

УДК 533.95:537.84:519.6

© 2003 г. А. Н. КОЗЛОВ

ВЛИЯНИЕ ПРОДОЛЬНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ЭФФЕКТ ХОЛЛА В КАНАЛЕ ПЛАЗМЕННОГО УСКОРИТЕЛЯ

Представлена аналитическая модель стационарных двумерных течений в коаксиальных каналах плазменных ускорителей при наличии продольного магнитного поля. Найдено решение задачи в приближении плавного канала для МГД-уравнений идеальной двухкомпонентной плазмы. Приведен пример возникающих осесимметричных течений и исследованы особенности плазмодинамических процессов. Обнаружено, что с помощью продольного поля и вращения плазмы можно уменьшить влияние эффекта Холла и область прианодного потока.

Ключевые слова: плазменный ускоритель, эффект Холла, коаксиальные каналы, двухкомпонентная плазма, прианодный поток.

Достижению больших скоростей в плазменных ускорителях препятствует ряд факторов, прежде всего явление кризиса тока [1], обусловленное эффектом Холла. Вследствие этого имеет место недостаток ионов в прианодной области, возникновение особенностей в поведении плазменных токов на поверхности анода и срыв процесса ускорения. Для преодоления негативного воздействия эффекта Холла целесообразен переход к системам типа квазистационарного плазменного ускорителя, предложенного в [2]. Эксперименты [3–6] в целом подтвердили идеи, на основе которых были сконструированы плазменные ускорители данного типа. В экспериментах были получены рекордные потоки плотной плазмы $n \sim 10^{14} - 10^{15} \text{ см}^{-3}$ со скоростью ионов водорода $V \sim 4 \cdot 10^7 \text{ см/с}$. Большая роль в разработке ускорителей отводится математическим моделям плазмодинамических процессов [7–9]. Теоретические и численные исследования процессов в ускорителях для плотной плазмы проводятся в рамках МГД-уравнений.

Конструктивно плазменный ускоритель является магнитоплазменным аналогом газодинамического сопла. Основу ускорителя составляют два профилированных электрода, между которыми по плазме протекает ток \mathbf{j} . Проходящий по внутреннему электроду ток порождает азимутальное магнитное поле H_ϕ . В результате плазма ускоряется вдоль оси системы за счет амперовой силы $1/c [\mathbf{j}, \mathbf{H}]$. Наиболее эффективное ускорение происходит при условии, что ток $\mathbf{j} = c/4\pi r \text{rot} \mathbf{H}$ имеет преимущественно радиальное направление. Аналогично газодинамическому соплу в канале плазменного ускорителя реализуется трансзвуковое течение. В середине канала с минимальной площадью поперечного сечения происходит переход скорости потока через скорость магнитозвуковой волны.

Основам теории аксиально симметричных течений посвящены обзор [10] и монография [1]. В работах [11–13] построены соответствующие примеры осесимметричных течений двухкомпонентной плазмы, определены профили электродов и исследована динамика потоков в отсутствии продольного поля в каналах медленно меняющегося сечения.

Наличие продольного магнитного поля ($H_z \gg H_r$) дает новые возможности для управления динамическими процессами в канале ускорителя.

В данной работе аналитически выявлено влияние продольного магнитного поля на двумерные аксиально симметричные течения двухкомпонентной плазмы. Исследования проведены в рамках приближения плавного канала для уравнений идеальной магнитной гидродинамики. Продольное поле усложняет течение, например, приводит к вращению плазмы вокруг оси системы. Анализ важнейших свойств плазменных потоков в этом случае показал, что благодаря продольному полю можно существенно уменьшить влияние эффекта Холла и область прианодного потока.

1. Уравнения для функций потока и законы сохранения. Будем исходить из стационарных уравнений идеальной двухжидкостной магнитной гидродинамики. Пренебрегая массой электронов по сравнению с массой ионов, уравнения запишем в безразмерном виде [11]

$$\operatorname{div} \rho \mathbf{V}_i = 0, \quad \operatorname{div} \rho \mathbf{V}_e = 0 \quad (1.1)$$

$$\rho (\mathbf{V}_i \nabla) \mathbf{V}_i = -\nabla P_i + \frac{\rho}{\xi} (-\nabla \Phi + [\mathbf{V}_i \mathbf{H}]) \quad (1.2)$$

$$0 = -\nabla P_e - \frac{\rho}{\xi} (-\nabla \Phi + [\mathbf{V}_e \mathbf{H}]) \quad (1.3)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\rho}{\xi} (\mathbf{V}_i - \mathbf{V}_e) \quad (1.4)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0 \quad (1.5)$$

$$(\mathbf{V}_i \nabla) S_i = 0; \quad (\mathbf{V}_e \nabla) S_e = 0 \quad (1.6)$$

$$\xi = \frac{cm_i}{eL\sqrt{4\pi\rho_0}}, \quad \beta = \frac{8\pi P_0}{H_0^2}, \quad P_0 = P_0^i + P_0^e = k_B n_0 T_0$$

