МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 4 • 2003

УДК 533.72

© 2003 г. А. В. ЛАТЫШЕВ, А. А. ЮШКАНОВ

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШАХОВА С ЧАСТОТОЙ СТОЛКНОВЕНИЙ, ПРОПОРЦИОНАЛЬНОЙ СКОРОСТИ МОЛЕКУЛ

Для кинетического уравнения Шахова с частотой столкновений, пропорциональной молекулярной скорости, аналитически решены задачи о скачке температуры и о слабом испарении. Проведены численные расчеты полученных выражений для кинетических коэффициентов. Проводится сравнение с предыдущими результатами.

Ключевые слова: уравнение Шахова, задача Смолуховского, характеристическое уравнение, скачки температуры и концентрации.

Известное кинетические БГК-уравнение с частотой столкновений, пропорциональной молекулярной скорости, введено в [1]. Оно называется (см., например, [2]) уравнением Вильямса. Уравнение Вильямса приводит к неправильному числу Прандтля. Чтобы избежать этого недостатка, прибегают к уравнениям более высокого порядка – уравнению Шахова или эллипсоидально статистическому уравнению, а также к полному уравнению Больцмана при численном решении. В настоящей работе вводится уравнение Шахова с частотой столкновений, пропорциональной молекулярной скорости. Такое уравнение естественно называть уравнением Шахова – Вильямса.

Уравнение Шахова (см., например, [3]) для газов с постоянной частотой столкновений широко применяется в настоящее время [4–6]. Отметим, что кинетическое уравнение с частотой столкновений, пропорциональной молекулярной скорости: $\nu = \nu_0 V$, $V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + V_3^2}$, отвечает более адекватной гипотезе о постоянстве длины свободного пробега молекул $l = \text{const}$. В [5] развит аналитический метод решения этого уравнения.

В [7] представлен аналитический метод решения граничных задач кинетической теории для уравнения Вильямса, основанный на разложении решения по обобщенным собственным функциям соответствующего характеристического уравнения. В настоящей работе этот метод развивается для уравнения Шахова – Вильямса. Аналитически решены задачи о скачке температуры и о слабом испарении (задача Смолуховского). Проведены численные расчеты полученных выражений для кинетических коэффициентов. Сравнение с предыдущими результатами показывает преимущество исследуемого уравнения.

1. Постановка задачи и основные уравнения. Уравнением Шахова – Вильямса (в безразмерных переменных и с частотой столкновений $\nu = \nu_0 V$) назовем уравнение

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \mathbf{C}\nabla\varphi + C\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{C}, t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}C\int\rho(C')k(\mathbf{C}, \mathbf{C}')\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{C}', t)d^3C' \\
&k(\mathbf{C}, \mathbf{C}') = 1 + \frac{3}{2}\mathbf{C}\mathbf{C}' + \frac{1}{2}(C^2 - 2)(C'^2 - 2) + \frac{1}{2}\gamma\mathbf{C}\mathbf{C}'(C^2 - 3)(C'^2 - 3) \qquad (1.1) \\
&\rho(C) = \pi^{-3/2}C\exp(-C^2)
\end{aligned}
$$

При этом используются безразмерные переменные $\mathbf{C} = \sqrt{\beta_s}\,V$, $\mathbf{r}' = \nu_0\mathbf{r}$, $t' = \nu_0\sqrt{\beta_s}\,t$, $\beta_s = m/2kT_s$ (штрих у переменных будем далее опускать), γ – параметр, который можно найти из определения числа Прандтля. Отметим, что при $\gamma = 0$ уравнение (1.1) переходит в уравнение Вильямса.

Будем рассматривать класс стационарных задач, в которых функция распределения зависит от одной пространственной переменной x и обладает изотропией в плоскости $C_1 = \text{const}$, C_2, C_3. В этом случае уравнение (1.1) принимает вид

$$\mu\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \varphi(x, \mu, C) = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{\infty}\exp(-C'^2)C'^3k(\mu, C; \mu', C')\varphi(x, \mu', C')d\mu'dC'$$
$$k(\mu, C; \mu', C') = 1 + \frac{3}{2}\mu C\mu'C' + \frac{1}{2}\gamma\mu C\mu'C'(C^2-3)(C'^2-3), \quad \mu = \frac{C_1}{C} \tag{1.2}$$

В задаче Смолуховского газ занимает полупространство $x > 0$ над плоской стенкой, с которой происходит испарение (конденсация) молекул газа (пара), а также происходит теплообмен между конденсированной фазой и газом (паром). Предположим, что вдали от стенки существует градиент температуры, перпендикулярный поверхности (и соответствующий поток тепла), а также некоторая среднемассовая скорость газа, направленная от или к поверхности (испарение или конденсация), т.е. $T(x \to +\infty) = T_0 + G_t x$, $G_t = (dT/dx)_\infty$, $\mathbf{U}(x \to +\infty) = \{U_\infty, 0, 0\}$.

Задача Смолуховского состоит в нахождении относительного скачка температуры $\varepsilon_t = (T_0 - T_s)/T_s$, где T_s – температура поверхности, как функции относительного градиента температуры $g_t = G_t/T_s$ и скорости испарения (конденсации) $U = \sqrt{\beta_s}\,U_\infty$. Учитывая линейный характер задачи, можно записать $\varepsilon_t = T_t g_t + T_u U$. Безразмерные величины T_t, T_u называются коэффициентами скачка температуры. Другая важнейшая характеристика газа – величина относительного скачка концентрации $\varepsilon_n = (n_0 - n_s)/n_s$, для которой $\varepsilon_n = N_t g_t + N_u U$, N_t, N_u – коэффициенты скачка концентрации.

