

УДК 532.517

© 2003 г. С. В. МАНУЙЛОВИЧ

**РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ В ПЛОСКОМ ТЕЧЕНИИ ПУАЗЕЙЛЯ
МЕЖДУ СТЕНКАМИ НЕОДНОРОДНОЙ ПОДАТЛИВОСТИ**

Эволюция малых возмущений в продольно-неоднородных течениях изучена на примере задачи о распространении возмущений течения в плоском канале со стенками переменной упругости. С помощью решения задачи о восприимчивости течения к локальным вибрациям стенок рассматриваемая задача сводится к решению интегрального уравнения для одной функции – комплексной амплитуды колебаний стенок. Предложен численный метод решения этого уравнения, основанный на кусочно-линейной аппроксимации искомой функции. Показано, что на стыке жесткой и упругой секций канала амплитуда волны неустойчивости меняется скачком. Предложен второй метод исследования процесса распространения возмущений в рассматриваемом течении, базирующийся на законах эволюции возмущений в однородных течениях и на аналитическом решении задачи о рассеянии возмущений на стыке стенок различной податливости. На основе этого метода проведено обобщение классической теории устойчивости на случай неоднородных течений.

Ключевые слова: устойчивость, восприимчивость, продольно-неоднородное течение.

Проблема ламинаризации вязких течений приобрела актуальность в связи с важной практической задачей – уменьшением сопротивления трения. Как правило, ламинарно-турбулентный переход инициируется нарастающими вниз по потоку неустойчивыми колебаниями, поэтому подавление волн неустойчивости приводит к увеличению протяженности ламинарного участка течения. Известные методы подавления неустойчивых колебаний можно условно разделить на два основных типа. К первому типу относятся всевозможные методы распределенного воздействия, имеющие целью стабилизацию основного течения. Использование податливой стенки для уменьшения скорости роста волн неустойчивости [1] – классический пример методов такого рода. Второй тип составляют методы локализованного подавления волн неустойчивости посредством формирования в потоке искусственных волн в противофазе к волнам естественного происхождения [2].

Общие черты, присущие методам обоих упомянутых выше типов, были отмечены в [3], где теоретически исследовалось распространение волн Толлмина–Шлихтинга в плоском канале, содержащем секцию со слабо искривленными стенками. Результаты показали, что количественные характеристики ослабления волны Толлмина–Шлихтинга могут быть получены как из соображений стабилизирующего эффекта изменения геометрии стенок, так и из подавляющего действия вторичной волны неустойчивости, возбуждаемой набегающей волной при ее рассеянии на неоднородности течения в окрестности искривленных стенок.

Основным недостатком постановки [3], не позволяющим непосредственно приложить полученные результаты к решению задач, представляющих практический интерес, является требование о малости неоднородности, а также о ее локальности. В данной работе рассматривается простейшее течение, моделирующее неоднородность конечной амплитуды – течение несжимаемой вязкой жидкости в плоском канале с упругими стенками неоднородной податливости. Несмотря на модельный характер предлагаемой постановки, используемые ниже методы могут быть применены к исследованию

дованию распространения малых возмущений в неоднородных течениях наиболее важных, с практической точки зрения, типов (например, в ламинарном пограничном слое). Ослабление волны Толлмина–Шлихтинга над локализованным участком податливой поверхности изучалось ранее в [4] в рамках асимптотической постановки для случая течения в пограничном слое (бесконечно большие числа Рейнольдса, низкие частоты возмущений). Нестационарное течение в плоском канале, имеющем секцию с гибкими стенками, исследовалось также в [5] методом прямого численного моделирования.

В данной работе для исследования процесса распространения малых возмущений в течении между стенками с неоднородной эластичностью предлагаются два метода. Первый из них удобен при локальном характере неоднородности, т.е. когда протяженность податливой секции канала в продольном направлении конечна. В этом случае для упрощения анализа возмущенного движения может быть использовано решение задачи о восприимчивости плоского течения Пуазейля к вибрациям стенок канала [6]: с помощью этого решения исследуемая краевая задача для линейаризованной системы уравнений Навье–Стокса сводится к интегральному уравнению для комплексной амплитуды колебаний стенок. Второй метод основан на представлении процесса распространения возмущений как последовательной цепи усилений (затуханий) и рассеяний мод локально-однородной задачи. Он применим для описания возмущенного движения при любом, в том числе и нелокальном, распределении податливости. Вариант этого метода может быть использован при анализе восприимчивости и устойчивости продольно-неоднородного непараллельного течения в ламинарном пограничном слое. При тестировании второго метода использовались решения, полученные первым методом для случая локальной неоднородности.

1. Постановка задачи. Стабилизация течения между стенками с однородной податливостью. Будем изучать нестационарные двумерные возмущения плоского течения Пуазейля – установившегося движения вязкой несжимаемой жидкости между двумя параллельными плоскими стенками под действием постоянного продольного градиента давления. Независимые переменные и параметры возмущенного течения будем считать безразмерными, выбирая в качестве основных единиц плотность жидкости, максимальную скорость невозмущенного течения и полуширину канала. Число Рейнольдса обозначим R .

Введем декартову систему координат с началом в центре канала, ось x направим вдоль невозмущенного потока, а ось y – перпендикулярно стенкам. Безразмерное время обозначим t . Возмущения течения в рассматриваемой области будем считать малыми; в этом случае компоненты возмущенного движения, соответствующие различным частотам $\omega > 0$, могут изучаться независимо друг от друга.

Рассмотрим возмущения составляющих вектора скорости и давления вида

$$\varepsilon q(x, y) \exp(-i\omega t) + \text{c.c.} + O(|\varepsilon|^2), \quad |\varepsilon| \ll 1, \quad q = v_x, v_y, p$$

Функции q удовлетворяют линейаризованной системе уравнений Навье–Стокса

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0; \quad -i\omega v_x + (1 - y^2) \frac{\partial v_x}{\partial x} - 2yv_y + \frac{\partial p}{\partial x} = \\ &= \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) - i\omega v_y + (1 - y^2) \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Поскольку основное течение однородно в продольном направлении, коэффициенты системы (1.1) зависят только от переменной y . Для обеспечения неоднородности всей краевой задачи в целом предположим, что стенки канала имеют переменную по x податливость. Чтобы не загромождать изложение, рассмотрим простейший закон податливости и ограничим класс рассматриваемых возмущений. Будем пренебрегать

всеми реальными физическими свойствами податливых поверхностей (инерцией, натяжением, демпфированием, сопротивлением изгибу и т.п.), за исключением упругости стенок по отношению к вертикальным перемещениям. В соответствии со сделанными допущениями вертикальные смещения участков верхней и нижней стенок канала пропорциональны мгновенным местным возмущениям давления:

$$y_{+,-} = \pm 1 \pm \sigma F(x) [\varepsilon p(x, \pm 1) \exp(-i\omega t) + \text{с.с.}] \quad (1.2)$$

Здесь $\sigma \geq 0$ – параметр эластичности, а функция $F \geq 0$ задает продольные распределения податливости, одинаковые для верхней и нижней стенок. В этом случае симметричные и антисимметричные возмущения потока можно рассматривать независимо. Поскольку волна неустойчивости плоского течения Пуазейля является антисимметричной модой, в дальнейшем ограничимся рассмотрением лишь антисимметричных возмущений, удовлетворяющих при $y = 0$ условиям

$$v_x(x, 0) = \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}(x, 0) = 0 \quad (1.3)$$

Эти условия позволяют произвести формулировку краевой задачи в полосе $-\infty < x < +\infty$, $0 \leq y \leq 1$. Краевые условия при $y = 1$ следуют из условий прилипания на верхней стенке (1.2), записанных в линейном приближении:

$$v_x(x, 1) = 2\sigma F(x)p(x, 1), \quad v_y(x, 1) = -i\omega \sigma F(x)p(x, 1) \quad (1.4)$$

Изучение процесса распространения возмущений начнем с важного для последующего изложения простейшего случая постоянной податливости стенок $F \equiv 1$. В этом случае граничные условия (1.4) становятся однородными по x и приобретают вид

$$v_x(x, 1) - 2\sigma p(x, 1) = 0, \quad v_y(x, 1) + i\omega \sigma p(x, 1) = 0 \quad (1.5)$$

Краевую задачу (1.1), (1.3), (1.5), описывающую эволюцию малых возмущений течения Пуазейля в плоском канале со стенками упругости σ , будем называть σ -однородной. Решение этой задачи будем искать в классе функций вида $q = q^*(y; \alpha, \sigma) \exp(i\omega x)$, где α – комплексное собственное число, а q^* – соответствующая ему комплексная собственная функция. В дальнейшем в обозначениях функций нескольких аргументов для краткости будем иногда использовать только первый из них.

