “сверхзвуковому” режиму истечения, а вторая – “дозвуковому” [17, 27, 28]. В первом случае на выходе из канала реализуются следующие условия: $p = p_1 = 0$, $v = v_1 = v_0 \lambda_1$, ($\lambda_1 = f_0/f_1$), $\tau = \tau_2$. Здесь λ – степень удлинения элементов жидкости в струе, f – площадь сечения струи. Во втором случае известные условия $p = p_2 = 0$, $v = v_2$, $\tau = \tau_2 = 0$ реализуются в свободной струе на некотором расстоянии от выхода – в конце участка утолщения струи (фиг. 1). В последней ситуации граничные условия можно задать в струе, а не в канале, поскольку при достаточно гладком изменении сечения потока на выходе из канала [30] уравнения (2.1) справедливы для всей системы “канал – струя”.

4. Напорное давление. Для случая стационарного течения в области канала $[x_0, x]$ интегрирование уравнений (2.1) по координате x дает

$$p_0 - p = \frac{1}{2} \rho v^2 - \frac{1}{2} \rho v_0^2 - \tau + \tau_0 + \int_{x_0}^x \frac{\tau dv}{v dx} dx \quad (4.1)$$

где $\tau_0 = 0$ – в силу условия разгруженности жидкости в точке x_0 , а функция $\tau = \tau(x)$ определяется реологией жидкости, профилем канала и расходом.

Если истечение “сверхзвуковое”, то $p(x_1) = 0$. Из соотношения (4.1) в этом случае следует, что в зависимости от вида функции $\tau = \tau(x)$ может происходить как увеличение, так и уменьшение напорного давления p_0 по сравнению со случаем идеальной жидкости ($\tau = 0$). В частности, если реологическое поведение жидкости при растяжении носит вязкий диссипативный характер, то $\tau > 0$ ($x \in (x_0, x_1)$), $\tau_1 = 0$. Истечение такой жидкости из сопла сопровождается повышением напорного давления по сравнению со случаем идеальной жидкости.

Обратная ситуация возникает при “сверхзвуковом” истечении упругой жидкости (высокоэластичного упругого несжимаемого материала) из канала. Так, например, если принять реологическую модель “неогукова” тела в форме

$$\tau = G \lambda^2 = G \left(\frac{v}{v_0} \right)^2 \quad 1 \ll \lambda = \frac{v}{v_0} \quad (4.2)$$

то из соотношения (4.1) следует

$$p_0 = \frac{1}{2} \rho v_1^2 - \frac{1}{2} \tau_1, \quad \tau_1 = G \lambda_1^2 \quad (4.3)$$

т.е. истечение происходит при давлении меньшем, чем следует из уравнения Бернулли.

Для случая истечения жидкости с реологическим уравнением состояния (4.2) критерием “сверхзвукового” режима является $v \geq c \equiv \sqrt{\tau_1/\rho}$, причем волна разгрузки распространяется по нагруженной струе в форме “скачка” сечения (а, следовательно, и величин τ , v) [17, 27, 28]. Если при этом $v_1 = c$, т.е. формируется стоячая волна разгрузки, удаленная от выхода из канала на постоянное (но произвольное) расстояние, то из соотношения (4.3) следует: $p_0 = 0$, $v_0 = \sqrt{G/\rho}$, т.е. истечение происходит без приложения напорного давления. Скорость истечения при этом для реальной ситуации ($G \sim 10^3$ Н/м², $\lambda \sim 10$, $\rho \sim 10^3$ кг/м³) имеет порядок $v_1 \sim 10$ м/с ($v_0 = \sqrt{G/\rho} \sim 1$ м/с).

5. Сохранение энергии системы. Полученный результат не противоречит закону сохранения энергии. Покажем это на примере все того же случая стоячей волны разгрузки ($v_1 = c$). Для полной разгрузки струи “упругой” жидкости должно произойти утолщение струи до размеров ненагруженной струи перед входом в сужающуюся часть канала. Поскольку волна разгрузки стоячая, то скорость жидкости в нагруженной части струи равна скорости жидкости перед входом в сужающуюся часть канала. Рассмотрим систему “жидкость в канале – нагруженная струя – разгруженная струя”. Легко заключить, что кинетическая энергия жидкости в канале и струе и потенциальная упругая энергия нагруженной части струи не меняются во времени. Следовательно, затраты энергии ($p_0 > 0$) определяются конкуренцией двух процессов: во-первых, процесса накопления упругой энергии жидкости при ее движении в сужающейся части канала и, во-вторых, процесса высвобождения энергии при разгрузке.