Уравнение (1.2) имеет четыре частных решения (гидродинамические моды): три – это инварианты столкновений 1, μC, C^2; четвертое решение $(C^2 - {}^5/_2)(x - \mu - b\mu C)$ описывает перенос тепла в неоднородно нагретом газе. Набор этих решений определяет поведение газа вдали от стенки через функцию φ_{as}.

Предполагая отражение молекул от стенки чисто диффузным, сформулируем граничные условия:

$$\varphi(x = 0, \mu, C) = 0, \quad 0 < \mu < 1$$
$$\varphi(x \to +\infty, \mu, C) = \varphi_{\text{as}}(x, \mu, C) + o(1), \quad -1 < \mu < 0$$
$$\varphi_{\text{as}} = \varepsilon_n + 2U\mu C + \varepsilon_t\left(C^2 - \frac{3}{2}\right) + g_t\left[\left(C^2 - \frac{5}{2}\right)(x - \mu - b\mu C) - \frac{2}{3\sqrt{\pi}}\mu C\right], \tag{1.3}$$
$$b = -\frac{5\alpha\gamma}{3(1-\gamma)}, \quad \alpha = \frac{2}{16}\sqrt{\pi}$$

Воспользуемся определением числа Прандтля $\Pr = 5k\eta/(2m\kappa)$, k – постоянная Больцмана, m – масса молекулы, η – коэффициент вязкости, κ – коэффициент теплопроводности. Выражая коэффициенты вязкости и теплопроводности через параметр γ, получаем $\Pr = {}^8/_9(1 + 5b\sqrt{\pi}/_6)^{-1}$. При $\gamma = 0$ отсюда получаем $\Pr = {}^8/_9$ – число Прандтля для уравнения Вильямса. При часто используемом числе Прандтля $\Pr = {}^2/_3$ имеем $g = 0.28949$, $b = 0.22568$.

Учитывая структуру ядра уравнения (1.2) и граничные условия к нему, будем искать решение задачи (1.2), (1.3) в виде

$$\varphi(x,\mu,C) = h_1(x,\mu) + Ch_2(x,\mu) + (C^2-2)h_3(x,\mu) + C(C^2-3)h_4(x,\mu)$$

Получим задачу, состоящую из уравнения переноса

$$\mu\frac{\partial h}{\partial x} + h(x,\mu) = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} K(\mu,\mu')h(x,\mu')d\mu' \tag{1.4}$$

и граничных условий

$$\begin{aligned} &h(x=0,\mu) = \mathbf{0}, \quad 0<\mu<1, \quad \mathbf{0} = \mathrm{col}\{0,0,0,0\} \\ &h(x\to+\infty,\mu) = h_{\mathrm{as}}(x,\mu) + o(1), \quad -1<\mu<0 \end{aligned} \tag{1.5}$$

$$K(\mu,\mu') = K_0 + \mu\mu' K_1,$$

$$K_0 = \begin{bmatrix} 1 & 4\alpha & 0 & -2\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 9\alpha/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad K_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6\alpha & 3 & 3\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\gamma\alpha & 0 & 9\gamma\alpha/2 & 3\gamma \end{bmatrix}$$

$$h_{\mathrm{as}}(x,\mu) = \begin{bmatrix} \varepsilon_n + \frac{1}{2}\varepsilon_t - \frac{1}{2}g_t(x-\mu) \\ \left(2U - \frac{2g_t}{3\sqrt{\pi}} - \frac{1}{2}bg_t\right)\mu \\ \varepsilon_t + g_t(x-\mu) \\ -g_t b\mu \end{bmatrix}, \quad h(x,\mu) = \begin{bmatrix} h_1(x,\mu) \\ h_2(x,\mu) \\ h_3(x,\mu) \\ h_4(x,\mu) \end{bmatrix}$$

2. Разделение переменных, собственные векторы и собственные значения. Разделение переменных в уравнении (1.4) согласно общему методу Фурье приводит к решениям $h_\eta(x,\mu) = \exp(-x/\eta)\Phi(\eta,\mu)$, в которых η – спектральный параметр, или параметр разделения, а вектор Φ является решением характеристического уравнения

$$(\eta-\mu)\Phi(\eta,\mu) = \frac{1}{2}\eta[K_0 n^{(0)}(\eta) + \mu K_1 n^{(1)}(\eta)], \quad n^{(j)}(\eta) = \int\limits_{-1}^{1}\mu^j\Phi(\eta,\mu)d\mu, \quad j=0,1 \tag{2.1}$$

Интегрируя уравнение (2.1) от –1 до +1 по μ, находим $n^{(1)}(\eta) = \eta(E-K_0)n^{(0)}(\eta)$, E – единичная матрица. Следовательно, уравнение (2.1) упрощается:

$$(\eta-\mu)\Phi(\eta,\mu) = \frac{1}{2}\eta D(\mu\eta)n(\eta), \quad n(\eta)\equiv n^{(0)}(\eta), \quad D(\mu\eta) = K_0 + \mu\eta K_1(E-K_0) \tag{2.2}$$

Представим матрицу D в явном виде:

$$D(x) = \begin{bmatrix} 1 & 4\alpha & 0 & -2\alpha \\ 0 & 3cx & 0 & -3\alpha^2 x/2 \\ 0 & \alpha & 1 & 9\alpha/2 \\ 0 & -\gamma\alpha^2 x/2 & 0 & 3\gamma c_1 x \end{bmatrix}, \quad c = 1-9\alpha^2, \quad c_1 = 1-\frac{89}{12}\alpha^2$$

