

УДК 532.546

© 2003 г. Э. Н. БЕРЕСЛАВСКИЙ

ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ТЕЧЕНИЙ ГРУНТОВЫХ ВОД В ПРИБРЕЖНЫХ НАПОРНЫХ ВОДОНОСНЫХ СЛОЯХ

В рамках двумерной теории установившейся фильтрации рассматриваются математические модели некоторых течений пресных грунтовых вод в полубесконечном напорном водоносном слое к морю (бассейну, резервуару и т.п.) с соленой водой. Для их изучения формулируются и, с применением метода Полубариновой-Кочиной, решаются смешанные краевые задачи теории аналитических функций. На базе этих моделей разработаны алгоритмы расчета течений в ситуациях, когда потоки грунтовых вод поступают в море сбоку или снизу. С помощью полученных точных аналитических зависимостей и численных расчетов проводится детальный анализ структуры и характерных особенностей моделируемых процессов, а также влияния всех физических характеристик моделей на характер течений. Дается сопоставление результатов расчетов для обеих схем притока и обсуждаются особенности течений в зависимости от исходного положения контакта жидкостей.

Ключевые слова: фильтрация, пресные грунтовые воды, соленые воды, граница раздела, метод Полубариновой-Кочиной, конформные отображения.

Обычно в задачах фильтрации пресных и соленых вод в линзах и каймах, а также под гидротехническими сооружениями [1–7] движение пресной воды рассматривается в пластах, нижняя часть которых занята более тяжелой соленой покоящейся водой, невозмущенная поверхность которой всегда горизонтальна. Для этих задач характерно также наличие горизонтальных водопроницаемых участков в виде границ каналов, водоемов, бьефов, дрен и т.д. Подобная ситуация наблюдается и в задачах течения в прибрежных напорных водоносных горизонтах [8–16], когда потоки грунтовых вод поступают в море снизу, причем очертание дна моря также всегда принимается горизонтальным.

Примером задачи, не укладывающейся в существующую классификацию [5, 6], является задача о притоке пресных грунтовых вод из горизонтального пласта в бассейн с соленой водой [17]. В этом случае исходное положение контакта пресной и соленой воды предполагается вертикальным; кроме того, в области течения содержатся вертикальные эквипотенциали и промежуток высачивания, что в совокупности не совсем характерно для задач подземной гидромеханики. Последнее приводит к тому, что в плоскости годографа скорости соответствующие участки границы не имеют общей точки пересечения. Поэтому в применении к подобным задачам методы, основанные на использовании формулы Кристоффеля – Шварца, оказываются непригодными. Более того, эта область годографа скорости, как показывает анализ [1–6] всевозможных схем, присущих теории фильтрации, встречается лишь в одном случае – в классической задаче о фильтрации через прямоугольную перемычку [1, 3, 7, 18]. Для исследования последней Полубаринова-Кочина разработала весьма общий и эффективный метод [1–7], который основан на применении аналитической теории линейных дифференциальных уравнений класса Фукса [19]. Решение задачи получается в виде интегралов от эллиптических интегралов [20, 21], часть из которых имеет логарифмические особенности вблизи каждой из особых точек, что создает известные

дополнительные сложности вычислительного характера. Поэтому, несмотря на кажущуюся простоту схемы течения в прибрежном водоносном слое с боковым притоком, трудности решения задачи в полной мере аналогичны задаче о перемычке.

В предыдущих исследованиях [8–14, 17] анализ влияния параметров на картину течения по существу не приводится.

Ниже оба случая (бокового притока и притока снизу) исследуются с использованием метода Полубариновой-Кочиной. Сначала решение задачи преобразуется к виду, удобному для вычислений. При этом на основе соображений [3] доказывается сходимость всех полученных интегралов для геометрических размеров и параметров, характеризующих рассматриваемые фильтрационные потоки. Далее, с помощью преобразованных формул и числовых расчетов анализируется влияние каждого физического параметра моделей на геометрические и фильтрационные характеристики, изучаются особенности течения, что в итоге и дает полную картину явлений. Наконец, результаты расчетов для обеих схем сопоставляются при одинаковых фильтрационных параметрах и обсуждается характер течений в зависимости от исходного положения контакта жидкостей.