Плотность внутренней (упругой) энергии жидкости, запасенная в результате деформирования в сужающейся части канала, определяется очевидным соотношением

$$U(\lambda_0) = \frac{1}{f_0 x_0} \int_{x_0}^{x_1} \tau(x) f(x) dx = \int_1^{\lambda_1} \frac{\tau(\lambda)}{\lambda} d\lambda \quad (5.1)$$

Запишем условие сохранения, массы, импульса, энергии при течении жидкости через фронт волны разгрузки, неподвижный в системе отсчета, связанной с каналом ($v_1 = c$)

$$\begin{aligned} f_1 v_1 &= f_2 v_2 \\ f_1(\rho v_1^2 - \tau_1) &= f_2(\rho v_2^2 - \tau_2) \\ \left(U_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} \right) f_1 v_1 - \tau_1 f_1 v_1 &= \left(U_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} \right) f_2 v_2 + W \end{aligned} \quad (5.2)$$

где W – мощность тепловыделения на фронте волны разгрузки, индекс 1 идентифицирует величины в нагруженной части струи, а 2 – величины в разгруженной части струи.

С учетом (5.1), а также условий разгрузки ($\tau_2 = 0$, $U_2 = 0$), неподвижности фронта волны разгрузки ($v_2 = v_0$, $f_2 = f_0$, $v_1 = \sqrt{\tau_1/\rho}$), сильного сжатия канала ($v_1 \gg v_2$), из соотношений (5.2) следует

$$\frac{W}{f_0 v_0} = -\frac{\tau(\lambda_1)}{2} + \int_1^{\lambda_1} \frac{\tau(\lambda)}{\lambda} d\lambda \quad (5.3)$$

Сравнивая это выражение с (4.1), получим, что для рассматриваемого случая

$$W = f_0 v_0 p_0 \quad (5.4)$$

т.е. затрачиваемая при вытеснении жидкости мощность расходуется лишь на тепло-выделение при движении жидкости через фронт волны разгрузки. Если $\tau = G\lambda^2$, то из соотношений (5.3), (5.4) следует $p_0 = W = 0$, т.е. разгрузка происходит без диссипации энергии и, следовательно, нет необходимости в совершении работы: $p_0 = 0$.

Заметим, что отсутствие потребления тепла при разгрузке ($W > 0$) объясняет устойчивость профиля волны разгрузки в такой жидкости. Для жидкостей, для которых $\tau = G\lambda^n$, $n > 2$, в соответствии с (5.3) волны разгрузки в форме скачка сечения должны распространяться с поглощением энергии, что невозможно в силу второго закона термодинамики, и в струях таких жидкостей скачки сечения не образуются (ср. [17, 27, 28]). При $n < 2$ разгрузка в виде скачка сопровождается выделением тепла, и поэтому даже в случае стоячей волны разгрузки необходимо приложение напорного давления.

“Дозвуковой” режим истечения “упругой” жидкости, реализуемый при $\tau_1 \equiv G\lambda^2 > \rho v_1^2$ ($v_0 < \sqrt{G/\rho}$), происходит, как легко получить из соотношения (4.1), при нулевом напорном давлении (в рамках данной постановки задачи, ср. [18]).

Таким образом, расходная характеристика сужающегося сопла довольно проста: при $0 \leq v_0 \leq \sqrt{G/\rho}$ $p_0 = 0$, а при $v_0 \geq \sqrt{G/\rho}$ $p_0 = (\rho v_1^2 - \tau_1)/2 \equiv \lambda_1^2 (\rho v_0^2 - G)/2$.