Для выделения зависимости собственного решения от параметра σ введем универсальную функцию $\varphi(y; \alpha)$ с помощью соотношений

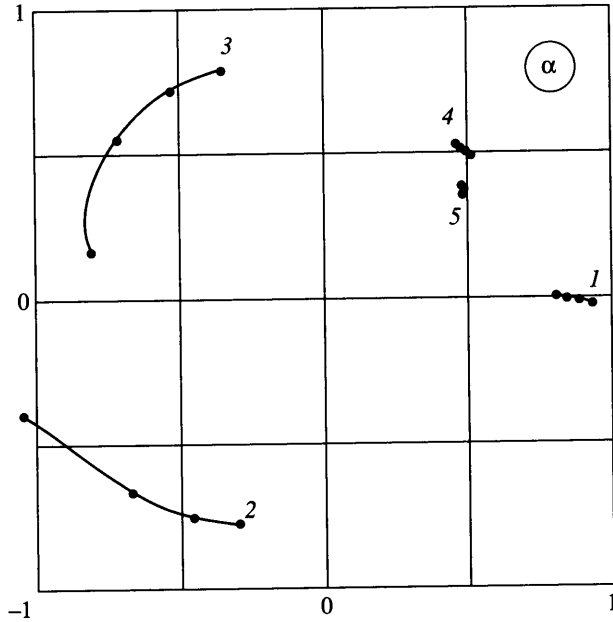
$$v_x^* = \sigma p^*(1) \frac{d\varphi}{dy}, \quad v_y^* = -i\alpha \sigma p^*(1) \varphi$$

$$\frac{p^*}{\sigma p^*(1)} = \frac{1}{i\alpha R} \left(\frac{d^3 \varphi}{dy^3} - \alpha^2 \frac{d\varphi}{dy} \right) - \left(1 - y^2 - \frac{\omega}{\alpha} \right) \frac{d\varphi}{dy} - 2y\varphi \quad (1.6)$$

Произведенная замена обращает первые два уравнения (1.1) в тождества. Для определения функции φ воспользуемся третьим уравнением (1.1) и условиями (1.3), (1.5). В результате получим неоднородную краевую задачу для уравнения Орра–Зоммерфельда, не содержащую явно параметра податливости:

$$\left(1 - y^2 - \frac{\omega}{\alpha} \right) \left(\frac{d^2 \varphi}{dy^2} - \alpha^2 \varphi \right) + 2\varphi = \frac{1}{i\alpha R} \left(\frac{d^4 \varphi}{dy^4} - 2\alpha^2 \frac{d^2 \varphi}{dy^2} + \alpha^4 \varphi \right) \quad (1.7)$$

$$\varphi(1) = \frac{\omega}{\alpha}, \quad \frac{d\varphi}{dy}(1) = 2, \quad \frac{d\varphi}{dy}(0) = \frac{d^3 \varphi}{dy^3}(0) = 0$$



Фиг. 1. Зависимости собственных значений α_n от параметра податливости σ , вычисленные для $\omega = 0.2$, $R = 15000$; точками отмечены положения мод при $\sigma = 0, 1, 2, 3$; номер кривой соответствует номеру моды

Метод численного решения этой задачи описан в [6].

Чтобы окончательно сформулировать задачу на собственные значения, положим $y = 1$ в третьем соотношении (1.6). Это даст дисперсионное соотношение

$$D(\alpha; \omega, R) = i\alpha R \left[\frac{d^3 \phi}{dy^3}(1) - 2\alpha^2 \right]^{-1} = \sigma \quad (1.8)$$

Благодаря введению функции ϕ , уравнение (1.8) содержит коэффициент податливости σ в явном виде. При $\sigma = 0$ оно переходит в дисперсионное соотношение для течения в канале с жесткими стенками $D = 0$; корни последнего были тщательно изучены в [6]. Подобно [6], в данной работе корни $\alpha(\sigma; \omega, R)$ дисперсионного соотношения (1.8) вычислялись методом Ньютона, причем начальные приближения находились методом продолжения по параметру σ . Функция ϕ имеет особенность при $\sigma \rightarrow 0$: во внутренних точках канала $\phi \rightarrow \infty$ при стремлении α к одному из собственных значений для случая жестких стенок. Тем не менее функции, задаваемые равенствами (1.6), остаются конечными и стремятся к собственному решению, соответствующему $\sigma = 0$, т.е. описанная особенность устранима (всюду ниже под постановкой $\sigma = 0$ подразумевается предельный переход $\sigma \rightarrow 0$).

Построенное собственное решение определено с точностью до мультипликативной постоянной. Везде в дальнейшем будем нормировать его с помощью условия $p^*(1; \alpha, \sigma) = 1$. Как показали проведенные здесь исследования, наиболее важную роль в процессах распространения волн неустойчивости между стенками с неоднородной упругостью играют пять мод. Поведение собственных значений, соответствующих этим модам, при изменении параметра σ в диапазоне от 0 до 3 показано на

фиг. 1 (здесь и в дальнейшем все расчеты проведены для $\omega = 0.2$, $R = 15000$). На концах этого диапазона волновое число α_1 неустойчивой моды принимает значения $0.934 - i0.0188$ и $0.805 + i0.0046$ соответственно. В полном согласии с результатами [1] увеличение параметра податливости приводит к стабилизации течения.

2. Подавление волны неустойчивости активной вибрацией стенок. Качественно иной способ подавления неустойчивых колебаний был предложен в [2]. В отличие от метода [1], с помощью которого волна неустойчивости могла быть лишь ослаблена, здесь она подавлялась полностью. Основная идея метода [2] заключалась в применении принципа суперпозиции неустойчивых колебаний, базирующегося на линейном характере изучаемого явления. Набегающая волна Толлмина–Шлихтинга (обычно называемая естественной, поскольку она может возбуждаться в течении из-за всевозможных посторонних причин), подавлялась искусственной волной той же частоты, генерируемой вынужденными колебаниями участка обтекаемой поверхности. Такое подавление становилось возможным, благодаря специальному подбору амплитуды и фазы колебаний генератора искусственных возмущений. В данной работе проведен расчет, иллюстрирующий активный метод гашения волны неустойчивости.