При $\eta \in (-1,1)$ решение (2.2) возьмем в пространстве обобщенных функций [8]: $\Phi(\eta, \mu) = F(\eta, \mu)n(\eta)$, где

$$F(\eta, \mu) = \frac{1}{2}D(\eta\mu)P\frac{1}{\eta - \mu} + \Lambda(\eta)\delta(\eta - \mu) \tag{2.3}$$

$$\Lambda(z) = \begin{bmatrix} \lambda_c(z) & 4\alpha T(z) & 0 & -2\alpha T(z) \\ 0 & \omega_0(z) & 0 & -3\alpha^2 z^2\lambda_c(z)/2 \\ 0 & \alpha T(z) & \lambda_c(z) & 9\alpha T(z)/2 \\ 0 & -\gamma\alpha^2 x^2\lambda_c(z)/2 & 0 & 1 + 3\gamma c_1 z^2\lambda_c(z) \end{bmatrix}$$

$$\lambda_c(z) = 1 + T(z), \quad T(z) = \frac{z}{2}\int_{-1}^{1}\frac{du}{u - z}, \quad \omega_0(z) = 1 + 3cz^2\lambda_c(z)$$

Символ Px^{-1} означает распределение – главное значение интеграла от x^{-1}, $\delta(x)$ – дельта-функция, $\Lambda(z)$ – дисперсионная матрица, $\lambda_c(z)$ – дисперсионная функция Кейза [9], $\omega(z)$ – дисперсионная функция Вильямса [7]. Таким образом, непрерывный спектр (2.2) есть интервал (–1,1), а собственные векторы непрерывного спектра определяются согласно (2.3).

Найдем дискретный спектр (2.2) и соответствующие собственные векторы. По определению (см., например, [10]) дискретный спектр составляет множество нулей дисперсионной функции

$$\lambda(z) = \det\Lambda(z) = \lambda_c^2(z)[1 + 3(c + \gamma c_1)z^2\lambda_c(z) + 3\gamma c_2 z^4\lambda_c^2(z)], \quad c_2 = 3cc_1 - \frac{\alpha^4}{4}$$

Нули $\lambda(z)$ совпадают с нулями $\lambda_c^2(z)$ и

$$\lambda_0(z) = 1 + 3(c + \gamma c_1)z^2\lambda_c(z) + 3\gamma c_2 z^4\lambda_c^2(z)$$

Функция $\lambda_c^2(z)$ имеет единственный нуль – точку $z = \infty$ кратности 4. Этой точке отвечают четыре частных (дискретных) решения (гидродинамические моды) – линейно независимые векторы-столбцы из выражения для $h_{as}(x, \mu)$. Найдем нули $\lambda_0(z)$. Имеем

$$\lambda_0(z) = \omega_1(z)\omega_2(z), \quad \omega_j(z) = 1 + \lambda_j z^2\lambda_c(z), \quad j = 1, 2$$

$$\lambda_j = \frac{3}{2}[c + \gamma c_1 - (-1)^j\sqrt{q}], \quad j = 1, 2; \quad q = (c + \gamma c_1)^2 - \frac{4}{3}\gamma c_2$$

Функция $\omega_j(z)$, $j = 1, 2$, аналитична в комплексной плоскости с разрезом [–1,1]. Возьмем контур γ_ε, охватывающий разрез и отстоящий от него на таком расстоянии ε, $\varepsilon > 0$, что все нули $\omega_j(z)$ лежат вне γ_ε. Согласно принципу аргумента [11] число N_j нулей $\omega_j(z)$ равно

$$N_j = \frac{1}{2\pi}[\arg\omega_j(z)]_{\gamma_\varepsilon}, \quad j = 1, 2 \tag{2.4}$$

где выражение $[f(z)]_\gamma$ означает приращение $f(z)$ вдоль контура γ. Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ в (2.4), получаем

$$N_j = \frac{1}{2\pi}\left[\arg\frac{\omega_j^+(u)}{\omega_j^-(u)}\right]_{(-1,1)}, \quad j = 1, 2$$

$$\omega_j^{\pm}(\mu) = \omega_j(\mu) \pm \frac{1}{2}\lambda_j \pi \mu^3, \quad \omega_j(\mu) = 1 + \lambda_j \mu^2\left(1 + \frac{\mu}{2}\ln\frac{1-\mu}{1+\mu}\right)$$

$$\omega_j^{\pm}(\mu) = \exp(\pm\theta_j(\mu))\left|\omega_j^{\pm}(\mu)\right|, \quad \left|\omega_j^{+}(\mu)\right| = \left|\omega_j^{-}(\mu)\right|$$

Здесь $\omega_j^{\pm}(\mu)$ – граничные значения $\omega_j(z)$ сверху и снизу на берегах разреза, $\theta_j(\mu)$ – регулярная ветвь аргумента, фиксированная условием $\theta_j(0) = 0, j = 1, 2$. Кроме того, $\omega_j(\mu) \to -\infty$ при $\mu \to 1 - 0$, $\omega_j(0) = 1$. Следовательно

$$N_j = \frac{1}{\pi}[\theta_j(\mu)]_{(-1,\,1)} = \frac{2}{\pi}[\theta_j(\mu)]_{(0,\,1)} = \frac{2}{\pi}[\theta_j(1-0) - \theta_j(0)] = 2$$

Значит, каждая из функций $\omega_j(z)$ ($j = 1,2$) имеет два нуля; нетрудно видеть, что эти нули действительные и отличаются лишь знаками $\pm\eta_j$, $\eta_j > 1$.