6. Упруговязкая жидкость. Рассмотренный выше механизм изменения напорного давления может быть реализован и при истечении упруговязких жидкостей. Действительно, падение напорного давления обусловлено тем, что как при “дозвуковом”, так и при “сверхзвуковом” истечении упругие напряжения в струе на ее выходе из сопла “вытягивают” жидкость из сопла. При истечении упруговязкой жидкости, время релаксации которой достаточно велико и сопоставимо с характерным временем движения в сужающейся части канала, возникают упругие напряжения, которые дополнительно к напорному давлению оказывают динамическое воздействие на вытеснение жидкости, подобно тому, как это имеет место в случае “упругих” жидкостей. Отличие заключается в следующих двух особенностях. Во-первых, при определенном соотношении реологических характеристик жидкости и кинематики вытеснения релаксационные процессы в жидкости могут привести к ситуации, когда упругие напряжения велики внутри канала и, благодаря релаксации, малы на выходе из него. В этом случае, как легко видеть из соотношения (4.1), роль упругих напряжений состоит в оказании дополнительного сопротивления процессу вытеснения. Вторая особенность заключается в том, что релаксация напряжений в свободной струе может изменить характер разгрузки струи.

Вместе с тем развитие релаксационных процессов в свободной струе с заданным уровнем напряжений на выходе из канала не может изменить режима истечения – “дозвуковой” или “сверхзвуковой”. Этот факт вытекает из известного интеграла движения свободных струй [24]: $f(\tau - \rho v^2) = \text{const}$ с учетом того, что для данного участка струи режим течения (“дозвуковой” или “сверхзвуковой”) определяется исключительно соотношением двух параметров – динамического (ρv^2) и упругого (τ) [17, 27, 28]. Процесс разгрузки струи в форме “скачка” в случае упруговязкой жидкости происходит точно так же, как и в случае упругой, – в силу того, что этот процесс быстрый [17, 27, 28]. При $v_1 > \sqrt{\tau/\rho_1}$ может происходить монотонное утолщение струи за счет релаксации напряжений, однако возмущения, в том числе волна разгрузки в виде скачка, будут сноситься струей прочь от сопла.

Количественные оценки процесса вытеснения упруговязкой жидкости могут быть получены на примере жидкости максвеловского типа (модель Олдройд-Б), реологическое уравнение состояния которого в случае одномерного растяжения принимает вид [16]

$$\frac{\partial \lambda_e}{\partial t} + v \frac{\partial \lambda_e}{\partial x} = \lambda_e \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\lambda_e}{\theta} w(\lambda_e) \quad (6.1)$$

$$\tau = G \lambda_e^2 w(\lambda_e)$$

где λ_e – степень упругого удлинения, G – модуль упругости, θ – время релаксации, w – функция, учитывающая отсутствие напряжений в жидкости в равновесном состоянии.

Адекватность данной модели поведения растворов высокомолекулярных полимеров при элонгационных течениях с накоплением больших обратимых деформаций подтверждена экспериментами с водными растворами полиэтиленоксида и полиакриламида умеренной концентрации [19, 20]. В случае интенсивного растяжения она соответствует модели Максвелла с верхней конвективной производной [31], молекулярно-физической модели концентрированных систем [32], а также ряду молекулярных моделей разбавленных растворов полимеров [13, 14].

Из соотношений (4.1) и (6.1) с учетом условия сильного сжатия канала ($1 \ll \lambda_1$) и стационарности течения следует

$$p_0 = \frac{\rho v^2(x)}{2} - \frac{G \lambda_e^2(x)}{2} + G \int_{x_0}^x \frac{\lambda_e^2}{v \theta} w^2 dx \quad (6.2)$$

$$\lambda_e = \frac{v(x)}{v_0} \exp \left(- \int_{x_0}^x \frac{w}{v \theta} dx \right)$$

где в случае “сверхзвукового” течения $x = x_1$, а в случае “дозвукового” $x = x_2$.

Условием “сверхзвукового” режима является

$$\rho v_1^2 \geq \tau_1 = G \lambda_1^2 \exp \left(-2 \int_{x_0}^{x_1} \frac{w}{\theta v} dx \right) \quad (6.3)$$

Обратное неравенство отвечает “дозвуковому” режиму.

Если течение достаточно интенсивное (в сужающейся части канала $\partial v / \partial x \geq O(\theta^1)$) или априори известно, что $\lambda_e \gg 1$, то в формулах (6.2), (6.3) можно положить $w = 1$, и, задавая конкретный профиль канала $f(x)$ ($v(x) = q/f(x)$), можно проинтегрировать эти уравнения и определить режим течения и величину напорного давления p_0 . Величина динамического напора $\rho v_2^2 / 2$ в случае “дозвукового” режима может быть найдена из условия обратимости деформаций $v_2 = v_1 / \lambda_{e1}$.