Пусть течение в канале с жесткими стенками возмущено набегающей волной Толлмина–Шлихтинга

$$q_1 = q^*(y; \alpha_1, 0) \exp(i\alpha_1 x) \quad (2.1)$$

Моделируя действие генератора искусственной волны неустойчивости, предположим, что участки стенок канала совершают антисимметричные гармонические колебания в вертикальном направлении с частотой, равной частоте набегающей волны

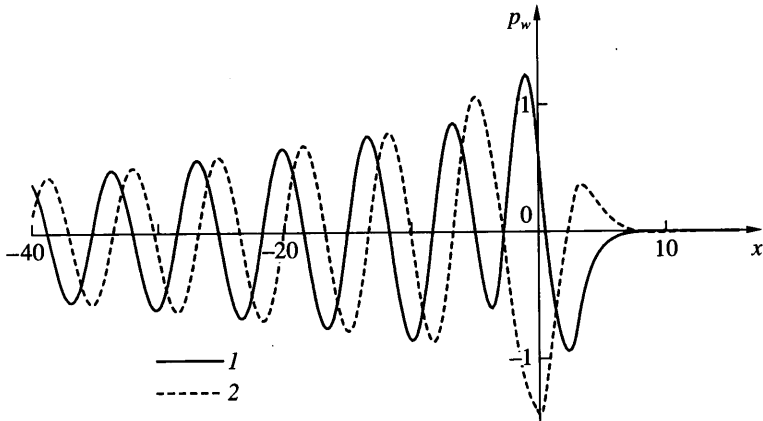
$$y_{+,-} = \pm 1 + [\epsilon f(x) \exp(-i\omega t) + \text{с.с.}] \quad (2.2)$$

Здесь комплексная функция f задает продольное распределение амплитуд и фаз управляющих колебаний стенок. Возмущения, вносимые в течение набегающей волной (2.1) и вибрациями (2.2), имеют вид $q = q_1 + q_v$. Функции $q_v(x, y)$ представляют собой решение задачи о восприимчивости плоского течения Пуазейля к локализованным вибрациям стенок канала. Это решение построено в [6] методом Фурье

$$q_v = \frac{1}{2\pi} \int_C f^*(k) q^*(y; k, 1) \exp(ikx) dk, \quad f^* = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(-ikx) dx \quad (2.3)$$

Здесь f^* – фурье-образ формы вибратора, а нормированные фурье-амплитуды q^* управляющего возмущения выражаются через решение неоднородной краевой задачи (1.7) с помощью формул (1.6). При докритической частоте вибрации, когда генерируемая волна Толлмина–Шлихтинга затухает вниз по потоку ($\text{Im}\alpha_1 > 0$), интеграл для q_v имеет вид классического обратного преобразования Фурье (контур интегрирования C проходит вдоль действительной оси комплексной плоскости k). При закритической частоте ($\text{Im}\alpha_1 < 0$) контур C должен обходить снизу полюс $k = \alpha_1$, соответствующий неустойчивой моде (не охватывая при этом другие полюса из нижней полуплоскости k). В этом случае вибрирующая секция канала возбуждает волну Толлмина–Шлихтинга, растущую вниз по потоку. В обоих случаях выражение для генерируемой вибратором искусственной волны неустойчивости следует из анализа поведения решения вниз по потоку от вибрирующей секции, проведенного с помощью теоремы Коши о вычетах

$$q_{v1} = f^*(\alpha_1) i \left[\frac{dD}{d\alpha}(\alpha_1) \right]^{-1} q^*(y; \alpha_1, 0) \exp(i\alpha_1 x)$$



Фиг. 2. Гашение набегающей волны Толлмина–Шлихтинга вибрирующей секцией:
1 – $Re p_w$; 2 – $Im p_w$

Решение задачи восприимчивости течения к вибрации стенок воспроизведено здесь для антисимметричных вибраций довольно общего вида. В экспериментах же по исследованию процессов активной генерации и гашения волн неустойчивости обычно используют синфазные колебания стенок. В этом случае $f = \delta g(x)$; действительная функция g задает форму вибратора ($g \geq 0$, $\max g = 1$), а варьирование величин $|\delta|$ и $\arg \delta$ позволяет управлять амплитудой и фазой искусственной волны Толлмина–Шлихтинга.

Выберем комплексную амплитуду вибрации равной

$$\delta = -\frac{dD}{d\alpha}(\alpha_1)[ig^*(\alpha_1)]^{-1}$$

В результате оказывается выполненным условие гашения $q_1 + q_{v1} \equiv 0$ и искусственная волна будет полностью подавлять естественную в области, лежащей вниз по потоку от управляющей вибрирующей секции.

В качестве иллюстрации приведем результаты расчета процесса подавления волны Толлмина–Шлихтинга вибраторами треугольной формы

$$g = 1 - |x|/a, \quad |x| \leq a; \quad g \equiv 0, \quad |x| > a$$

установленными на противоположных стенках канала. Параметр $a = 3$ определяет характерный продольный размер вибратора равным половине длины волны неустойчивости. В этом случае величина $|g^*(\alpha_1)|$ близка к максимуму, и для генерации искусственной волны заданной амплитуды требуются колебания стенок минимальной интенсивности ($|\delta| = 13.3$, $\arg \delta = -1.43$), что снижает уровень пульсаций течения внутри управляющей секции.

На фиг. 2 показано продольное распределение комплексной амплитуды пульсаций давления на верхней стенке канала $p_w = p(x, 1)$ в процессе гашения волны. Вверх по течению от вибрирующей секции возмущение представляет собой набегающую волну Толлмина–Шлихтинга. Максимум амплитуды пульсаций давления достигается на вершинах вибраторов. Вниз по потоку возмущения быстро затухают, так что здесь неустойчивая мода оказывается полностью подавленной.

3. Неоднородная податливость стенок. Метод интегрального уравнения. Исследование процесса эволюции возмущений течения в плоском канале со стенками, обладающими неоднородной упругостью, начнем с частного случая, когда податливая секция имеет конечный продольный размер (т.е. когда функция F из (1.2), задающая продольное распределение податливости, финитна).

Предположим, что возмущения течения вызваны набегающей волной Толлмина–Шлихтинга (2.1). Они инициируют антисимметричные колебания стенок упругой секции (1.2). В отличие от случая задачи о вибраторе вид функции f не является заданным заранее: форма колебаний стенок может быть определена только после решения краевой задачи (1.1), (1.3), (1.4), (2.1). Задача подобного типа для закона податливости более общего вида решалась в [5] конечно-разностным методом, что потребовало проведения большого объема вычислений. Для уменьшения вычислительных затрат в данной работе предлагается метод, использующий решение задачи о вибраторе [6] (см. также разд. 2). Согласно (2.3), комплексная амплитуда пульсаций давления на верхней стенке связана с комплексной амплитудой колебаний стенок интегральным соотношением

$$p(x, 1) = \exp(i\alpha_1 x) + I[f]$$

$$I[f] = \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{dk}{D(k)} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \exp[ik(x - \xi)] d\xi \quad (3.1)$$

Из принятого закона податливости (1.2) и соотношения (2.2) имеем вторую связь

$$f(x) = \sigma F(x) p(x, 1) \quad (3.2)$$

Исключая из соотношений (3.1) и (3.2) возмущение давления, получим линейное неоднородное интегральное уравнение для определения неизвестной комплексной функции $f(x)$

$$f = \sigma F \{ \exp(i\alpha_1 x) + I[f] \} \quad (3.3)$$

Введем количественную характеристику изменения амплитуды волны неустойчивости при ее взаимодействии с неоднородностью – комплексный коэффициент прохождения P , равный отношению комплексных амплитуд прошедшей и набегающей волн:

$$P = \frac{q_1 + q_{v1}}{q_1} = 1 + if^*(\alpha_1) \left[\frac{dD}{d\alpha}(\alpha_1) \right]^{-1} \quad (3.4)$$

Этот коэффициент может быть вычислен после нахождения формы колебаний стенок; величина $|P|$ дает отношение интенсивностей прошедшей и набегающей волн, а $\arg P$ – сдвиг фаз между ними.