Отметим, что при $\gamma \to 0$ $\sqrt{q} \to c$, следовательно, $\omega_1(z) \to \omega_0(z)$, $\eta_1 \to \eta_0$, где η_0 – нуль функции $\omega_0(z)$, $\eta_0 = 1.12 \cdot 10^{-48}$. Так как при $\gamma \to 0$ $\lambda_2 \to 0$, заключаем, что нули $\omega_2(z)$ при $\gamma \to 0$ стремятся к концевым точкам разреза $[-1,1]$. Выпишем убывающие решения, отвечающие нулям μ_j, $j = 1, 2$

$$h_{\eta_j}(x, \mu) = \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{x}{\eta_j}\right)\eta_j\frac{D(\mu\eta_j)}{\eta_j - \mu}n(\eta_j), \quad \Lambda(\eta_j)n(\eta_j) = \mathbf{0}, \quad j = 1, 2 \tag{2.5}$$

3. Декомпозиция основной граничной задачи. Вернемся к задаче (1.4), (1.5). Уравнение (1.4) представим в виде четырех скалярных

$$\begin{aligned}
\mu\frac{\partial h_1}{\partial x} + h_1(x, \mu) &= (1, h_1) + 4\alpha(1, h_2) - 2\alpha(1, h_4) \\
\mu\frac{\partial h_2}{\partial x} + h_2(x, \mu) &= 6\mu\alpha(\mu', h_1) + 3\mu(\mu', h_2) + 3\mu\alpha(\mu', h_3) \\
\mu\frac{\partial h_3}{\partial x} + h_3(x, \mu) &= (1, h_3) + \alpha(1, h_2) + \frac{9}{2}\alpha(1, h_4) \\
\mu\frac{\partial h_4}{\partial x} + h_4(x, \mu) &= -\gamma\alpha(\mu', h_1) + \frac{9}{2}\gamma\alpha(\mu', h_3) + 3\gamma(\mu', h_4)
\end{aligned} \tag{3.1}$$

$$(f, g) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(\mu)g(\mu)d\mu$$

Для упрощения системы (3.1) воспользуемся законами сохранения числа частиц и энергии

$$\int \exp(-C^2)C_x\varphi d^3C = B_1, \quad \int \exp(-C^2)C_xC^2\varphi d^3C = B_2 \tag{3.2}$$

Эти равенства справедливы при любых $x > 0$. Следовательно, постоянные B_1, B_2 найдем из условий

$$B_1 = \int \exp(-C^2)C_x\varphi_{\text{as}}d^3C, \quad B_2 = \int \exp(-C^2)C_xC^2\varphi_{\text{as}}d^3C$$

Подставляя в эти условия φ_{as}, получаем

$$B_1 = \pi^{3/2}U, \quad B_2 = \pi^{3/2}\left[\frac{5}{2}U - g_t\left(\frac{3}{2\sqrt{\pi}} + \frac{5}{4}b\right)\right]$$

Вернемся к уравнениям (3.2). Подставим в (3.2) разложение (см. раздел 2) функции φ по четырем направлениям. Получаем

$$(\mu', h_1) = -4\alpha(\mu, h_2) + 2\alpha(\mu', h_4)\frac{\sqrt{\pi}}{2}U$$

$$(\mu', h_3) = -\alpha(\mu', h_2) - \frac{9}{2}\alpha(\mu', h_4) + \sqrt{\pi}\frac{5}{8}U - g_t\left(\frac{3}{8} + \frac{5}{16}b\sqrt{\pi}\right)$$

С помощью этих равенств второе и четвертое уравнения из (3.1) можно упростить

$$\begin{aligned} \mu\frac{\partial h_2}{\partial x} + h_2(x, \mu) &= 3c\mu(\mu', h_2) - \frac{3}{2}\alpha^2\mu(\mu', h_4) + 3\alpha\mu\left[\frac{9}{8}\sqrt{\pi}U - g_t\left(\frac{3}{8} + \frac{5}{16}b\sqrt{\pi}\right)\right] \\ \mu\frac{\partial h_4}{\partial x} + h_4(x, \mu) &= -\frac{1}{2}\ \alpha^2\mu(\mu', h_2) + 3\gamma c_1\mu(\mu', h_4) + \alpha\gamma\mu\left[\frac{\sqrt{\pi}}{16}U - g_t\left(\frac{27}{16} + \frac{45}{16}b\sqrt{\pi}\right)\right] \end{aligned} \tag{3.3}$$

Граничные условия к этой системе согласно (1.5) запишем в виде

$$\begin{bmatrix} h_2(0, \mu) \\ h_4(0, \mu) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad 0 < \mu < 1$$

$$\begin{bmatrix} h_2(\infty, \mu) \\ h_4(\infty, \mu) \end{bmatrix} = \mu\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \quad -1 < \mu < 0 \tag{3.4}$$

$$a_1 = 2U - \frac{2g_t}{3\sqrt{\pi}} - \frac{1}{2}bg_t, \quad a_2 = -bg_t$$

Задачу (3.3), (3.4) назовем первой граничной задачей.

Из оставшихся уравнений из (3.1) и граничных условий из (1.5) составим вторую задачу

$$\begin{aligned} \mu\frac{\partial h_1}{\partial x} + h_1(x, \mu) &= (1, h_1) + 4\alpha(1, h_2) - 2\alpha(1, h_4) \\ \mu\frac{\partial h_3}{\partial x} + h_3(x, \mu) &= (1, h_3) + \alpha(1, h_2) + \frac{9}{2}\alpha(1, h_4) \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{gathered} \begin{bmatrix} h_1(x = 0, \mu) \\ h_3(x = 0, \mu) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad 0 < \mu < 1 \\ \begin{bmatrix} h_1(x \to +\infty, \mu) \\ h_3(x \to +\infty, \mu) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_n + \frac{1}{2}\varepsilon_t - \frac{1}{2}g_t(x - \mu) \\ \varepsilon_t + g_t(x - \mu) \end{bmatrix} + o(1), \quad -1 < \mu < 0 \end{gathered} \tag{3.6}$$

Итак, вместо одной 4-мерной задачи (1.4), (1.5) имеем две 2-мерные задачи (3.3), (3.4) и (3.5), (3.6).