Здесь индексы i, e отвечают ионной и электронной компонентам плазмы; S_i и S_e – энтропии соответствующих компонент; ξ – локальный параметр обмена, характеризующий эффект Холла в двухжидкостной модели или относительное различие в скоростях электронной и ионной компонент; β – отношение газового и магнитного давлений на входе.

В качестве исходных размерных единиц выступают характерные на входе в канал значения плотности $\rho_0 = m_i n_0$, температуры $T_0 = T_0^i + T_0^e$, длины канала плазменного ускорителя L , напряженности азимутальной составляющей магнитного поля $H_0 = 2J_p/(cR_a)$, где J_p – разрядный ток в системе, R_a – характерный радиус на входе. Единицей измерения скорости является характерная альфвеновская скорость $V_A = H_0/\sqrt{4\pi\rho_0}$, давления – $H_0^2/4\pi$, потенциала – $\Phi_0 = V_A H_0 L/c$.

В случае аксиальной симметрии течения уравнения неразрывности (1.1) и (1.5) позволяют ввести функции тока для скорости ионов и электронов ψ_i, ψ_e и функцию магнитного потока ψ

$$r\rho(V_r)_{i,e} = -\frac{\partial\psi_{i,e}}{\partial z}; \quad r\rho(V_z)_{i,e} = \frac{\partial\psi_{i,e}}{\partial r} \quad (1.7)$$

$$rH_r = -\frac{\partial\psi}{\partial z}; \quad rH_z = \frac{\partial\psi}{\partial r} \quad (1.8)$$

Для уравнений импульсов (1.2) и (1.3) можно записать интегралы типа интеграла Бернулли

$$U_i = \frac{1}{2}V_i^2 + W_i + \frac{1}{\xi}\Phi \equiv U_i(\psi_i); \quad U_e = W_e - \frac{1}{\xi}\Phi \equiv U_e(\psi_e), \quad W_{i,e} = \int \frac{dP_{i,e}}{\rho} \quad (1.9)$$

где функции $W_{i,e}$ при учете (1.6) – пропорциональны энтальпии компонент. Считаем, что энтропия единицы массы каждой из компонент одна и та же во всем потоке. Поскольку уравнения движения можно представить в виде

$$\nabla U_i = \frac{1}{\xi}[\mathbf{V}_i, \mathbf{H}^*], \quad \nabla U_e = -\frac{1}{\xi}[\mathbf{V}_e, \mathbf{H}], \quad H^* = H + \xi \text{rot} V_i \quad (1.10)$$

где \mathbf{H}^* – эффективное магнитное поле, из Φ – компонент данных уравнений легко получить еще два закона сохранения вдоль линий тока

$$D_i = \psi + \xi r V_\phi^i = D_i(\psi_i); \quad D_e = \psi = D_e(\psi_e) \quad (1.11)$$

С учетом введенных функций выпишем преобразованную систему уравнений, которая с точностью до обезразмеривания и пренебрежения массой электронов по сравнению с массой ионов аналогична системе уравнений, полученной в [10] и представленной в энциклопедии [14]

$$U_i(\psi_i) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{r\rho} \frac{\partial \psi_i}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{1}{r\rho} \frac{\partial \psi_i}{\partial r} \right)^2 + (V_\phi^i)^2 \right] + W_i + \frac{1}{\xi} \Phi \quad (1.12)$$

$$U_e(\psi_e) = W_e - \frac{1}{\xi} \Phi \quad (1.13)$$

$$D_i(\psi_i) = \psi + \xi r V_\phi^i; \quad D_e(\psi_e) = \psi \quad (1.14)$$

$$\frac{\xi}{r\rho} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r\rho} \frac{\partial \psi_i}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r\rho} \frac{\partial \psi_i}{\partial r} \right) \right] - \frac{H_\phi}{r\rho} + \frac{V_\phi^i D_i'}{r} = \xi U_i' \quad (1.15)$$

$$-\frac{H_\phi}{r\rho} + \frac{V_\phi^e D_e'}{r} = -\xi U_e' \quad (1.16)$$

$$U_{i,e}' = \frac{dU_{i,e}}{d\psi_{i,e}}; \quad D_{i,e}' = \frac{dD_{i,e}}{d\psi_{i,e}}$$

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -\frac{r\rho}{\xi} (V_\phi^i - V_\phi^e) \quad (1.17)$$

$$\xi r H_\phi = \psi_i - \psi_e \quad (1.18)$$

Уравнения (1.15) и (1.16) следуют из r -компонент (или z -компонент) уравнений (1.10) и законов сохранения. К соотношениям (1.17) и (1.18) приводят соответственно ϕ - и r -компоненты (или z -компонента) уравнения (1.4) с учетом (1.7) и (1.8).