При движении жидкости в сужающемся канале процессы накопления обратимых деформаций и их релаксации происходят одновременно. Поэтому для оценки роли каждого из этих факторов желательно иметь ситуацию, когда накопление и релаксация обратимых деформаций происходят в максимальной степени независимо друг от друга. Указанному требованию удовлетворяет канал, имеющий короткий участок резкого сужения длины l_* , переходящий в достаточно длинный участок постоянного сечения длины l (фиг. 1). Такой профиль имеют, например, сопло в устройстве

для метания жидкости и фильера для формирования волокон. При достаточно быстром течении в канале такого профиля будет происходить практически упругое деформирование материала на участке сужения и свободная релаксация упругих напряжений при движении жидкости по участку с суженным, но постоянным сечением.

Заметим, что численные расчеты, проведенные с одним из частных случаев модели (6.1) для ряда конкретных профилей канала со степенью пережатия ~ 10 , показывают, что переход от течения без упругих деформаций к практически упругому поведению в сужающейся части канала происходит в достаточно узком диапазоне скоростей $v_1 \equiv (l_*/\theta, 3l_*/\theta)$ [16, 18]. Аналогичные результаты получены в [4]. Поэтому для оценок можно считать, что при $v_1 < 2l_*/\theta$ упругие деформации не накапливаются, а при $v_1 > 2l_*/\theta$ деформирование в сужающейся части канала – чисто упругое.

Пусть для простоты $1 \ll \lambda_1 \ll l/l_*$. В этом случае интегрирование уравнений (6.2), (6.3) дает

$$T = \frac{\tau_1}{G\lambda_1^2} = \exp\left(-\frac{1}{V}\right), \quad V > \frac{l_*}{l} \quad (6.4)$$

$$P_0 \equiv BV^2 + 1 - 2\exp\left(-\frac{1}{V}\right), \quad BV^2 \geq \exp\left(-\frac{1}{V}\right), \quad V > \frac{l_*}{l} \quad (6.5)$$

$$P_0 \equiv 1 - \exp\left(-\frac{1}{V}\right), \quad BV^2 \leq \exp\left(-\frac{1}{V}\right), \quad V > \frac{l_*}{l} \quad (6.6)$$

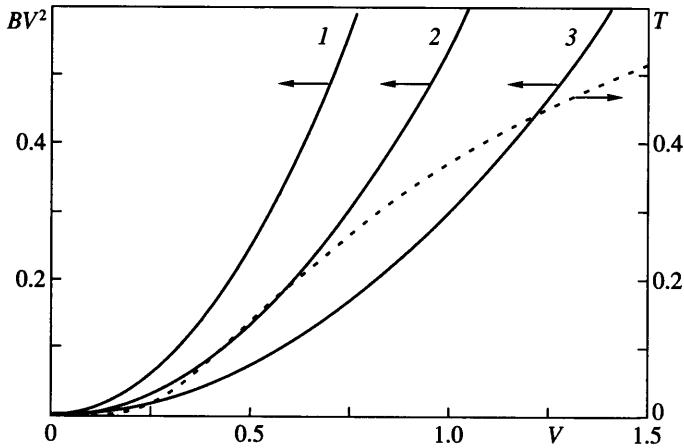
$$P_0 = \frac{2P_0}{G\lambda_1^2}, \quad B = \frac{\rho}{G}\left(\frac{2l}{\theta\lambda_1}\right)^2, \quad V = \frac{v_1\theta}{2l}, \quad BV^2 = \frac{\rho v_1^2}{G\lambda_1^2}$$

Истечению без упругих эффектов ($v_1 < 2l_*/\theta$) соответствует следующее безразмерное соотношение

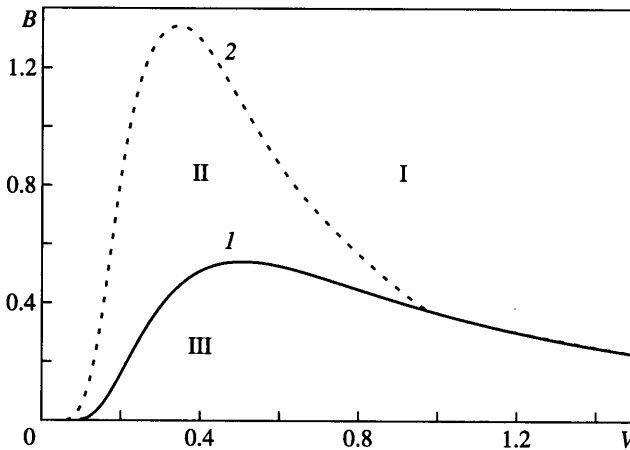
$$P_0 \equiv BV^2, \quad \tau_1 \equiv 0 \quad (V < l_*/l) \quad (6.7)$$