4. Первая задача. Так как частное решение неоднородных уравнений (3.3) известно, то далее будем рассматривать соответствующую однородную задачу. Перепи-

Учитывая поведение в комплексной плоскости функций, входящих в (4.9), находим его общее решение

$$N_j(z) = -\psi_{0j} + A_j\frac{1}{z-\eta_j} + V_j(z)\frac{d_j}{z-\eta_j}, \quad j = 1, 2 \tag{4.10}$$

где d_j – произвольная постоянная. Эта функция в отличие от вспомогательной функции $N_j(z)$, введенной равенством (4.6), имеет простой полюс в точке η_j и ненулевой предел в точке $z = \infty$. Полюс устраняется выбором $A_j = -V_j(\eta_j)d_j$. Из условия $N_j(\infty) = 0$ находим $D_j = \psi_{0j}$, следовательно, $A_j = -V(\eta_j)\psi_{0j}$, $j = 1, 2$. Функция $n_j(\eta)$ находится из формулы Сохоцкого для вспомогательной функции $N_j(z)$, в которую следует подставить решение (4.10)

$$\lambda_j\pi\eta^2 n_j(\eta) = [V_j^+(\eta) - V_j^-(\eta)]\frac{\psi_{0j}}{\eta-\eta_j}, \quad j = 1, 2 \tag{4.11}$$

Для решения неоднородной задачи понадобится скалярное произведение: $(1, f) = T(1, \psi)$. Согласно (4.4) имеем

$$(1, \psi_j) = \psi_{0j}V_j(\eta_j)\lambda_c(\eta_j)\exp\left(-\frac{x}{\eta_j}\right) + \frac{1}{2}\int_0^1 \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right)n_j(\eta)d\eta \tag{4.12}$$

При выводе (4.12) использовано соотношение

$$\int_{-1}^{1} \Phi_j(\eta, \mu)d\mu \equiv 1, \quad j = 1, 2, \quad \eta \in (-1, 1)$$

5. Вторая задача. Задачу (3.5), (3.6) представим в векторном виде относительно вектора-столбца $\varphi(x, \mu) = \mathrm{col}\{h_1(x, \mu), h_3(x, \mu)\}$

$$\mu\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \varphi(x, \mu) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \varphi(x, \mu')d\mu' + B_\alpha T(1, \psi), \quad B_\alpha = \alpha\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 9/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \varphi(x = 0, \mu) &= \mathrm{col}\{0, 0\}, \quad 0 < \mu < 1 \\ \varphi(x \to +\infty, \mu) &= \varphi_{\mathrm{as}}(x, \mu) + o(1), \quad -1 < \mu < 0 \end{aligned} \tag{5.1}$$

$$\varphi_{\mathrm{as}}(x, \mu) = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varepsilon_n \\ \varepsilon_t \end{bmatrix} - g_t(x-\mu)\begin{bmatrix} 1/2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Решение задачи (5.1) будем искать в виде суммы общего решения соответствующего однородного уравнения и некоторого частного решения

$$\varphi(x, \mu) = \varphi_{\mathrm{as}}(x, \mu) + \int_0^1 \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right)\Phi_c(\eta, \mu)m(\eta)d\eta + \varphi_*(x, \mu)$$

$$\varphi_*(x, \mu) = B_\alpha T\chi(x, \mu) + B_\alpha T\int_0^1 \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right)[\Phi_c(\eta, \mu) - \delta(\eta-\mu)]n(\eta)d\eta$$

$$\Phi_c(\eta, \mu) = \frac{1}{2}\eta P\frac{1}{\eta-\mu} + \lambda_c(\eta)\delta(\eta-\mu)$$

$$\chi(x, \mu) = \mathrm{col}\{\chi_1(x, \mu), \chi_2(x, \mu)\}, \quad \chi_j(x, \mu) = \frac{\eta_j}{\mu-\eta_j}\exp\left(-\frac{x}{\eta_j}\right), \quad j = 1, 2 \tag{5.2}$$

Здесь $\Phi_c(\eta, \mu)$ – собственная функция Кейза [9], $m(\eta) = \mathrm{col}\{m_1(\eta), m_2(\eta)\}$ – неизвестная вектор-функция, $n(\eta)$ – вектор-функция, построенная в разделе **4** (см. (4.11)).

Разложение (5.2) удовлетворяет второму граничному условию из (5.1), а первое из них приводит к сингулярному интегральному уравнению с ядром Коши

$$\varphi_{as}(0, \mu) + \frac{1}{2}\int_0^1 \eta[m(\eta) + B_\alpha T n(\eta)]\frac{d\eta}{\eta - \mu} + \\ + \lambda_c(\mu)[m(\mu) + B_\alpha T n(\mu)] + B_\alpha T\chi(0, \mu) = B_\alpha T n(\mu), \quad 0 < \mu < 1 \tag{5.3}$$

Введем вспомогательную вектор-функцию

$$M(z) = \frac{1}{2}\int_0^1 \eta[m(\eta) + B_\alpha T n(\eta)]\frac{d\eta}{\eta - z}$$