Уравнения (1.12)–(1.18) для 8 неизвестных ψ , ψ_i , ψ_e , ρ , V_ϕ^i , V_ϕ^e , H_ϕ , Φ содержат четыре функции $U_i(\psi_i)$, $U_e(\psi_e)$, $D_i(\psi_i)$, $D_e(\psi_e)$, которые определяются заданием параметров на границах.

Рассмотрим осесимметричные течения при наличии продольного магнитного поля ($H_z^0 \neq 0$) и вращения плазмы. Распределение параметров на границах будем считать таким, что

$$U_e = k\psi_e; \quad k = U_e' = \text{const} \quad (1.19)$$

$$U_i = U_0 - k\psi_i; \quad U_0 = \text{const} \quad (1.20)$$

Согласно (1.19) из (1.16) следует, что при $V_\phi^e = 0$ параметр "вмороженности" $H_\phi/r\rho$ не зависит от линий тока $\psi_e = \text{const}$. Складывая (1.12) и (1.13) с учетом (1.20) и (1.18) получим, что интеграл Бернулли в форме

$$\frac{1}{2}V_i^2 + W + \xi kr H_\phi = U_0 \quad (W = W_i + W_e)$$

также не зависит от линий тока.

2. Течения в каналах медленно меняющегося сечения ($H_z \neq 0$). При условии, что параметры потока медленно меняются вдоль оси системы, искомые функции имеют вид $f(r, \epsilon z)$, где ϵ – малый параметр. Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial z} \sim \epsilon, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \sim \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \sim \epsilon^2$$

Поскольку система уравнений (1.12) – (1.18) содержит только члены, квадратичные относительно $\partial/\partial z$ или $\partial^2/\partial z^2$, то пренебрегая в уравнениях членами, квадратичными по ϵ , получим систему уравнений, содержащих производные только по r .

Исключив из полученной системы с помощью (1.13) и (1.17) потенциал Φ и скорость электронов V_ϕ^e , имеем

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r\rho}\frac{\partial\psi_i}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2}(V_\phi^i)^2 + W + \xi kr H_\phi = U_0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial W}{\partial r} - \frac{1}{r}(V_\phi^i)^2 + \frac{1}{r\rho}\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{H_\phi}{r\rho}\frac{\partial r H_\phi}{\partial r} = 0 \quad (2.2)$$

$$\left(V_\phi^i + \frac{\xi}{\rho}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\right)D_e' = \frac{H_\phi}{\rho} - \xi kr \quad (2.3)$$

Эти уравнения содержат 6 неизвестных ψ , ψ_i , ψ_e , ρ , V_ϕ^i , H_ϕ , и их необходимо дополнить уравнениями (1.14), в которых согласно (1.18) $\psi_e = \psi_i - \xi r H_\phi$. Функции $D_i(\psi_i)$, $D_e(\psi_e)$ будут заданы с помощью значений переменных на границах канала.

Согласно (1.8) из (2.2) следует уравнение радиального равновесия

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(P + \frac{H_\phi^2}{2} + \frac{H_z^2}{2}\right) = \frac{\rho(V_\phi^i)^2}{r} - \frac{H_\phi^2}{r}, \quad P = P_i + P_e$$

Исследование влияния продольного магнитного поля проведем путем сравнения с аналогичными течениями в его отсутствии.

В отсутствие продольного поля и вращения плазмы исходная система уравнений для двухкомпонентной плазмы сводится к квадратурам в двух случаях: холодной

плазмы $W = 0$ и изомагнитного течения $U_e'(\psi_e) = \text{const}$. В изомагнитном случае [11–13] при $\beta \neq 0$ показана слабая зависимость течения от параметра β . В плазменных ускорителях магнитное давление существенно больше газового $\beta \ll 1$. Поэтому в изомагнитных течениях, не выходящих на ось системы, оправдан переход к холодной плазме $W \sim \beta = 0$.