Построение решения сформулированной задачи (3.3), (3.1), (3.4) и его анализ начнем с предельного случая малой податливости стенок. При $\sigma \ll 1$ возмущения давления, вносимые пассивными колебаниями стенок, малы по сравнению с пульсациями давления в набегающей волне, поэтому асимптотическое решение уравнения (3.3) приобретает вид

$$f = \sigma F(x) \exp(i\alpha_1 x) + O(\sigma^2)$$

Подставляя это разложение в (3.4), получим

$$P = 1 + i\sigma \left[\frac{dD}{d\alpha}(\alpha_1) \right]^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) dx + O(\sigma^2) \quad (3.5)$$

Как и в [3], в рамках изучаемой здесь модели неоднородности обнаруживается взаимосвязь между явлениями устойчивости и восприимчивости. Рассмотрим задачу о прохождении волны Толлмина–Шлихтинга через участок канала, образованный стенками малой постоянной податливости $\sigma \ll 1$, но имеющий большую протяженность $L \gg 1$, причем $L\sigma \ll 1$. В этом случае проведенный выше асимптотический анализ сохраняет силу, и выражение для коэффициента прохождения в линейном по σ приближении приобретает вид

$$P \approx 1 + i\sigma L \left[\frac{dD}{d\alpha}(\alpha_1) \right]^{-1} \quad (3.6)$$

Соотношения (3.4), (3.5), так же как и выведенная из них формула (3.6), получены из анализа восприимчивости течения к вибрациям стенок канала: волна Толлмина–Шлихтинга, прошедшая область неоднородности, представляет собой суперпозицию набегающей волны и вторичной волны, генерируемой на неоднородности. Покажем теперь, что формула (3.6) может быть выведена из анализа характеристик устойчивости течения для рассматриваемой конфигурации границ. Внутри податливой секции, за исключением окрестностей стыков с жесткими стенками, возмущение течения в главном приближении аппроксимируется волной Толлмина–Шлихтинга с волновым числом $\alpha_1' = \alpha_1(\sigma)$, распространяющейся между бесконечными стенками с постоянной податливостью σ , поэтому коэффициент прохождения равен отношению комплексных коэффициентов усиления волны на податливом участке и в жесткой секции той же длины:

$$P \approx \frac{\exp(i\alpha_1' L)}{\exp(i\alpha_1 L)} \approx 1 + i\sigma L \frac{d\alpha_1}{d\sigma}(0) \quad (3.7)$$

Для нахождения производной из правой части (3.7) продифференцируем дисперсионное соотношение (1.8) по σ :

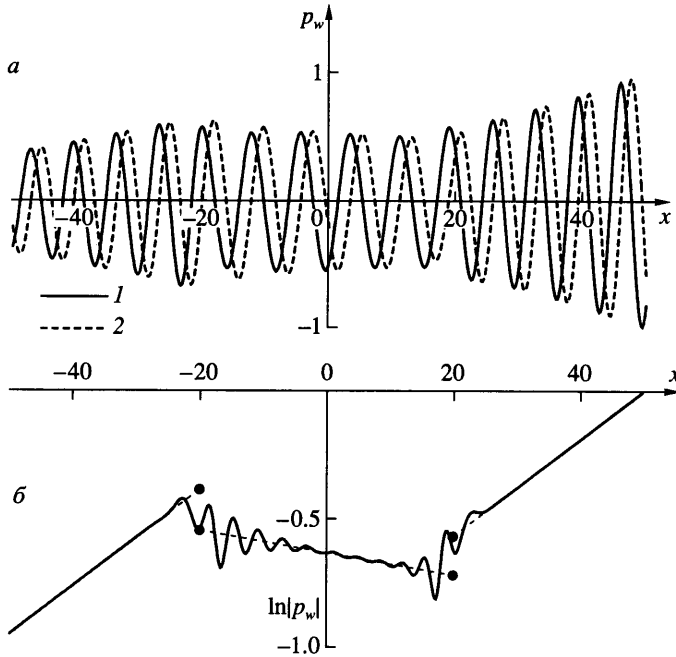
$$\frac{d\alpha D}{d\sigma d\alpha} = 1 \quad (3.8)$$

Отсюда следует совпадение правых частей соотношений (3.6) и (3.7). Этим завершается доказательство эквивалентности двух подходов в задаче об эволюции волны неустойчивости в канале, содержащем слабоподатливую секцию.

Пусть теперь податливость секции кончена, и ее пассивные колебания оказывают на поток воздействие, сравнимое с возмущением в набегающей волне. При $\sigma = O(1)$ анализ структуры возмущенного движения базируется на численном решении задачи (3.3), (3.1). Приведем краткое описание алгоритма расчета.

Входящая в интегральный оператор (3.1) функция $D(k)$ определена первым равенством (1.8) через решение задачи (1.7), метод расчета которого изложен в [6]. Функция D не зависит от параметров, характеризующих продольную неоднородность, поэтому вычисление этой функции фактически означает интегрирование исследуемой краевой задачи по переменной y . Результаты расчета могут быть затем использованы для изучения процессов прохождения волны Толлмина–Шлихтинга через секции с различными распределениями податливости $F(x)$ и при разных значениях параметра упругости σ .

Для вычисления интегралов по k проводилась табуляция функции $D(k)^{-1}$, причем точки разбиения располагались тем гуще, чем резче она изменялась. В дальнейшем вместо этой функции использовалось ее кусочно-линейное приближение, что позволяло вычислять интегралы с ядром Фурье в явном виде. Для дискретизации задачи по переменной x проводилось разбиение носителя функции $F(x)$, задающего местоположение податливого участка. При численном интегрировании по ξ искомая функция f также заменялась своей кусочно-линейной аппроксимацией. В результате интеграль-



Фиг. 3. Прохождение волны Толлмина–Шлихтинга через секцию с податливыми стенками: *a* – продольное распределение комплексной амплитуды ($1 - \text{Re}p_w$, $2 - \text{Im}p_w$); *б* – кривая нарастания возмущений

ное уравнение (3.3) сводилось к линейной неоднородной системе алгебраических уравнений, причем роль неизвестных играли значения функции $f(x)$ в точках проведенного разбиения. Решение полученной системы вычислялось методом Гаусса. В расчетах использовались гладкие распределения податливости в виде “полки”, сопрягаемой с жесткими стенками кусочно-параболическими переходными участками:

$$F = \begin{cases} 1, & |x| \leq l; & 1 - 2\left(\frac{|x| - l}{a}\right)^2, & l < |x| \leq l + \frac{a}{2} \\ 2\left(\frac{|x| - l}{a} - 1\right)^2, & l + \frac{a}{2} < |x| \leq l + a; & 0, & |x| > l + a \end{cases} \quad (3.9)$$

На фиг. 3 показан пример применения описанного метода к расчету процесса прохождения волны Толлмина–Шлихтинга через податливую секцию с параметрами $\sigma = 3$, $l = 18$, $a = 4$: на части *a* фигуры приведена соответствующая зависимость от x комплексной амплитуды возмущения давления на стенке, на части *б* изображена кривая нарастания изучаемого волнового процесса. Слева и справа от неоднородности возмущение имеет вид нарастающих волн Толлмина–Шлихтинга, распространяющихся в канале с жесткими стенками бесконечной протяженности. В отличие от активного метода гашения, рассмотренного в разд. 2, набегающая волна не подавляется полностью, а лишь ослабляется внутри податливой секции ($|P| = 0.391$, $\arg P = 1.11$).

Как и у σ -однородной задачи (1.1), (1.5), у рассматриваемой здесь продольно-неоднородной задачи (1.1), (1.4) существует бесконечное множество линейно независимых решений. Выше исследовано одно из них, базирующееся на собственном решении, соответствующем волновому числу α_1 . Задача о прохождении через податли-

вую секцию моды, соответствующей другому волновому числу α_n , может быть сведена к интегральному уравнению, аналогичному (3.3) (α_1 следует заменить на α_n). Расчет решения такой задачи выполняется совершенно аналогично случаю волны Толлмина–Шлихтинга и поэтому не иллюстрируется.