1. Схема бокового притока. Постановка задачи. Пресная вода плотности ρ_1 , движущаяся в полубесконечном напорном водоносном горизонтальном слое, который расположен на непроницаемом пласте каменной соли, отжимается в нижней части слоя более тяжелой покоящейся соленой водой плотности ρ_2 ($\rho_2 > \rho_1$). При этом первоначально вертикальная линия раздела между пресными и солеными водами начинает деформироваться, смещаясь влево, в результате чего образуется так называемый язык (или клин) соленой воды. Через некоторое, достаточно большое время возможно установившееся движение, когда рассол успокаивается, линия раздела оказывается линией тока для пресной воды [1, 22], и возникает картина течения, представленная на фиг. 1. При интенсивной эксплуатации, когда может нарушиться динамическое равновесие между пресными и солеными водами, возникает угроза внедрения морской воды в водоносный пласт: язык соленой воды, двигаясь в сторону суши, может достигнуть водозабора.

Ситуация, подобная рассмотренной, может возникнуть также и в задачах фильтрации к колодцу, скважине, бассейну или котловану с вертикальными откосами, которые и являются первоначальными границами раздела между движущимися пресными (заполняющими пласт) и неподвижными солеными водами (заполняющими колодец, бассейн или котлован).

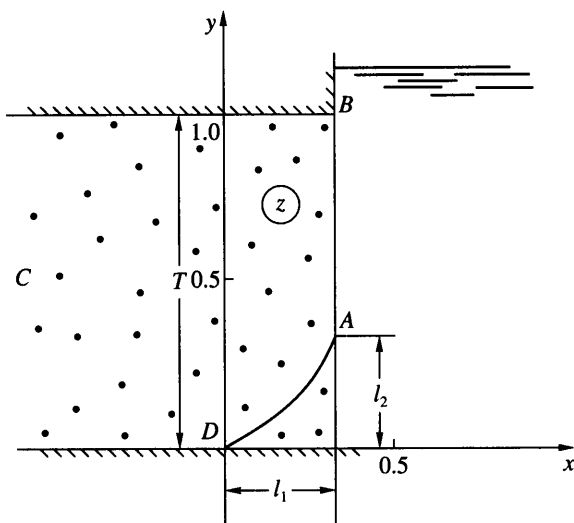
Будем полагать, что движение грунтовых вод подчиняется закону Дарси с известным коэффициентом фильтрации $k = \text{const}$ и происходит в однородном изотропном грунте, который считается несжимаемым, как и фильтрующаяся через него жидкость. Мощность водоносного слоя T , фильтрационный расход Q и параметр $\rho = \rho_2/\rho_1 - 1$ считаются заданными. Как это принято в задачах подобного рода [1–14, 17], влиянием капиллярных и диффузионных явлений на границе жидкостей пренебрегаем.

Введем комплексный потенциал течения $\omega = \phi + i\psi$ и комплексную координату $z = x + iy$, отнесенные соответственно к kT и T . Задача состоит в определении линии раздела AD при следующих краевых условиях

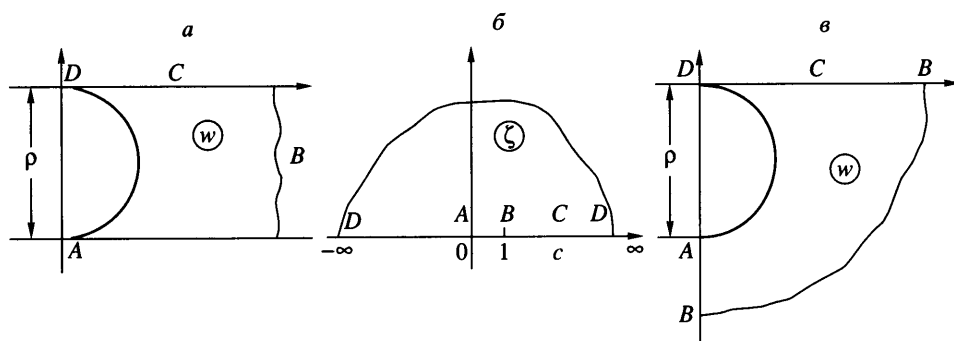
$$\begin{aligned} AB: x = l_1, \quad \phi = \rho(y - T); \quad BC: y = T, \quad \phi = Q \\ CD: y = 0, \quad \phi = 0; \quad AD: \phi = 0, \quad \psi = \rho(y - T) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь l_1 и l_2 – соответственно горизонтальная проекция поверхности раздела и длина промежутка высачивания.