3. Динамика холодной плазмы в отсутствии продольного магнитного поля. Рассмотрим пример течения плазмы при условии $\psi = 0$ и $W = 0$. В этом случае для не вращающейся плазмы $V_\phi^i = V_\phi^e = 0$ система уравнений (2.1)–(2.3) и (1.14) упрощается, поскольку $D_i = 0$ и $D_e = 0$.

Уравнения (2.2) и (2.3) примут вид

$$\frac{\partial r H_\phi}{\partial r} = 0; \quad \frac{H_\phi}{r\rho} = \xi k \tag{3.1}$$

После интегрирования получим

$$H_\phi(z, r) = \frac{C_1(z)}{\xi k r}; \quad \rho(z, r) = \frac{C_1(z)}{\xi^2 k^2 r^2} \tag{3.2}$$

где постоянная интегрирования $C_1(z)$ может быть произвольной, медленно меняющейся функцией от z .

Согласно (3.1) параметр “вмороженности” равен $\xi k = s/r_0$, где r_0 – радиус точки на входе в канал, в которой $|H_\phi| = 1$ и $\rho = 1$; $s = \pm 1$ в зависимости от полярности центрального электрода. Из (2.1) следует

$$\frac{1}{2}(V_z^i)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r\rho} \frac{\partial \psi_i}{\partial r}\right)^2 = U_0 - C_1(z) = \frac{1}{2}V_0^2(z) \tag{3.3}$$

т.е. продольная скорость V_z^i не зависит от r . Константу U_0 в (2.1) определим в точке $z = 0, r = r_0$: $U_0 = V_0^2(0)/2 + 1$. Проинтегрировав уравнение (3.3) с учетом (3.2), найдем

$$\psi_i(z, r) = r_0^2 V_0(z) C_1(z) \ln(r) + C_2(z) \tag{3.4}$$

где $C_2(z)$ – вторая произвольная, медленно меняющаяся функция от z . Функции ψ_e и Φ легко находятся из уравнений (1.18) и (1.13) при $W_e = 0$

$$\Phi(z, r) = \xi C_1(z) - s r_0 V_0(z) C_1(z) \ln(r) - \frac{s}{r_0} C_2(z) \tag{3.5}$$

Динамика плазмы в ускорителях исследуется в разных режимах токопереноса. В режиме электронного токопереноса линии тока ионной компоненты плазмы $\psi_i = \text{const}$ лежат на поверхности непроницаемых электродов: катода $r_k(z)$ и анода $r_a(z)$. При этом электроды не являются эквипотенциальными. Наоборот, в режиме ионного токопереноса электроды представляют собой эквипотенциальные поверхности. В этом случае они должны быть прозрачными для плазмы, поступающей сквозь них в канал. В основе большинства экспериментов [3–6] и соответственно моделей [8, 9, 11–13] лежит ионный токоперенос.

Выбор функций C_1 и C_2 в (3.2)–(3.5) проводится в зависимости от конкретных деталей постановки задачи. В данной работе рассмотрим течение холодной плазмы в режиме ионного токопереноса, когда задан профиль анода $r_a(z)$ и распределение продольной скорости в канале. При этом форма катода $r_k(z)$ будет определяться. Со-

гласно (3.3) продольная скорость ионов в канале $V_z^i = V_0(z)$ не зависит от радиуса r и $C_1(z) = U_0 - 1/2 V_0^2(z)$. Далее необходимо потребовать, чтобы электроды были линиями уровня функции Φ в режиме ионного токопереноса. Считая потенциал анода равным нулю $\Phi(z, r_a(z)) = 0$, определим функцию $C_2(z)$ в (3.5) и окончательно найдем

$$\Phi(z, r) = -sr_0 V_0(z) C_1(z) \ln\left(\frac{r}{r_a(z)}\right); \quad \psi_e(z, r) = -sr_0 \Phi(z, r) \quad (3.6)$$

Функция ψ_i определяется с помощью (1.18).

Определим форму второго электрода, задав функцию $V_0(z)$ отрезком синусоиды так, что продольная скорость монотонно возрастает от значения $V_0(0)$ на входе в канал до значения $V_0(1)$ на выходе ($K = V_0(1)/V_0(0)$ – коэффициент ускорения). Геометрия электродов на фиг. 1 отвечает трансзвуковому течению с параметрами: $\xi = 0.02$; $K = 10$; $V_0(1) = 1.36$; $r_0 = 0.41$; $r_k(1) = 0.1$. При этом потенциал катода $-\Phi_k = \Phi_k^1 = -0.066$.