Формула (6.4) определяет уровень упругих напряжений на срезе сопла при интенсивном истечении. Формула (6.5) определяет напорное давление при интенсивном “сверхзвуковом” истечении. Формула (6.6) определяет напорное давление при интенсивном “дозвуковом” истечении. Переход от одного режима к другому при изменении скорости определяется конкуренцией динамического напора ρv_1^2 и упругих напряжений на выходе из канала τ_1 . На фиг. 2 показано изменение этих величин от скорости истечения (в безразмерном виде). Зависимость изменения напряжения τ_1 рассчитана по формуле (6.4). Для простоты далее полагается, что $l_*/l \rightarrow 0$. Из представленных данных следует, что при $B > 0.541$ “дозвуковой” режим истечения невозможен, так как $\rho v^2 > \tau_1$ при любых значениях скорости истечения. Наоборот, при $B < 0.541$ в некотором диапазоне скоростей (с отличным от нуля нижним и конечным верхним пределами) реализуется “дозвуковой” режим истечения. Определяющим параметром здесь является величина B .

На фиг. 3 показано фазовое пространство (B, V) , на котором “дозвуковому” режиму истечения отвечает область значений B и V , ограниченная кривой 1 ($B = \exp(-1/V)/V^2$) и осью V . В координатах (B, V) кривая 1 имеет максимум в точке $(0.5, 0.541)$. Фигура 3 позволяет легко проследить за переходом от одного режима истечения к другому при изменении скорости для каждого конкретного значения B .

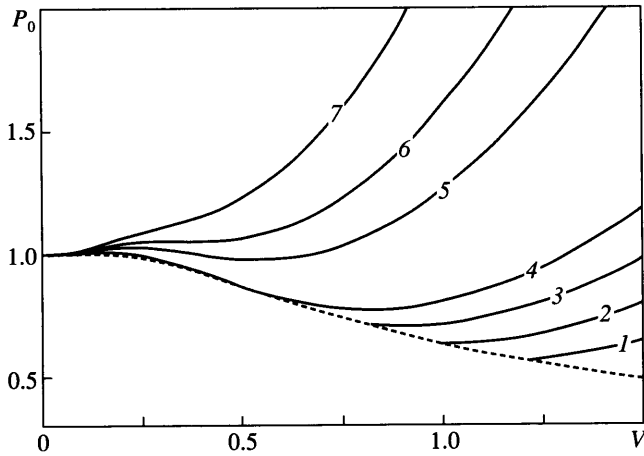


Фиг. 2. Зависимости безразмерных динамического напора BV^2 и напряжения T от скорости V . Кривые 1 – $B = 1$, 2 – 0.541, 3 – 0.3



Фиг. 3. Зависимость характера течения от параметров течения B и V . Кривая 1 – граница между областями “дозвукового” и “сверхзвукового” течения, 2 – граница между областями падающей и возрастающей расходными характеристиками при “сверхзвуковом” течении. Область I соответствует “сверхзвуковому” течению с возрастающей расходной характеристикой, II – “сверхзвуковому” течению с падающей расходной характеристикой, III – “дозвуковому” течению с падающей расходной характеристикой

На фиг. 3 также показана граница параметров B и V , отвечающая падающей расходной характеристике (кривая 2 при $V \leq 1$, кривая 1 при $V \geq 1$). Действительно, что касается “дозвукового” истечения, то в этом случае расходная характеристика является всегда падающей (см. формулу (6.6)). Однако уменьшение напорного давления с увеличением скорости может происходить и при “сверхзвуковом” истечении. Это легко видеть из формулы (6.5), дифференцирование которой по параметру V позволяет найти область параметров, для которых $dP/dV < 0$: $B < \exp(-1/V)/V^3$. Соответствующая кривая 2 на фиг. 3 лежит выше кривой 1 при $V < 1$ и пересекается с ней в точке $V = 1, B = 0.368$. Кривая 2 имеет максимум в точке (0.333, 1.344). Согласно фиг. 3,