2. Построение решения. Обратимся к области комплексной скорости w , соответствующей граничным условиям (1.1), на (фиг. 2, а).



Фиг. 1. Форма течения бокового притока, рассчитанная при $T = 1.0$, $Q = 0.01$, $\rho = 0.01$



Фиг. 2. Области комплексной скорости для схемы бокового притока (а), вспомогательной параметрической переменной (б) и комплексной скорости для схемы притока снизу (в)

Эта область, представляющая собой круговой треугольник, все углы которого равны нулю (модулярный треугольник), имеет большое значение в теории автоморфных функций [23, 24]. В теории фильтрации модулярный треугольник характерен только для задачи о прямоугольной земляной перемычке, решение которой было получено сначала [25, 26] как решение задачи Дирихле, а затем более простым путем [1, 3, 18]. С вычислительной точки зрения, рассматриваемый ниже случай вполне аналогичен задаче о фильтрации через бесконечно широкую перемычку ([1], с. 78; [3], с. 276).

Для решения задачи используем метод Полубариновой-Кочиной. Вводится вспомогательная переменная ζ и функции: $z(\zeta)$, конформно отображающая верхнюю полуплоскость ζ на область z (соответствие точек указано на фиг. 2, б), комплексная скорость $w = \frac{d\omega}{dz}$ и производные

$$Z = \frac{dz}{d\zeta}, \quad F = \frac{d\omega}{d\zeta} \quad (2.1)$$

Определяя показатели функций Z и F около особых точек [3], найдем, что в данном случае они являются линейными комбинациями двух ветвей следующей функции Римана [3]

$$P \begin{Bmatrix} 0 & 1 & c & \infty \\ 0 & 1/2 & -1 & 2 & \zeta \\ 0 & -1/2 & -1 & 2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{(c-\zeta)\sqrt{1-\zeta}} P \begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & 1/2 & \zeta \\ 0 & 0 & 1/2 \end{Bmatrix} = \frac{Y}{(c-\zeta)\sqrt{1-\zeta}} \quad (2.2)$$

Из соотношения (2.2) видно, что $\zeta = c$ – обыкновенная точка для функции Y . Поэтому соответствующее символу Римана (2.2) линейное дифференциальное уравнение класса Фукса принимает вид

$$\zeta(1-\zeta)Y'' + (1-2\zeta)Y' - \frac{1}{4}Y = 0 \quad (2.3)$$

Уравнение (2.3) имеет два линейно-независимых интеграла [3, 16], образующих фундаментальную систему решений в окрестности $\zeta = 0$,

$$Y_1 = K(\zeta), \quad Y_2(\zeta) = K'(\zeta) \quad (2.4)$$

Здесь $K(\zeta)$ – полный эллиптический интеграл первого рода, рассматриваемый как функция квадрата модуля $k^2 = \zeta$, $K'(\zeta) = K(1-\zeta)(k'^2 = 1-\zeta)$. Функция $K'(\zeta)$ является решением, содержащим логарифмическую особенность в точке $\zeta = 0$, вблизи которой асимптотическое представление имеет вид [27]

$$K'(\zeta) = -1/2 \ln \zeta \quad (2.5)$$

Функция, совершающая конформное отображение верхней полуплоскости ζ на область комплексной скорости w , должна выражаться через отношение линейных комбинаций решений Y_1 и Y_2 . Если составить такие комбинации и воспользоваться соответствием точек A, B и D на плоскостях ζ и w , то получим

$$w = \rho \frac{K(\zeta) - iK'(\zeta)}{K'(\zeta)} \quad (2.6)$$

Принимая во внимание соотношение (2.2) и учитывая выражение (2.6), найдем

$$F = \frac{AiK(\zeta) - iK'(\zeta)}{\Delta(\zeta)}, \quad Z = \frac{AiK'(\zeta)}{(\rho\Delta(\zeta))}, \quad \Delta(\zeta) = (c-\zeta)\sqrt{1-\zeta} \quad (2.7)$$

где $A > 0$ – неизвестная постоянная. Можно проверить, что функции (2.1), определенные на основании соотношений (2.7), удовлетворяют граничным условиям (1.1), сформулированным в терминах упомянутых функций, и, таким образом, являются параметрическим решением исходной краевой задачи.