Ионная линия тока, выходящая из анода при $z = 0$, является границей раздела основного и прианодного потоков (пунктир на фиг. 1, θ). Последний втекает в канал со стороны анода. Кривая $r = r_0$ представляет собой электронную линию тока с началом в той же точке. Расхождение электронной и ионной траекторий за счет эффекта Холла определяет область прианодного потока.

4. Постановка задачи при наличии продольного магнитного поля. В качестве основы для исследования влияния продольного магнитного поля возьмем построенный в разд. 3 пример течения холодной плазмы.

Будем считать, что геометрия канала задана профилями электродов $r_k(z)$ и $r_a(z)$, приведенными на фиг. 1 и соответствующими возможности трансзвукового течения. Значения параметров плазмы на входе такие же, как в отсутствие продольного поля, т.е.

$$z = 0: \quad V_\phi^i = V_\phi^e = 0, \quad rH_\phi = -r_0 = \text{const}$$

Кроме того, зададим на входе $H_z \neq 0$. Из (2.2) при $W = 0$ получим для

$$z = 0: \quad \psi(r) = \frac{1}{2} H_z^0 r^2; \quad H_z(r) = H_z^0 = \text{const} \quad (4.1)$$

Следовательно, продольное магнитное поле на входе не зависит от радиуса r .

В силу (3.6) при $r_a(z) = r_0$ имеем $\psi_e(z = 0, r) = C_0 r_0^2 \ln(r/r_0)$, где $C_0 = V_0(0)$. Исключая с помощью последнего соотношения переменную r в (4.1), найдем $D_e(\psi_e)$ в (1.14) при $z = 0$

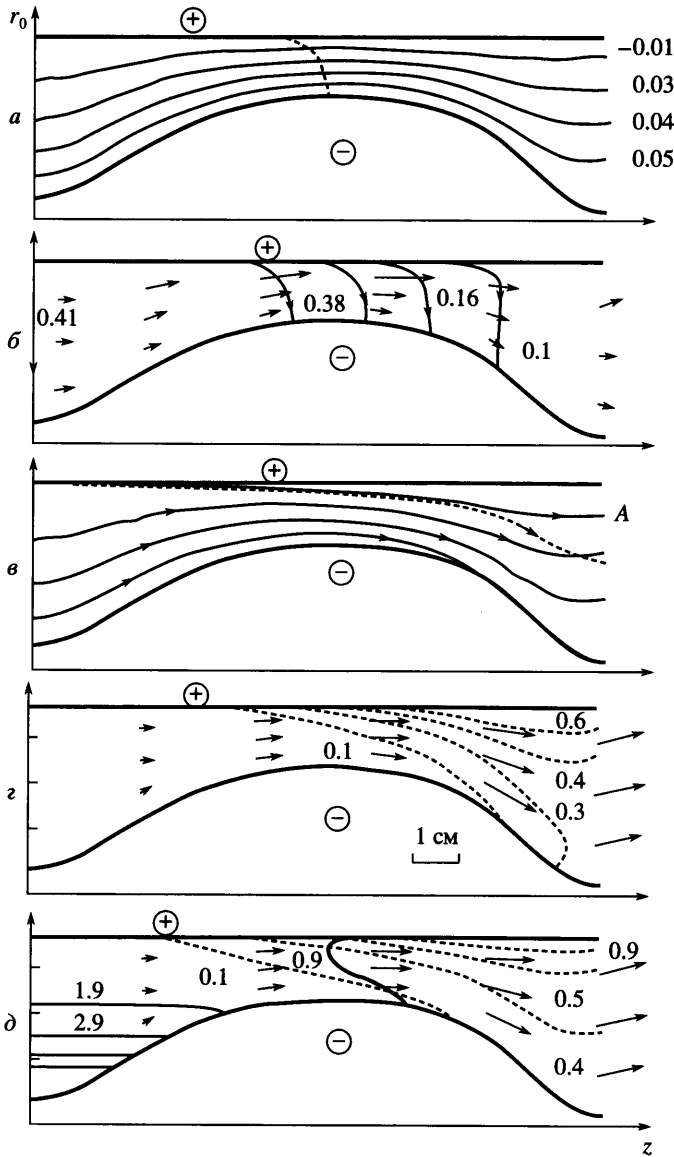
$$D_e(\psi_e) = \psi = \frac{1}{2} H_z^0 r_0^2 \exp\left(\frac{2\psi_e}{C_0 r_0^2}\right) \quad (4.2)$$

Согласно (1.14) и (1.18) имеем

$$D_i(\psi_i(0, r)) = \psi(0, r); \quad \psi_i(0, r) = -\xi r_0 + C_0 r_0^2 \ln(r/r_0)$$