и сведем уравнение (5.3) к краевой задаче

$$\lambda_c^+(\mu)[M^+(\mu) + \varphi_{as}(0, \mu) + B_\alpha T\chi(0, \mu)] - \lambda_c^-(\mu)[M^-(\mu) + \varphi_{as}(0, \mu) + B_\alpha T\chi(0, \mu)] = \\ = B_\alpha T n(\mu)[\lambda_c^+(\mu) - \lambda_c^-(\mu)], \quad 0 < \mu < 1 \\ \lambda_c^\pm(\mu) = \lambda_c(\mu) \pm i\pi\frac{\mu}{2}, \quad \lambda_c(\mu) = 1 + \frac{\mu}{2}\ln\frac{1-\mu}{1+\mu} \tag{5.4}$$

Для правой части уравнения (5.4) решим задачу о скачке – задачу определения такой вектор-функции $H(z)$, скачок которой на разрезе равен правой части (5.4)

$$H^+(\mu) - H^-(\mu) = [\lambda_c^+(\mu) - \lambda_c^-(\mu)]B_\alpha T n(\mu), \quad 0 < \mu < 1$$

Представим эту задачу в явном виде, используя (4.11)

$$H^+(\mu) - H^-(\mu) = \frac{1}{\mu^2}B_\alpha T\mathrm{col}\left\{\frac{X_1^+(\mu) - X_1^-(\mu)}{\lambda_1}, \frac{X_2^+(\mu) - X_2^-(\mu)}{\lambda_2}\right\} \\ X_j^\pm(\mu) = \frac{\mu X_j^\pm(\mu) - \eta_j V_j(\eta_j)}{\mu - \eta_j}\psi_{0j}, \quad j = 1, 2 \\ X^\pm(\mu) = \mathrm{col}\{X_1^\pm(\mu), X_2^-(\mu)\} \tag{5.5}$$

Решающим моментом в решении (5.5) является следующее преобразование, использующее краевые задачи (4.8)

$$\frac{1}{\lambda_j\mu}[V_j^+(\mu) - V_j^-(\mu)] = \frac{1}{\lambda_j\mu}[V_j^+(\mu) - V_j^-(\mu) - (\omega_j^+(\mu)V_j^+(\mu) - \\ - \omega_j^-(\mu)V_j^-(\mu))] = \frac{1}{\lambda_j\mu}[V_j^+(\mu)(1 - \omega_j^+(\mu)) - V_j^-(\mu)(1 - \omega_j^-(\mu))] = \\ = -\mu[V_j^+(\mu)\lambda_c^+(\mu) - V_j^-(\mu)\lambda_c^-(\mu)], \quad 0 < \mu < 1$$

Следовательно, задача (5.5) имеет решение

$$H^\pm(\mu) = -B_\alpha T\mathrm{col}\left\{\frac{V_1^\pm(\mu)}{\mu - \eta_1}\psi_{01}, \frac{V_2^\pm(\mu)}{\mu - \eta_2}\psi_{02}\right\}\lambda_c^\pm(\mu) \tag{5.6}$$

С помощью (5.5), (5.6) преобразуем задачу (5.4) к неоднородной краевой задаче

$$\lambda_c^+(\mu)[M^+(\mu)+\varphi_{as}(0,\mu)+B_\alpha TX^+(\mu)] = \\ = \lambda_c^-(\mu)[M^-(\mu)+\varphi_{as}(0,\mu)+B_\alpha TX^-(\mu)], \quad 0<\mu<1 \tag{5.7}$$

Решение соответствующей (5.7) однородной краевой задачи

$$U^+(\mu) = \frac{\lambda_c^-(\mu)}{\lambda_c^+(\mu)}U^-(\mu), \quad 0<\mu<1$$

возьмем в виде

$$U(z) = z\exp(-u(z)), \quad u(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{\zeta_c(u)}{u-z}du$$

$$\zeta_c(u) = -\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\left[\frac{2}{\pi u}+\frac{1}{\pi}\ln\frac{1-u}{1+u}\right]$$

Представим задачу (5.7) с помощью однородной задачи в виде задачи определения аналитической функции по ее нулевому скачку

$$[U^+(\mu)]^{-1}[M^+(\mu)+\varphi_{as}(0,\mu)+B_\alpha TX^+(\mu)] = \\ = [U^-(\mu)]^{-1}[M^-(\mu)+\varphi_{as}(0,\mu)+B_\alpha TX^-(\mu)], \quad 0<\mu<1 \tag{5.8}$$

Общее решение (5.8) содержит две произвольные постоянные C_j, $j = 1, 2$

$$M(z) = -\varphi_{as}(0,z)-B_\alpha TX(z)+U(z)\operatorname{col}\{C_1, C_2\} \tag{5.9}$$

Решение (5.9) представим в явной форме

$$M(z) = \begin{bmatrix}-1 & -1/2\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_n\\ \varepsilon_t\end{bmatrix}-g_tz\begin{bmatrix}1/2\\ -1\end{bmatrix}-B_\alpha T\begin{bmatrix}X_1(z)\\ X_2(z)\end{bmatrix}+U(z)\begin{bmatrix}C_1\\ C_2\end{bmatrix}$$

Устраним у решения (5.9) полюс в точке $z=\infty$. Получаем

$$\begin{bmatrix}C_1\\ C_2\end{bmatrix} = g_t\begin{bmatrix}1/2\\ -1\end{bmatrix}+B_\alpha T\begin{bmatrix}\psi_{01}\\ \psi_{02}\end{bmatrix} \tag{5.10}$$