4. Податливость, изменяющаяся скачком. Матрица рассеяния. Более детальное изучение структуры колебаний потока внутри зоны податливости показывает, что на некотором удалении от стыков с жесткими стенками возмущение имеет характерный вид затухающей волны, по параметрам весьма близкой к волне Толлмина–Шлихтинга в канале со стенками однородной упругости $\sigma = 3$. Таким образом, на качественном уровне процесс эволюции возмущения состоит из следующих этапов: слева на податливую секцию набегают неустойчивая мода, соответствующая жестким стенкам, на левом стыке она трансформируется в ту же моду, но соответствующую однородной податливости, и, наконец, на правом стыке происходит обратная трансформация. На фиг. 3,б этот схематический процесс обозначен штриховыми линиями. На схеме отчетливо видно, что в районе стыков амплитуда компоненты, соответствующей волне Толлмина–Шлихтинга, меняется скачком. Расчеты показывают, что при уменьшении протяженности сглаживающих участков ($a \rightarrow 0$) решение стремится к некоторому предельному виду с сохранением описанных выше особенностей. В этой связи представляется естественным рассмотрение модельной задачи о трансформации возмущений на стыке двух секций с однородной, но различной податливостью.

Пусть границы течения состоят из двух полубесконечных секций $x < 0$ и $x > 0$, характеризующихся постоянными податливостями σ и σ' . В этом случае возмущение описывается σ -однородной краевой задачей слева от стыка, и σ' -однородной – справа. Согласно [7], в каждой из рассматриваемых областей течения возмущение представимо в виде суперпозиции собственных функций соответствующих однородных краевых задач для линеаризованной системы уравнений Навье–Стокса. В частности, для возмущения давления на верхней стенке имеем

$$p_w = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp(i\alpha_n x), \quad x < 0; \quad p_w = \sum_{n=1}^{\infty} c'_n \exp(i\alpha'_n x), \quad x > 0 \quad (4.1)$$

где α_n – собственные значения σ -однородной задачи, а α'_n – соответствующие им собственные значения σ' -однородной задачи. Цель данного раздела состоит в определении взаимосвязи между наборами комплексных постоянных c_n и c'_n и в построении на этой основе аналитического решения задачи о трансформации волны Толлмина–Шлихтинга на стыке секций различной податливости.

Предположим, что конфигурация возмущенного движения при $x < 0$ известна, т.е. весовые коэффициенты c_n в первом равенстве (4.1) считаются заданными. Во всей области $-\infty < x < +\infty$, $0 < y < 1$ возмущение удовлетворяет системе (1.1), на оси канала $y = 0$ – условиям симметрии, а на стенке $y = 1$ – σ' -неоднородным условиям

$$v_x(x, 1) - 2\sigma' p(x, 1) = 2(\sigma - \sigma')\theta(-x) \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp(i\alpha_n x)$$

$$v_y(x, 1) + i\omega\sigma' p(x, 1) = -i\omega(\sigma - \sigma')\theta(-x) \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp(i\alpha_n x)$$

где $\theta(x)$ – функция Хевисайда. Подобно задаче о вибраторе [6], решение сформулированной σ' -неоднородной краевой задачи может быть построено с помощью обоб-

щения преобразования Фурье. Выражения для фурье-образов решения, вид которых совершенно аналогичен (1.6), для краткости не приводятся.

Выпишем формулу для возмущенного давления на верхней стенке, полученную с использованием упомянутого интегрального преобразования

$$p_w = \int \sum_{c'_m=1}^{\infty} \frac{(\sigma - \sigma')c_m}{2\pi i [D(k) - \sigma'](\alpha_m - k)} \exp(ikx) dk \quad (4.2)$$

Здесь контур интегрирования C' , начинающийся и заканчивающийся в бесконечно удаленных точках, обходит все полюса $k = \alpha'_n$ снизу, а все полюса $k = \alpha_n$ — сверху. Для вычисления интеграла (4.2) снова применим интегральную теорему Коши. При $x < 0$ получаем выражение, совпадающее с первой формулой (4.1). Для $x > 0$ имеем

$$p_w = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\sigma - \sigma')c_m}{\alpha_m - \alpha'_n} \left[\frac{dD}{d\alpha}(\alpha'_n) \right]^{-1} \exp(i\alpha'_n x) \quad (4.3)$$

Сравнивая (4.3) со вторым равенством (4.1), получаем искомую связь

$$c' = S(\sigma', \sigma)c \quad (4.4)$$

где c и c' — бесконечномерные векторы, составленные из комплексных амплитуд c_n и c'_n , а S — бесконечномерная комплексная матрица рассеяния, элементы которой с учетом (3.8) определяются соотношениями

$$S_{nm}(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\alpha_m(\sigma_2) - \alpha_n(\sigma_1)} \frac{d\alpha_n}{d\sigma}(\sigma_1) \quad (4.5)$$

Таким образом, при рассеянии возмущения на скачке податливости каждая из составляющих его мод рассеивается во все моды; элемент матрицы S_{nm} имеет смысл коэффициента рассеяния моды с номером m из левой секции в моду с номером n в правой.

Опишем некоторые свойства матрицы рассеяния. Будем теперь считать заданной конфигурацию возмущенного течения справа от стыка (второе равенство (4.1)). Формулируя σ -неоднородные условия для возмущения при $y = 1$ и повторяя рассуждения, получим $c = S(\sigma, \sigma')c'$. Сопоставляя это соотношение с (4.4), получим

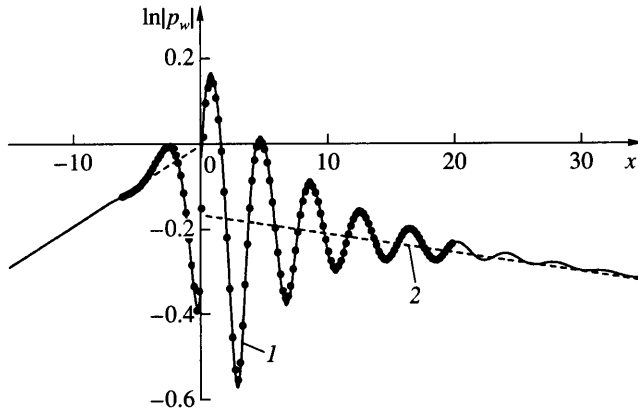
$$S^{-1}(\sigma_1, \sigma_2) = S(\sigma_2, \sigma_1)$$

Опуская для краткости доказательство, приведем общие свойства матрицы рассеяния

$$S(\sigma_1, \sigma_3) = S(\sigma_1, \sigma_2)S(\sigma_2, \sigma_3), \quad S(\sigma, \sigma) = E$$

Формулы (4.1), (4.4), (4.5) дают аналитическое решение задачи о рассеянии возмущений общего вида на стыке секций различной податливости. Для объяснения скачка амплитуды неустойчивой моды, описанного в разд. 3, дадим математическую формулировку задачи о трансформации волны неустойчивости. Предположим, что слева на область стыка набегают волна Толлмина–Шлихтинга с амплитудой $c_1 = 1$.

Комплексную амплитуду c'_1 прошедшей волны назовем коэффициентом трансформации и обозначим T . На коэффициенты при других модах будем накладывать условия, обеспечивающие затухание соответствующих возмущений при удалении от стыка: $c_n = 0$ при $\text{Im} \alpha_n > 0$ и $c'_n = 0$ при $\text{Im} \alpha'_n < 0$. Остальные коэффициенты, так же как и T , неизвестны. Они удовлетворяют линейной алгебраической системе, определяемой соотношениями (4.4) и сформулированными условиями.