Исключив из последнего соотношения и (4.1) переменную r , имеем при $z = 0$

$$D_i(\psi_i) = \frac{1}{2} H_z^0 r_0^2 \exp\left(\frac{2(\psi_i + \xi r_0)}{C_0 r_0^2}\right) \quad (4.3)$$



Фиг. 1. Течение плазмы при наличии продольного поля: *a* – эквипотенциалы $\Phi = \text{const}$ (сплошные кривые) и граница перехода через скорость быстрой магнитозвуковой волны (штриховая линия); *б* – электрический ток (j_z, j_r) (линии уровня функции $rH_\phi = \text{const}$) и векторное распределение магнитного поля; *в* – ионные линии тока $\Psi_i = \text{const}$ (сплошные кривые), штриховая линия – ионная траектория при $H_z^0 = 0$; *г* – векторное поле скоростей ионной компоненты (V_z^i, V_r^i) и азимутальная скорость ионов V_ϕ^i (штриховые линии уровня); *д* – распределение плотности $\rho(z, r)$ (сплошные кривые), поле скоростей электронной компоненты (V_z^e, V_r^e) и азимутальная скорость электронов V_ϕ^e (штриховые линии уровня)

С помощью параметров плазмы на входе не сложно определить при $z = 0$ интегральные моменты D_i и D_e только как функции соответственно ψ_i и ψ_e . Задав функции $D_i(\psi_i)$ и $D_e(\psi_e)$ на входе, тем самым зададим эти функции во всем объеме канала ускорителя с помощью (1.14) и (4.3) для $D_i(\psi_i)$, а с помощью (4.2) для $D_e(\psi_e)$.

Соотношение (4.2) устанавливает взаимно однозначное соответствие между функциями ψ и ψ_e . В свою очередь уравнения (1.14), (4.3) с учетом (1.18), (4.2) позволяют определить V_φ^i как функцию ψ и H_φ

$$V_\varphi^i = \frac{\psi}{\xi r} \left[\exp \left(\frac{2\xi(rH_\varphi + r_0)}{C_0 r_0^2} \right) - 1 \right] \quad (4.4)$$

Далее преобразуем уравнения (2.1)–(2.3), которые необходимо дополнить полученными соотношениями. Исключим плотность ρ и функцию ψ_i . В итоге останутся две независимые функции H_φ и ψ (или ψ_e), для которых путем последовательных преобразований получим систему дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{\partial \psi_e}{\partial r} = F_1(r, \psi_e, H_\varphi); \quad \frac{\partial r H_\varphi}{\partial r} = F_2(r, \psi_e, H_\varphi) \quad (4.5)$$

где F_1 и F_2 – известные функции своих аргументов [15]. Анализ показывает, что в предельном случае $H_z^0 \rightarrow 0$ ($\psi \rightarrow 0$) осуществляется переход к рассмотренному ранее течению плазмы при $H_z^0 = 0$.

Для решения системы (4.5) при $H_z^0 \neq 0$ необходимо задать на одном из электродов $r = r_a(z)$ или $r = r_k(z)$ значения двух величин ψ_e и H_φ . Величина азимутального магнитного поля H_φ априори неизвестна. Однако величину ψ_e можно определить на обоих электродах. Тогда задав значение ψ_e на одном из электродов, методом “пристрелки” по величине ψ_e на другом электроде можно вычислить распределение H_φ и всех искомых величин по радиусу в любом сечении канала.

В экспериментах легко определяемая величина – разность потенциалов между электродами $\Delta\Phi$. Поэтому естественно считать, что известны значения потенциалов на электродах. Не нарушая общности постановки задачи, потенциал анода можно считать равным нулю $\Phi_a = 0$. Это условие было использовано выше при определении геометрии канала и течения в случае $H_z^0 = 0$, где потенциал катода равен $\Phi_k = \Phi_k^1$. В силу (1.19) и (1.13) при $W_e = 0$ функция тока ψ_e связана с потенциалом Φ простой линейной зависимостью

$$\psi_e = r_0 \Phi \quad (4.6)$$

Зная потенциалы электродов, с учетом (4.6) найдем значения ψ_e на границах

$$\psi_e(z, r = r_a(z)) = \psi_e^a; \quad \psi_e(z, r = r_k(z)) = \psi_e^k \quad (4.7)$$

где $\psi_e^a = 0$, $\psi_e^k = r_0 \Phi_k$.