Фиг. 4. Зависимости безразмерного напорного давления P_0 от безразмерной скорости V для различных значений параметра B : 1 – $B = 0.3$, 2 – 0.368 , 3 – 0.45 , 4 – 0.541 , 5 – 1 , 6 – 1.341 , 7 – 2. Пунктирная кривая соответствует “дозвуковому” режиму течения

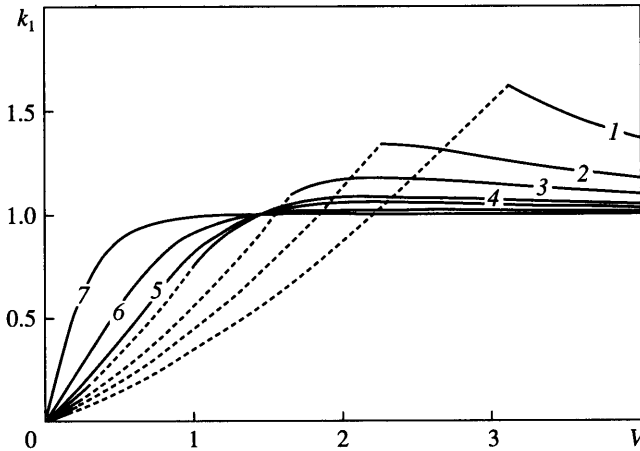
при $V > 1$ падающая расходная характеристика возможна лишь при “дозвуковом” режиме истечения. При “сверхзвуковом” истечении падающей характеристике отвечает область значений B , V , ограниченная кривыми 1 и 2 в диапазоне скоростей $V \in (0, 1)$. При $B > 1.344$ истечение всегда “сверхзвуковое”, а расходная характеристика всегда возрастающая.

Падение напорного давления при увеличении скорости в некотором диапазоне параметров при “сверхзвуковом” истечении связано с более быстрым ростом упругих напряжений с увеличением скорости, по сравнению с ростом динамического напора $\rho v^2/2$ (фиг. 2). При “дозвуковом” истечении падение давления со скоростью объясняется уменьшением диссипативных потерь при переходе к все более упругому поведению. В пределе имеем ситуацию протягивания без трения упругого тела через сужение в канале, не требующего затрат энергии (см. [18]).

Фигура 4 иллюстрирует выводы, следующие из анализа данных, представленных на фиг. 3. Показаны рассчитанные по формулам (6.5), (6.6) зависимости изменения напорного давления от скорости. На фигуре для каждой кривой указано соответствующее значение B .

Для всех кривых $B < 0.541$ существует область изменения величины V , в которой реализуется “дозвуковой” режим истечения. В этом режиме исчезает зависимость от параметра B (см. формулу (6.6)) и изменение напорного давления описывается универсальной зависимостью $P_0 = 1 - \exp(-1/V)$. На фиг. 4 она представлена пунктиром. При $B < 0.368$ переходу к “дозвуковому” режиму истечения при увеличении скорости предшествуют сначала “сверхзвуковой” режим истечения с растущей расходной характеристикой, а затем “сверхзвуковой” режим истечения с падающей расходной характеристикой. Вслед за “дозвуковым” режимом течения реализуется “сверхзвуковое” истечение с растущей расходной характеристикой.

В диапазоне $0.368 < B < 0.541$ при увеличении скорости вслед за “дозвуковым” режимом истечения дополнительно к предыдущему случаю реализуется “сверхзвуковой” режим истечения с падающей расходной характеристикой. Для кривых $0.541 < B < 1.344$ имеется участок падения напорного давления с ростом скорости при “сверхзвуковом” характере течения, а все кривые $B > 1.344$ – монотонно возрастающие.



Фиг. 5. Зависимости коэффициента k_1 от безразмерной скорости V при “сверхзвуковом” (сплошные кривые) и “дозвуковом” (пунктирные) режимах течения для различных значений параметра B . 1 – $B = 0.075$, 2 – 0.126, 3 – 0.2, 4 – 0.368, 5 – 0.541, 6 – 1.344, 7 – 10