Решение (5.9) разложим в ряд по степеням z в окрестности точки $z=\infty$. Для этого заметим, что

$$V_j(z) = z-V_1^{(j)}+o(1), \quad z\to\infty, \quad j = 1,2;$$

$$U(z) = z-U_1+o(1), \quad z\to\infty$$

$$\frac{zV_j(z)}{z-\eta_j} = z+\eta_j-V_1^{(j)}+o(1), \quad z\to\infty, \quad j = 1,2$$

$$V_1^{(j)} = -\frac{1}{\pi}\int_0^1\zeta_j(u)du, \quad U_1 = -\frac{1}{\pi}\int_0^1\zeta_c(u)du$$

Потребуем теперь выполнения условия $M(\infty) = \mathrm{col}\{0, 0\}$. С учетом (5.10) это условие равносильно выбору ε_n, ε_t из уравнения

$$\begin{bmatrix} -1 & -1/2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varepsilon_n \\ \varepsilon_t \end{bmatrix} = U_1 g_t \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1 \end{bmatrix} + B_\alpha T \begin{bmatrix} W_1\psi_{01} \\ W_2\psi_{02} \end{bmatrix}, \quad W_j = \eta_j - V_1^{(j)} + U_1$$

Отсюда имеем

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_n \\ \varepsilon_t \end{bmatrix} = U_1 g_t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} -7/2 & 17/4 \\ -1 & -9/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} l_1 & l_2 \\ -\gamma\alpha^2/2 & -\gamma\alpha^2/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} W_1\psi_{01} \\ W_2\psi_{02} \end{bmatrix} \tag{5.11}$$

Неизвестную функцию $m(\eta)$ из разложения (5.2) найдем из формулы Сохоцкого для $M(z)$, в которую подставим решение (5.9)

$$\pi i\eta[m(\eta) + B_\alpha Tn(\eta)] = [U^+(\eta) - U^-(\eta)]\mathrm{col}\{C_1, C_2\} -$$
$$- B_\alpha T\mathrm{col}\{X_1^+(\eta) - X_1^-(\eta), X_2^+(\eta) - X_2^-(\eta)\}$$

Таким образом, разложение (5.2) полностью установлено. Следовательно, исходная задача Смолуховского (1.4), (1.5) или (1.2), (1.3) полностью решена.

6. Скачки температуры и концентрации. Из уравнения (5.11) найдем формулы для скачка температуры и концентрации

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= U_1 g_t - \alpha(l_1 W_1\psi_{01} + l_2 W_2\psi_{02}) + \frac{9}{4}\gamma\alpha^3(W_1\psi_{01} + W_2\psi_{02}) \\ \varepsilon_n &= -U_1 g_t - \frac{7}{2}\alpha(l_1 W_1\psi_{01} + l_2 W_2\psi_{02}) - \frac{17}{8}\gamma\alpha^3(W_1\psi_{01} + W_2\psi_{02}) \end{aligned} \tag{6.1}$$

Покажем, что формулы (6.1) при $\gamma \to 0$ переходят в формулы, выведенные для уравнения Вильямса [7]. Выше отмечалось, что $\omega_1(z) \to \omega_0(z)$, $\gamma \to 0$. Это означает, что

$$V_1^{(1)} \to V_1, \quad V_1 = -\frac{1}{\pi}\int_0^1 \zeta_c(u)du$$

Нетрудно видеть, что

$$\lim_{\gamma\to 0}\psi_{01}l_1 = 3c\lim_{\gamma\to 0}\psi_{01} = c\lim_{\gamma\to 0}\frac{1}{\sqrt{q}}\left[a_1 + a_2\frac{2l_2}{\gamma\alpha^2}\right] = \lim_{\gamma\to 0}a_1 = 2U - \frac{2g_t}{3\sqrt{\pi}}, \quad \lim_{\gamma\to 0}\psi_{02}l_2 = 0$$

Следовательно, при $\gamma \to 0$ формулы (6.1) переходят в формулы

$$\varepsilon_t = U_1 g_t - \alpha(\eta_0 - V_1 + U_1)\left(2U - \frac{2g_t}{3\sqrt{\pi}}\right)$$

$$\varepsilon_n = -U_1 g_t - \frac{7}{2}\alpha(\eta_0 - V_1 + U_1)\left(2U - \frac{2g_t}{3\sqrt{\pi}}\right)$$

Эти формулы в точности совпадают с формулами для скачка температуры и концентрации из [7].

Представим формулы (6.1) в стандартном виде

$$\varepsilon_t = T_t g_t + T_u(2U), \quad \varepsilon_n = N_t g_t + N_u(2U)$$

Кинетические коэффициенты вычисляются при этом по следующим формулам:

$$T_t = U_1 + \frac{\alpha}{3\sqrt{q}}\left[\left(l_1 - \frac{9}{4}\gamma\alpha^4\right)W_1\left(\frac{2}{3\sqrt{\pi}} + \frac{b}{2} + \frac{2bl_2}{\gamma\alpha^2}\right) - \left(l_2 - \frac{9}{4}\gamma\alpha^2\right)W_2\left(\frac{2}{3\sqrt{\pi}} + \frac{b}{2} + \frac{2bl_1}{\gamma\alpha^2}\right)\right]$$

$$T_u = \frac{\alpha}{3\sqrt{q}}\left[-l_1W_1 + \frac{9}{4}\gamma\alpha^2(W_1 - W_2)\right]$$

$$N_t = -U_1 + \frac{\alpha}{3\sqrt{q}}\left[\left(\frac{7}{2}l_1 + \frac{17}{8}\gamma\alpha^2\right)W_1\left(\frac{2}{3\sqrt{\pi}} + \frac{b}{2} + \frac{2bl_2}{\gamma\alpha^2}\right) - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{7}{2}l_2 + \frac{17}{8}\gamma\alpha^2\right)W_2\left(\frac{2}{3\sqrt{\pi}} + \frac{b}{2} + \frac{2bl_1}{\gamma\alpha^2}\right)\right]$$

$$N_u = -\frac{\alpha}{3\sqrt{q}}\left[\frac{7}{2}(l_1W_1 - l_2W_2) + \frac{17}{8}\gamma\alpha^2(W_1 - W_2)\right]$$

Численные расчеты приводят к следующим результатам: $T_t = 1.06983$, $T_u = -0.23376$, $N_t = -0.54229$, $N_u = -0.83205$.