Таким образом, полная постановка задачи для системы дифференциальных уравнений (4.5) включает граничные условия, например в виде (4.7). Основными параметрами задачи помимо значений потенциалов катода Φ_k и анода Φ_a или соответствен-

но значений ψ_e^k и ψ_e^a на электродах с заданными профилями $r = r_k(z)$ и $r = r_a(z)$ является параметр обмена ξ и значение продольного магнитного поля на входе H_z^0 .

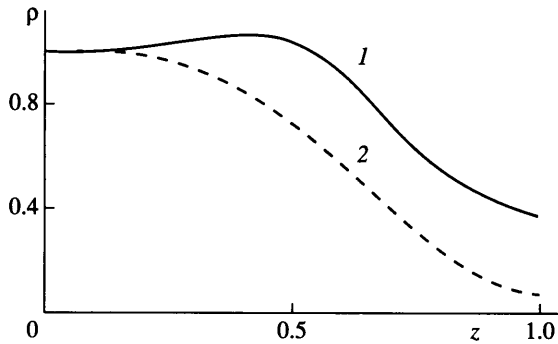
5. Течения плазмы при наличии продольного магнитного поля. Решение поставленной задачи основано на использовании любого из множества известных численных алгоритмов расчета системы дифференциальных уравнений первого порядка при заданных начальных данных. Поэтому при любом z для известной величины $\psi_e(z, r_k(z)) = \psi_e^k$ на катоде в процессе расчетов реализован поиск тех значений $rH_\phi(z, r_k(z))$, для которых на аноде $\psi_e(z, r_a(z)) = \psi_e^a$.

Результаты решения задачи не зависят от знака продольного поля [15]. В связи с этим будем задавать $H_z^0 > 0$. Напомним, что единицей магнитного поля, в том числе продольного, является характерное значение азимутального поля H_0 .

При достаточно больших значениях продольного магнитного поля $H_z^0 > 0.15$ решение задачи не было найдено для данной геометрии и любых значений потенциала катода Φ_k . Для значений $H_z^0 \leq 0.15$ и разности потенциалов $\Delta\Phi = -\Phi_k^1$, отвечающей случаю $H_z^0 = 0$, отсутствует трансзвуковое течение. При любом $0 \leq H_z^0 \leq 0.15$ существует единственное значение Φ_k , при котором осуществляется трансзвуковой режим, причем Φ_k растет с ростом H_z^0 . Справедливо обратное утверждение: любой величине Φ_k в известном интервале $|\Phi_k^1| < |\Phi_k| < |\Phi_*|$ отвечает определенное значение продольного поля, при котором течение является трансзвуковым. В случае $H_z^0 = 0$ в канале любой заданной геометрии, включая данную, трансзвуковое течение может существовать лишь при единственном наборе значений параметров плазмы на входе и разности потенциалов между электродами.

В рамках представленной модели наличие незначительного по величине продольного поля позволяет реализовать трансзвуковое течение в канале соответствующей геометрии в определенном диапазоне параметров задачи путем подбора необходимой разности потенциалов.

На фиг. 1 представлено трансзвуковое течение в режиме ионного токопереноса при $H_z^0 = 0.1$; $\xi = 0.02$ и $\Phi_k = 1.035 \cdot \Phi_k^1$. Длина векторов на фиг. 1, г и д (в сантиметрах) равна безразмерному значению скорости в данной точке. Видно (пунктир на фиг. 1, а), что в середине канала скорость потока переходит через местную скорость быстрой магнитозвуковой волны. Электронные траектории согласно (4.6) совпадают с эквипотенциалами. Пунктиром на фиг. 1, г и д изображены линии уровня функций V_ϕ^i и V_ϕ^e , характеризующих вращение при $H_z^0 \neq 0$. Азимутальные скорости имеют максимальные значения в окрестности анода ближе к выходу из канала ускорителя. В экспериментах при определенных условиях в отсутствии продольного поля в этой области за счет эффекта Холла возникает недостаток ионов, сопровождающийся явлением кризиса тока и срывом процесса ускорения. В соответствии с результатами данного исследования в присутствии продольного поля значения плотности $\rho(z, r = r_0)$ на аноде (кривая 1 на фиг. 2) увеличились за счет вращающего момента (кривая 2 на данной фигуре отвечает случаю $H_z^0 = 0$).



Фиг. 2. Распределение плотности вдоль анода при $H_z^0 \neq 0$ (1) и в случае $H_z^0 = 0$ (2)

Область прианодного потока на фиг. 1, в, где изображены ионные траектории $\psi_i = \text{const}$, ограничена снизу кривой А с началом в точке $z = 0, r = r_0$. Эта область, обусловленная расхождением ионной и электронной траекторий за счет эффекта Холла, при наличии продольного поля существенно меньше, чем в случае $H_z^0 = 0$ (пунктир на фиг. 1, в).