Фиг. 4. Рассеяние волны Толлмина–Шлихтинга на стыке жесткой и упругой секций: 1 – расчет с учетом динамики пяти мод; 2 – одномодовое приближение

В асимптотическом случае близких податливостей секций $\Delta\sigma = \sigma' - \sigma \ll 1$ решение сформулированной задачи дается разложением

$$T = 1 + \frac{\Delta\sigma d^2\alpha_1}{2 d\sigma^2}(\sigma) \left[\frac{d\alpha_1}{d\sigma}(\sigma) \right]^{-1} + O(\Delta\sigma^2)$$

В общем случае поставленная задача решалась численно с помощью конечномерной аппроксимации: при описании процесса рассеяния учитывалось лишь конечное число мод. При отборе мод в расчет принимались как абсолютные величины коэффициентов рассеяния (определяемые величиной $d\alpha_n/d\sigma$ – “подвижностью” собственных значений при варьировании σ), так и скорости затухания мод $|\text{Im}\alpha_n|$. В результате выяснилось, что наиболее важную роль при описании рассеяния волны Толлмина–Шлихтинга на скачке податливости играют пять мод, упомянутых в разд. 1 (фиг. 1).

На фиг. 4 приведены кривые нарастания возмущений, рассчитанные разными методами для процесса прохождения волны Толлмина–Шлихтинга через область стыка между жесткой $\sigma = 0$ и податливой $\sigma' = 3$ секциями. Линиями показаны результаты расчетов, выполненных методом рассеяния для различного числа учитываемых мод. На этом же графике точками нанесены результаты численного анализа, выполненного по методике разд. 3 для процесса прохождения волны Толлмина–Шлихтинга через секцию канала с финитным распределением податливости, аппроксимирующим исследуемый скачок (протяженное $l = 29.9$ распределение вида (3.9) с короткими участками сопряжения $a = 0.2$, сдвинутое вниз по потоку на $l + a/2$; параметр податливости $\sigma = 3$). Сравнение результатов показывает, что для адекватного количественного описания процесса рассеяния волны неустойчивости на скачке податливости вполне достаточно учета динамики всего пяти упомянутых мод; в этом приближении вычисление коэффициента трансформации дает $|T| = 0.855$, $\arg T = -0.029$. Таким образом, для величины коэффициента трансформации справедлива приближенная формула $T \approx S_{11} - S_{12}S_{21}/S_{22}$.

Заметим, что даже одномодового приближения (когда учитывается только рассеяние неустойчивой моды в саму себя) оказывается достаточно для описания рассматриваемого процесса на некотором удалении от стыка. Последний метод дает еще более

простое выражение для коэффициента трансформации: $T \approx S_{11}$. Эта формула хорошо описывает как ослабление волны, так и изменение ее фазы ($|T| = 0.851$, $\arg T = 0.018$).

5. Метод локально-однородной задачи. Полученное аналитическое решение задачи о рассеянии возмущения произвольного вида на стыке секций различной упругости дает ключ к построению нового метода расчета эволюции возмущений в течениях между стенками с неоднородной податливостью. В разд. 3 был рассмотрен случай, когда податливая секция имеет конечный продольный размер; соответствующий закон эластичности имел вид $\sigma^\circ(x) = \sigma F(x)$, где $F(x)$ – финитная функция. В этом разделе будет предложен метод, пригодный для исследования процесса распространения возмущений в общем случае нелокальной податливости.

Для формулировки метода предположим, что канал состоит из трех секций: двух полубесконечных, характеризуемых постоянными коэффициентами податливости σ и σ' , и расположенной между ними переходной секции с переменной эластичностью $\sigma^\circ(x)$. Проведем разбиение $\{x_j, j = 1, \dots, N + 1\}$ по продольной переменной области течения, охватывающей участок неоднородной податливости. На промежутках проведенного разбиения будем заменять локальное распределение податливости константой, равной значению коэффициента эластичности в некоторой внутренней точке рассматриваемого промежутка: $\sigma_1 = \sigma$; $\sigma_j = \sigma^\circ(\xi)$, $x_j < \xi < x_{j+1}$, $j = 2, \dots, N - 1$; $\sigma_N = \sigma'$. Если исходное распределение податливости имеет точки разрыва, будем включать эти точки в проводимое разбиение. Таким образом, задачу эволюции возмущения внутри секции с неоднородной податливостью стенок будем заменять аппроксимирующей ее модельной задачей со ступенчатым распределением податливости (в расчетах использовались разбиения с $N = 400-600$).

В каждом из промежутков $x_j < x < x_{j+1}$, $j = 1, \dots, N$, возмущение представим в виде суперпозиции собственных функций соответствующих σ_j -однородных задач:

$$q = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(j)} q^*[y; \alpha_n(\sigma_j), \sigma_j] \exp[i\alpha_n(\sigma_j)(x - x_j)] \quad (5.1)$$

Внутри промежутков с однородной податливостью моды распространяются независимо друг от друга; на стыках соседних промежутков происходит перерассеяние мод друг в друга по закону, сформулированному в разд. 4, поэтому векторы комплексных амплитуд $\mathbf{c}^{(j)}$ и $\mathbf{c}^{(j+1)}$ связаны между собой бесконечномерными комплексными матрицами перехода \mathbf{P}_j , $j = 1, \dots, N - 1$:

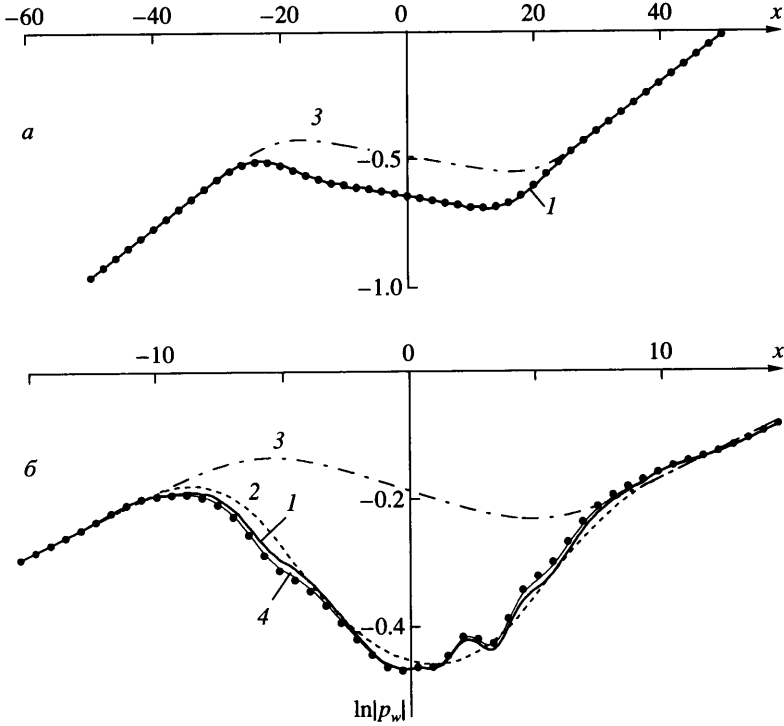
$$\mathbf{c}^{(j+1)} = \mathbf{P}_j \mathbf{c}^{(j)}, \quad \mathbf{P}_j = \mathbf{S}(\sigma_{j+1}, \sigma_j) \mathbf{A}(x_{j+1}, x_j; \sigma_j) \quad (5.2)$$

Здесь \mathbf{A} – бесконечномерная диагональная комплексная матрица, характеризующая усиление (ослабление) мод на участках однородной податливости

$$A_{nm} = \exp[i\alpha_n(\sigma_j)(x_{j+1} - x_j)] \delta_{nm}$$

Таким образом, эволюция произвольного возмущения в течении между стенками со ступенчатым распределением податливости представляет собой цепь последовательных усилений и рассеяний. Для выделения единственного решения на возмущения должны быть наложены дополнительные условия вверх и вниз по потоку от области неоднородности подобно тому, как это делалось в разд. 4.