Будем использовать следующее определение длины свободного пробега l молекул (см. [12, 13]): $l = (\mu/\rho)\sqrt{2kT_s/(\pi m)}$. Перейдем к размерным величинам. Выражение для скачка температуры запишется в виде $\varepsilon_t = C_t l G_t$, где $C_t = 2.00593$. Для сравнения напомним, что уравнение Вильямса [7] приводит к $C_t = 1.99885$, эллипсоидально статистическое уравнение с постоянной частотой столкновений [14] дает $C_t = 2.20576$, модель Шахова с постоянной частотой столкновений приводит к тому же результату, что и БГК-модель – $C_t = 2.20262$. Приведем для сравнения результат [12], полученный для молекул-твердых сфер с использованием полного уравнения Больцмана: $C_t = 2.1113$. В [1] для модельного кинетического уравнения с переменной частотой столкновений, соответствующей случаю молекул-твердых сфер, с использованием метода дискретных ординат получено: $C_t = 2.0421$. Отметим, что все приводимые результаты пересчитаны с учетом принятого в данной работе длины свободного пробега.

Таким образом, рассматриваемая модель приводит к более точному результату, нежели уравнение Вильямса.

Заключение. Задача Смолуховского сведена к решению уравнения переноса с матричным 4×4 ядром в отличие от 3×3 ядра для уравнения Вильямса из [7]. Дисперсионная функция здесь имеет четыре конечных нуля, которым отвечают две экспоненциально убывающие (и две экспоненциально растущие) кнудсеновские моды, зависящие от параметра γ. Когда $\gamma \to 0$, рассматриваемое уравнение переходит в уравнение Вильямса. При этом две кнудсеновские моды исчезают, а две другие переходят в моды, которые имеет уравнение Вильямса.

Применение законов сохранения числа частиц и энергии позволило существенно упростить 4-мерную задачу, сведя ее к двум 2-мерным с матричными 2×2 ядрами.

Приводя матрицу рассеяния первой задачи к диагональному виду, сводим ее к двум скалярным задачам. Для решения второй задачи потребовалось решить векторную неоднородную краевую задачу в классе мероморфных функций. Условия разрешимости дают возможность найти все неизвестные коэффициенты разложения решения этой задачи по обобщенным собственным функциям Кейза.

Разложение решения задачи Смолуховского по собственным функциям характеристического уравнения содержит все гидродинамические и кнудсеновские моды.

Это означает, что в данной работе развит общий метод решения полупространственных граничных задач для уравнения Шахова – Вильямса.

Свыше десяти лет назад А.В. Бобылев призвал авторов разработать аналитические методы для решения кинетических уравнений высшего порядка, приводящих к правильному числу Прандтля. Лишь сейчас оказалось возможным представить одно из таких решений. Выражаем А.В. Бобылеву свою признательность.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (№ 03–01–00281).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Barichello L.B., Bartz A.C.R., Camargo M., Siewert C.E.* The temperature jump problem for a variable collision frequency model // Phys. Fluids. 2002. V. 14. № 1. P. 382–391.
2. *Williams M.M.R.* Mathematical Methods in Particle Transport Theory. L.: Butterworth, 1971. 429 p.
3. *Шахов Е. М.* Метод исследования движений разреженного газа. М.: Наука, 1974. 207 с.
4. *Soga T.* A kinetic analysis of thermal force on a spherical patticle of high thermal conductivity in a monoatomic gas // Phys. Fluids. 1986. V. 29. № 4. P. 976–985.
5. *Латышев А.В.* Аналитическое решение уравнения Больцмана с оператором столкновений смешанного типа // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1991. Т. 31. № 3. С. 436–447.
6. *Титарев В.А., Шахов Е.М.* Теплоотдача и испарение с плоской поверхности в полупространство при внезапном повышении температуры // Изв. РАН. МЖГ. 2002. № 1. С. 141–153.
7. *Латышев А.В., Юшканов А.А.* Граничные задачи для модельного уравнения Больцмана с частотой, пропорциональной скорости молекул // Изв. РАН. МЖГ. 1996. № 3. С. 140–153.
8. *Владимиров В.С., Жаринов В.В.* Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2000. 399 с.
9. *Кейз К.М., Цвайфель П.Ф.* Линейная теория переноса. М.: Мир, 1972. 384 с.
10. *Гермогенова Т.А.* О полноте системы собственных функций характеристического уравнения переноса // Приприпт № 103. М.: ИПМатем. им. М.В. Келдыша, 1976. 55 с.
11. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
12. *Loyalka S.K.* Kinetic theory of planar condensation and evaporation // Transport Theory and Statist. Physics. 1991. V. 20. № 2/3. P. 237–249.
13. *Черчиньяни К.* О методах решения уравнения Больцмана // Неравновесные явления. Уравнение Больцмана / Под ред. Дж.Л. Либовица и Е.У. Монтролла. М.: Мир, 1986. С. 132–164.
14. *Латышев А.В.* Аналитическое решение эллипсоидально-статистического модельного уравнения Больцмана // Изв. РАН. МЖГ. 1992. № 2. С. 151–164.

Москва
E-mail: latyshev@orc.ru

Поступила в редакцию
16.IX.2002