Заключение. С помощью продольного магнитного поля можно уменьшить влияние эффекта Холла и область прианодного потока в канале плазменного ускорителя. Наличие продольного поля дает дополнительные возможности для управления динамическими процессами в канале ускорителя, позволяет реализовать трансзвуковое течение в канале определенной геометрии.

В заключение автор благодарит А.И. Морозова, К.В. Брушлинского, А.А. Бармина и В.В. Савельева за проявленный интерес и плодотворные обсуждения работы.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (№ 03-01-00063, 02-07-90027).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Морозов А.И. Физические основы космических электрореактивных двигателей. М.: Атомиздат, 1978. 326 с.
2. Морозов А.И. Принципы коаксиальных (квази) стационарных плазменных ускорителей (КСПУ) // Физика плазмы. 1990. Т. 16. Вып. 2. С. 131–146.
3. Волошко А.Ю., Гаркуша И.Е., Морозов А.И., Соляков Д.Г., Терешин В.И., Царенко А.В., Чеботарев В.В. Исследование локальной картины течения плазмы в двухступенчатом КСПУ, П-50. // Физика плазмы. 1990. Т. 16. Вып. 2. С. 168–175.
4. Белан В.Г., Золотарев С.П., Левашов В.Ф., Майнашев В.С., Морозов А.И., Подковыров В.Л., Скворцов Ю.В. Экспериментальное исследование квазистационарного плазменного ускорителя, питаемого от индуктивного и емкостного накопителей // Физика плазмы. 1990. Т. 16. Вып. 2. С. 176–185.
5. Ананин С.И., Асташинский В.М., Баканович Г.И., Костюкевич Е.А., Кузьмицкий А.М., Маньковский А.А., Минько Л.Я., Морозов А.И. Исследование процессов формирования плазменных потоков в квазистационарном сильноточном плазменном ускорителе (КСПУ) // Физика плазмы. 1990. Т. 16. Вып. 2. С. 186–196.
6. Alexandrov V.A., Dyakonov G.A., Popov G.A., Tikhonov V.B., Tyutin V.K. Research of the influence of acceleration channel geometry and external magnetic field on modes of plasma flow in quasistationary plasma accelerator (QSPA) P-50A // 2nd German-Russian conf. on Electric Propulsion Engines and their Technical Applications. Moscow: Aviation Institute, 1993. P. 10.
7. Брушлинский К.В., Морозов А.И. Расчет двумерных течений плазмы в каналах // Вопросы теории плазмы / Под ред. М.А. Леонтовича. М.: Атомиздат, 1974. Вып. 8. С. 88–163.

8. Брушлинский К.В., Заборов А.М., Козлов А.Н., Морозов А.И., Савельев В.В. Численное моделирование течений плазмы в КСПУ // Физика плазмы. 1990. Т. 16. Вып. 2. С. 147–157.
9. Козлов А.Н. Особенности динамики плазмы в КСПУ в процессе установления течения // Физика плазмы. 1992. Т. 18. Вып. 6. С. 714–723.
10. Морозов А.И., Соловьев Л.С. Стационарные течения плазмы в магнитном поле // Вопросы теории плазмы / Под ред. М.А. Леонтовича. М.: Атомиздат, 1974. Вып. 8. С. 3–87.
11. Брушлинский К.В., Козлов А.Н., Морозов А.И. Численное исследование двумерных течений плазмы и ионизирующегося газа методом пробных частиц // Физика плазмы. 1985. Т. 11. Вып. 11. С. 1358–1367.
12. Козлов А.Н. Определение геометрии электродов и оценки параметров коаксиального плазменного ускорителя в приближении плавного течения. Препринт № 123. М.: ИПМ им. М.В.Келдыша АН СССР, 1984. 28 с.
13. Козлов А.Н. Течение плазмы с анодным подпотоком в канале коаксиального ускорителя медленно меняющегося сечения. Препринт № 53. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР, 1989. 20 с.
14. Энциклопедия низкотемпературной плазмы. Т. 3. / Под ред. В.Е. Фортова. М.: Наука, 2000. 574 с.
15. Козлов А.Н. Аналитическая модель аксиально симметричных течений идеальной двухкомпонентной плазмы при наличии продольного магнитного поля. Препринт № 12. М.: ИПМ им. М.В.Келдыша РАН, 2002. 32 с.

Москва
E-mail:kozlov@kiam.ru

Поступила в редакцию
16.VII.2002