На основе соотношений (6.4)–(6.6) может быть рассчитан коэффициент расхода сопла ($k \equiv \sqrt{\rho v^2 / (2p_0)}$), который равен $k_1 = (1 + (1 - 2\exp(-1/V))/(BV^2))^{-1/2}$ для параметров B и V , отвечающих “сверхзвуковому” режиму истечения, и $k_2 = k_1 / (\exp(-1/V)\lambda_1)$ для параметров B и V , отвечающих “дозвуковому” режиму истечения. На фиг. 5 показаны зависимости изменения коэффициента k_1 как для “сверхзвукового” истечения (сплошные кривые), так и для “дозвукового” режима истечения (пунктирные кривые). Все зависимости монотонно растут от 0 до максимального значения (больше единицы) в диапазоне скоростей $V \in (0, 2.26)$, причем при $V = 1.443$ для всех значений $B > 0.241$ коэффициент $k = 1$. Прохождение всех кривых $B > 0.241$ через точку $k = 1$, $V = 1.443$ связано с тем, что упругие эффекты на входе в сужающуюся часть сопла и на выходе из канала в точности компенсируют друг друга (см., например, формулу (6.5)).

Таким образом, при $V < 1.443$ доминируют эффекты упругих напряжений на входе в сужающуюся часть канала. Они препятствуют движению жидкости, в то же время благодаря релаксации незначительны на выходе из канала. При $V > 1.443$, наоборот, преобладает эффект “подтягивания” жидкости на выходе из канала благодаря упругим напряжениям в вытекающей струе. Скорость течения в сопле в этом случае достаточно велика для того, чтобы упругие напряжения не успели срелаксировать за время течения жидкости по участку сопла с постоянным сечением. В результате напорное давление оказывается меньше динамического напора. Все кривые, для которых $B > 0.126$, имеют максимум в точке $V = 2.26$. Максимально достижимый для заданного параметра B коэффициент расхода сопла неограниченно растет с падением значения параметра B .

Заключение. Для реальных процессов истечения жидкости из сужающегося канала наиболее важное значение имеет немонотонность расходной характеристики. Наличие падающего участка на расходной характеристике, как ранее указывалось в [17], может служить источником временной и пространственной неустойчивостей течения, пульсаций потока, а также гистерезисных явлений. Эти явления могут происходить как с переходом к режиму “дозвукового” течения, так и без такого перехода. Надле-