Для тестирования предлагаемого метода были проведены расчеты процесса прохождения волны Толлмина–Шлихтинга через конечные податливые секции вида (3.9). На фиг. 5,а показана эволюция возмущения внутри секции длиной порядка пяти длин волн Толлмина–Шлихтинга с плавным распределением податливости ($l = 10$, $a = 20$; $\sigma = 3$). Линиями показаны результаты расчета, выполненного по алгоритму “усиление–рассеяние”. Точками отмечены результаты расчета с помощью метода



Фиг. 5. Распространение волны Толлмина–Шлихтинга в канале с финитным распределением податливости стенок: *a* – протяженная секция умеренной податливости; *б* – короткая секция сильной податливости; *1* – пятимодовое приближение; *2* – одномодовое приближение; *3* – расчет без учета рассеяния; *4* – точный расчет с учетом динамики 71 моды

интегрального уравнения, которые, в данном контексте, можно трактовать как “точное” решение. В случае распределения с умеренной протяженностью и амплитудой пятимодовое приближение дает результаты, очень близкие к точным.

На фиг. 5,б проиллюстрирован процесс распространения волны неустойчивости внутри короткой секции (с протяженностью порядка одной длины волны), но с большей податливостью ($l = 0$, $a = 10$; $\sigma = 5$). В этом случае пятимодовое приближение снова дает результаты, удовлетворительные как в качественном, так и в количественном отношении. Дальнейшее улучшение точности может быть достигнуто путем увеличения числа учитываемых мод.

Следуя описанному здесь дискретному подходу к исследованию процесса распространения возмущений, сформулируем его непрерывный аналог, выполняя предельный переход $d = \max(x_{j+1} - x_j) \rightarrow 0$ (при этом $N \rightarrow \infty$). В результате разложение (5.1) перейдет в

$$q = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x) q^* [y; \alpha_n(\sigma^\circ), \sigma^\circ] \quad (5.3)$$

Значения бесконечномерной комплексной вектор-функции $c(x)$ (непрерывного аналога набора $c^{(j)}$, $j = 1, \dots, N$), вычисленные для двух любых сечений x' и x'' , свя-

заны друг с другом посредством бесконечномерной комплексной матрицы перехода \mathbf{P}

$$\mathbf{c}(x'') = \mathbf{P}(x'', x'; \sigma^\circ) \mathbf{c}(x'), \quad \mathbf{P} = \lim_{d \rightarrow 0} \prod_{j=1}^{N-1} \mathbf{P}_{N-j} \quad (5.4)$$

В последнем равенстве использовано разбиение с $x_1 = x'$, $x_{N+1} = x''$. Как и матрица рассеяния, матрица перехода обладает свойством мультипликативности.

В случае гладкого распределения податливости “интегральное” соотношение (5.4) может быть заменено эквивалентной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\mathbf{c}}{dx} = (\mathbf{A}' + \mathbf{S}') \mathbf{c}, \quad A'_{nm} = i\alpha_n(\sigma^\circ) \delta_{nm} \quad (5.5)$$

$$S'_{nm} = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{d\sigma^\circ}{dx} \frac{d^2 \alpha_n(\sigma^\circ)}{d\sigma^2} / \frac{d\alpha_n(\sigma^\circ)}{d\sigma}, & n = m \\ \frac{d\sigma^\circ}{dx} \frac{d\alpha_n(\sigma^\circ)}{d\sigma} / [\alpha_n(\sigma^\circ) - \alpha_m(\sigma^\circ)], & n \neq m \end{cases}$$

Система уравнений (5.3), (5.5), описывающая динамику мод в плоском течении Пуазейля между стенками с неоднородной упругостью, математически эквивалентна изначальной краевой задаче для линеаризованной системы уравнений Навье-Стокса (1.1) с условиями (1.3), (1.4).

6. Устойчивость продольно-неоднородного течения. Исследуем более подробно поведение кривых нарастания возмущений в процессе прохождения волны Толлмина–Шлихтинга через область неоднородной податливости. Согласно классической теории устойчивости [8], пренебрегающей локальной неоднородностью течения, экстремумы интенсивности пульсаций достигаются в точках нейтральной устойчивости, определяемых соотношением $\text{Im} \alpha_n[\sigma^\circ(x)] = 0$. Для конфигурации течения, соответствующей фиг. 5,а (протяженная секция умеренной податливости), это условие дает $x = \pm 16.9$. Точный расчет показывает, что в действительности локальный максимум достигается в точке $x = -23.1$, а минимум – при $x = 12.8$, т.е. оба экстремума расположены значительно выше по течению. Еще большее расхождение с предсказанием классической теории ($x = \pm 5.2$) наблюдается при прохождении волны через короткую область сильной неоднородности (фиг. 5,б). В этих условиях левый максимум также сильно сдвинут к левой границе упругой секции ($x = -8.8$), а абсолютный минимум достигается практически в центре неоднородности ($x = -0.2$), когда “классический” декремент затухания волны Толлмина–Шлихтинга максимален.

Указанное расхождение имеет простое физическое объяснение. Проведенный в разд. 5 анализ показывает, что процесс распространения возмущений в неоднородных течениях может быть представлен в виде последовательности непрерывно чередующихся независимых эволюций мод (усилений или ослаблений) и их взаимных рассеяний на местной неоднородности. При обычном подходе учитывается лишь усиление (затухание) мод, рассчитанное по локально-однородному приближению, а процесс рассеяния игнорируется. По этой причине применение локально-однородного подхода в линейной теории устойчивости дает удовлетворительные результаты лишь для течений с очень слабой неоднородностью.

В связи с этим для адекватного описания эволюции возмущений в течениях с умеренной продольной неоднородностью обычно прибегают к прямому численному мо-

делированию [5], но известные методы решения линеаризованной системы уравнений Навье–Стокса требуют больших вычислительных затрат. Предпринимались также попытки упростить полную систему линеаризованных уравнений путем замены ее системой параболического типа [9], но и метод параболизированных уравнений устойчивости (PSE-метод) оказался работоспособным только при описании эволюции возмущений в слабонеоднородных течениях.

В разд. 5 продемонстрирован оперативный метод расчета полной линеаризованной системы уравнений Навье–Стокса, позволяющий количественно верно описывать поведение возмущений при их рассеянии на короткой (порядка одной длины волны Толлмина–Шлихтинга) и интенсивной неоднородности. Этот метод имеет ясный физический смысл и универсален; он может быть применен при расчете процессов генерации и эволюции возмущений в ряде других, практически важных задач (например, при описании линейной стадии ламинарно-турбулентного перехода в пограничном слое на скользящем крыле). Метод гибок в применении: он позволяет регулировать число учитываемых мод в зависимости от характера неоднородности.

Как уже отмечалось выше, классическая теория устойчивости дает неудовлетворительное описание нарастания возмущений в течениях с умеренной продольной неоднородностью, поскольку не учитывает процесса рассеяния возмущений на неоднородности. В то же время одномодовое приближение количественно верно описывает процесс рассеяния волны неустойчивости на стыке двух секций с различной однородной податливостью (разд. 4). В этой связи представляется естественным применение одномодового приближения для изучения эволюции волны Толлмина–Шлихтинга в течениях с распределенной продольной неоднородностью (в рамках данной постановки – в течении Пуазейля между стенками с распределенной податливостью). Этот подход позволяет учесть как усиление, так и рассеяние волны на неоднородности.