жащим выбором параметров течения и жидкости может быть реализован желаемый режим течения, в том числе без проявления указанных эффектов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 99-01-00474). Автор благодарен В.М. Ентову за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чанг Дей Хан. Реология в процессах переработки полимеров. М.: Химия, 1979. 366 с.
2. Лодж А.С. Эластичные жидкости. М.: Наука, 1969. 463 с.
3. Larson R.G. Instabilities of viscoelastic flows // *Rheologica Acta*. 1992. V. 31. № 3. P. 213–263.
4. Базилевский А.В., Ентов В.М., Рожков А.Н. Упругие напряжения в капиллярных струях разбавленных растворов полимеров // *Изв. АН СССР. МЖГ*. 1985. № 2. С. 3–9.
5. Mun R.P., Byars J.A., Boger D.V. The effects of polymer concentration and molecular weight on the breakup of laminar capillary jets // *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 1998. V. 74. № 1–3. P. 285–297.
6. Christanti Y., Walker L.M. Surface tension driven jet break up of strain-hardening polymer solutions // *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 2001. V. 100. № 1–3. P. 9–26.
7. Meyer J.D., Bazilevsky A.V., Rozhkov A.N. Effects of polymeric additives on thermal ink jets // *Proc. IS&T's NIP13: Intern. Conference on Digital Printing Technologies*. 1997, Seattle, USA. IS&T. 1997. P. 675–680.
8. Meyer J., Bazilevsky A.V., Rozhkov A.N. Effects of polymeric additives on thermal ink jets // *Recent Progress in Ink Jet Technologies II* /Ed. E.Hanson, Series Editor: R.Eschbach R. IS&T, 1999. P. 450–455.
9. Kulikov O.L., Hornung K. A simple geometrical solution to the surface fracturing problem in extrusion processes // *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 2001. V. 98. № 2–3. P. 107–115.
10. Tomita Y., Takahashi T. An anomalous phenomenon occurring in the flow of viscoelastic fluids out of ducts // *Rheol. Acta*. 1988. V. 27. № 5. P. 523–530.
11. Takahashi T., Tomita Y. A study on an anomalous phenomenon occurring in the issuing of viscoelastic fluids from ducts (critical point of the anomalous phenomenon) // *JSME Intern. J. Ser. II*. 1989. V. 32. № 3. P. 348–353.
12. Denn M.M. Extrusion instabilities and wall slip // *Ann. Rev. Fluid Mech.* 2001. V. 33. P. 265–87.
13. Hinch E.J. Mechanical model of dilute polymer solutions in strong flows // *Phys. Fluids*. 1977. V. 20. № 10. Pt. 2. P. S22–S30.
14. De Gennes P.G. Coil-stretch transition of dilute flexible polymers under ultra high velocity gradients // *J. Chem. Phys.* 1974. V. 60. № 12. P. 5030–5042.
15. Базилевский А.В., Воронков С.И., Ентов В.М., Рожков А.Н. Ориентационные эффекты при распаде струй и нитей разбавленных растворов полимеров // *Докл. АН СССР*. 1981. Т. 257, № 2. С. 336–339.
16. Рожков А.Н. Интенсивные течения растворов полимеров. Дис. канд. физ.-мат. наук. М., 1984. 228 с.
17. Ентов В.М., Кестенбойм Х.С., Рожков А.Н. Об истечении упруговязких жидкостей из сужающихся каналов // *Докл. АН СССР*. 1985. Т. 282. № 4. С. 879–882.
18. Ентов В.М., Рожков А.Н. Об упругих эффектах при течении растворов полимеров в каналах переменного сечения и пористой среде // *Инж.-физ. журн.* 1985. Т. 49. № 3. С. 390–397.
19. Ентов В.М., Кордонский В.И., Прохоров И.В., Рожков А.Н., Торопов А.И., Шульмае З.П., Ярин А.Л. Интенсивное растяжение растворов полимеров // *Докл. АН СССР*. 1988. Т. 301. № 4. С. 867–870.
20. Ентов В.М., Кордонский В.И., Прохоров И.В., Рожков А.Н., Торопов А.И., Шульмае З.П., Ярин А.Л. Интенсивное растяжение растворов полимеров умеренной концентрации // *Высокомолекуляр. соединения. Сер. А*. 1988: Т. 30. № 12. С. 2486–2491.
21. Lee W.K., George H.H. Flow visualization of fiber suspensions // *Polymer. Eng. Sci.* 1978. V. 18. № 2. P. 146–156.
22. Ишлинский А.Ю. Прокатка и волочение при больших скоростях деформирования // *ПММ*. 1943. Т. 7. Вып. 3. С. 226–230.
23. Рожков А.Н. Динамика нитей растворов полимеров // *Инж.-физ. журн.* 1983. Т. 45. № 1. С. 72–80.

24. Енто́в В.М., Кордонский В.И., Кузьмин В.А., Шульман З.П., Ярин А.Л. Исследование распада струй реологически сложных жидкостей // ПМТФ. 1980. № 3. С. 90–98.
25. Енто́в В.М., Махкамов С.М., Мукук К.В. Об одном эффекте нормальных напряжений // Инж.-физ. журн. 1978. Т. 34. № 3. С.514–518.
26. Brenner M.P., Gueyffier D. On the bursting of viscous films // Phys. Fluids. 1999. V. 11. № 3. P.737–739.
27. Енто́в В.М., Кестенбойм Х.С. К механике формирования волокон // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 5. С. 26–35.
28. Енто́в В.М., Кестенбойм Х.С., Покровский С.В., Шугай Г.А. Одномерная динамика струйных течений упругих жидкостей // Изв. РАН. МЖГ. 1997. № 6. С. 3–15.
29. Баженов С.Л., Духовский И.А., Ковалев П.И., Рожков А.Н. Разрушение арамидного волокна СВМ при высокоскоростном поперечном ударе // Высокомолекуляр. соединения. Сер. А. 2001. Т. 43. № 1. С. 73–86.
30. Tomita Y., Shibo T., Ishibashi Y. Experimental studies of viscoelastic fluid flow // J. Non-Newton. Fluid Mech. 1979. V. 5. P. 497–512.
31. Астарита Дж., Марруччи Дж. Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей. М.: Мир, 1978. 309 с.
32. Ярин А.Л. Теоретический анализ процесса интенсивного одноосного растяжения концентрированных полимерных систем с постоянной скоростью движения захвата // Высокомолекуляр. соединения. Сер. А. 1988. Т. 30. № 12. С. 2492–2497.

Москва
E-mail rozhkov@ipmnet.ru

Поступила в редакцию
25.IV.2002