В одномодовом приближении бесконечномерная система (5.5), описывающая эволюцию возмущений в продольно-неоднородном течении, сводится к единственному обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{dc_1}{dx} = (A'_{11} + S'_{11})c_1 \quad (6.1)$$

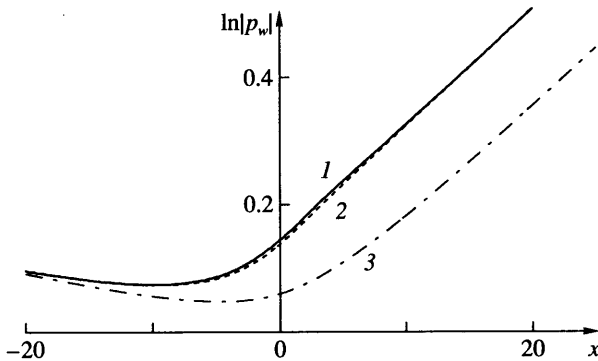
Его интегрирование может быть проведено в явном виде

$$\frac{c_1(x)}{c_1(x_0)} = \sqrt{\frac{d\alpha_1}{d\sigma}[\sigma^\circ(x)] / \frac{d\alpha_1}{d\sigma}[\sigma^\circ(x_0)]} \exp \int_{x_0}^x i\alpha_1[\sigma^\circ(\xi)] d\xi \quad (6.2)$$

Формула (6.2) связывает комплексные амплитуды волны неустойчивости в точках x и x_0 (текущей и начальной). От классического квазиоднородного подхода выражение (6.2) отличается лишь множителем, стоящим в правой части перед экспонентой. Именно этот множитель учитывает рассеяние волны Толлмина–Шлихтинга в себя на неоднородности.

На фиг. 5 показаны результаты расчетов кривых нарастания, выполненных по формуле (6.2) и с помощью классического подхода. В случае умеренной неоднородности (фиг. 5,а) расчет по одномодовому приближению дает результаты, практически не отличающиеся от точных. Замечательно, что даже в случае сильной неоднородности формула (6.2) обеспечивает точность расчета, вполне достаточную с точки зрения инженерных задач (фиг. 5,б). На этом фоне различие классического подхода с точным решением выглядит особенно значительным.

Единственный параметр, по которому имеется хорошее совпадение между расчетом с помощью квазиоднородного приближения и точным решением, – это результирующая величина комплексной амплитуды прошедшей волны Толлмина–Шлих-



Фиг. 6. Прохождение волны Толлмина–Шлихтинга через секцию с нелокальным распределением податливости; обозначения те же, что и на фиг. 5

тинга, т.е. коэффициент прохождения P . Такое свойство разных подходов связано с тем, что неоднородности, расчет прохождения которых волной неустойчивости проиллюстрирован на фиг. 5, носят локальный характер: вверх и вниз по потоку от области неоднородности секции канала имеют одинаковые (равные 0) податливости. В этом случае множитель перед экспонентой в (6.2) равен 1 в областях течения, лежащих как вверх, так и вниз по потоку от неоднородности. В большинстве задач, имеющих практическое значение, эта ситуация не имеет места. Как правило, ламинарный пограничный слой вниз по потоку становится все менее наполненным, а его толщина возрастает. Не восстанавливаются характеристики основного течения и за областью локального отрыва.

На фиг. 6 показаны кривые нарастания волны Толлмина–Шлихтинга, вычисленные с помощью пятимодового, одномодового и квазиоднородного приближений для распределения податливости, моделирующего неоднородность ламинарного пограничного слоя ($\sigma^\circ = 3/2 - 3 \operatorname{arctg}(x/5) / \pi$). Первые два способа дают близкие друг другу результаты, сильно расходящиеся с результатами расчета по обычному квазиоднородному подходу. Проведенное исследование позволяет рекомендовать одномодовое приближение в качестве инженерного метода для расчета характеристик устойчивости неоднородных течений. По вычислительным затратам этот метод эквивалентен квазиоднородному подходу, а по точности практически совпадает с решением полной линеаризованной системы уравнений даже для неоднородностей с характерным размером порядка длины волны Толлмина–Шлихтинга.

Придадим амплитудному уравнению (6.1) вид, стандартный для классической теории линейной устойчивости

$$\frac{dc_1}{dx} = i\alpha_1^\circ c_1, \quad \alpha_1^\circ = \alpha_1 - \frac{i}{2} \frac{d\sigma^\circ}{dx} \frac{d^2\alpha_1}{d\sigma^2} \frac{d\alpha_1}{d\sigma} \quad (6.3)$$

Здесь $\alpha_1^\circ(x)$ – “эффeктивное” волновое число неустойчивой моды, распространяющейся по течению с распределением неоднородности вида $\sigma^\circ(x)$. Наклон соответствующей кривой нарастания определяется соотношением

$$\frac{d}{dx} \ln |c_1| = -\operatorname{Im}\alpha_1 + \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \ln \left| \frac{d\alpha_1}{d\sigma} \right| \quad (6.4)$$

где первое слагаемое в правой части – инкремент нарастания волны Толлмина–Шлихтинга, вычисленный в квазиоднородном приближении, а второе – скорость изменения амплитуды волны при ее рассеянии на неоднородности. Соотношения (6.3), (6.4) хорошо аппроксимируют изучаемый процесс для умеренной неоднородности.

Из соотношения (6.4) следует приближенное условие нейтральной устойчивости неоднородного течения

$$\operatorname{Im} \alpha_1(\sigma^\circ) \approx \frac{1}{2} \frac{d\sigma^\circ}{dx} \operatorname{Re} \left[\frac{d^2 \alpha_1(\sigma^\circ)}{d\sigma^2} / \frac{d\alpha_1(\sigma^\circ)}{d\sigma} \right]$$

При $\sigma^\circ = \text{const}$ оно переходит в условие для σ° -однородной задачи.

Заключение. Предложен метод расчета эволюции нестационарных возмущений в продольно-неоднородных течениях, основанный на представлении процесса распространения возмущений в виде независимого усиления (ослабления) нормальных мод в локально-однородном течении и их рассеяния друг в друга на местной неоднородности. Тестирование метода для случая течения в плоском канале со стенками неоднородной податливости показало, что для точного описания процесса распространения возмущений достаточно учета динамики пяти мод, а одномодовое приближение обеспечивает удовлетворительную точность с точки зрения инженерных задач. Дано объяснение явлению дополнительного скачкообразного уменьшения амплитуды волны неустойчивости, вызванного внезапным увеличением податливости стенок.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№№ 01-01-00614, 99-01-00419, 00-15-96069).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kramer M.O.* Boundary layer stabilization by distributed damping // *J. Aeronaut. Sci.* 1957. V. 24. № 6. P. 459–460.
2. *Milling R.W.* Tollmien–Schlichting wave cancellation // *Phys. Fluids.* 1981. V. 24. № 5. P. 979–981.
3. *Мануйлович С.В.* О прохождении волны неустойчивости через участок канала переменной ширины // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1992. № 2. С. 34–41.
4. *Terent'ev E.D.* A linear problem of a vibration in a boundary layer on a partially elastic surface // *Intern. Workshop on Advances in Analytical Methods in Aerodynamics, Miedzyzdroje, Poland.* 1993.
5. *Davies C., Carpenter P.W.* Numerical simulation of the evolution of Tollmien–Schlichting waves over finite compliant panels // *J. Fluid Mech.* 1997. V. 335. P. 361–392.
6. *Мануйлович С.В.* О восприимчивости плоского течения Пуазейля к вибрации стенок канала // *Изв. РАН. МЖГ.* 1992. № 4. С. 12–19.
7. *Lin C.C.* Some mathematical problems in the theory of the stability of parallel flows // *J. Fluid Mech.* 1961. V. 10. Pt 3. P. 430–438.
8. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 711 с.
9. *Bertolotti F.P., Herbert T., Spalart P.R.* Linear and nonlinear stability of the Blasius boundary layer // *J. Fluid Mech.* 1992. V. 242. P. 441–474.