Запись представлений (2.7) для различных участков границы области ζ с последующим интегрированием по всему контуру вспомогательной области приводит к замыканию контура области движения z и тем самым служит контролем вычислений. В результате получаем выражения для T и Q и координаты точек линии раздела AD

$$T = \frac{A\pi K'(1/c)}{\rho\sqrt{c(c-1)}}, \quad Q = \frac{A\pi K(1/c)}{\sqrt{c(c-1)}} \quad (2.8)$$

$$x(\zeta) = \frac{A}{\rho} \int_{-\infty}^{\zeta} \frac{K(\zeta/\zeta - 1)d\zeta}{\Delta(\zeta)}, \quad y(\zeta) = \frac{A}{\rho} \int_{-\infty}^{\zeta} \frac{K(1/1-\zeta)d\zeta}{\Delta(\zeta)} \quad (-\infty \leq \zeta \leq 0) \quad (2.9)$$

Полагая в уравнениях (2.9) $\zeta = 0$, найдем искомые геометрические величины $l_1 = x(0)$, $l_2 = y(0)$.

Контролем счета являются другие выражения для величин Q и l_2

$$Q = A \int_0^1 \frac{K(\zeta) d\zeta}{\Delta(\zeta)}, \quad l_2 = T - \frac{A}{\rho} \int_0^1 \frac{K'(\zeta) d\zeta}{\Delta(\zeta)} \quad (2.10)$$

3. Преобразование формул к виду, удобному для вычислений. Представления (2.8)–(2.10) содержат две неизвестные постоянные A и c ($1 < c < \infty$). Для определения параметра отображения c служит отношение Q/T : из выражений (2.8) получаем

$$\frac{K(1/c)}{K'(1/c)} = \frac{Q}{\rho T} \quad (3.1)$$

Постоянная A затем находится из первого уравнения (2.8), фиксирующего мощность T водоносного слоя. В силу асимптотики [27] $K'/K = \pi/(2 \ln(4/k'))$, правая часть уравнения (3.1) не может задаваться произвольным образом, а ограничивается некоторым диапазоном своего изменения. Таким образом, соотношение (3.1) регламентирует задание физических параметров Q , T и ρ и, следовательно, область применимости принятой схемы течения.

В результате исследования системы уравнений (2.8) с использованием свойств эллиптических интегралов устанавливается, что при фиксировании двух из трех величин Q , T и ρ модуль эллиптических интегралов однозначно определяется из уравнения (3.1). Третий физический параметр оказывается при этом “плавающим”: диапазон его изменения определяется, опять же исходя из уравнения (3.1), с учетом значений Q_* , T_* и ρ_* , соответствующих случаям $k^2 \approx 0$ и $k^2 \approx 1$.

Основная вычислительная сложность задачи заключается в том, что подынтегральные функции, входящие в (2.9)–(2.10), имеют логарифмические особенности в окрестности точки $\zeta = 0$ и, кроме того, они бесконечны на пределах интегрирования. Из (2.9), (2.10) видно, что в точке $\zeta = c$ все интегралы являются сходящимися. Далее, из представления (2.5), следует конечность значений l_1 и l_2 , а также первого из выражений (2.10) для расхода.

Для удобства вычислений введем обозначение $\alpha = 1/c$ ($0 < \alpha < 1$) и, следуя [3] (с. 278), заменим ζ соответствующими выражениями для различных интервалов, делающими подынтегральные функции в выражениях (2.9)–(2.10) конечными на пределах интегрирования. А именно, положим

$$\zeta = \tau(0 < \zeta < 1); \quad \zeta = 1 - 1/\tau(-\infty < \zeta < 0); \quad \tau = \sin^2 t$$

В результате приходим к следующим расчетным зависимостям

$$x(t) = \frac{2A\alpha}{\rho} \int_0^t \frac{K(\cos^2 t) \sin t \cos t}{\alpha + (1 - \alpha) \sin^2 t} dt, \quad y(t) = \frac{2A\alpha}{\rho} \int_0^t \frac{K(\sin^2 t) \sin t \cos t}{\alpha + (1 - \alpha) \sin^2 t} dt, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

$$l_1 = x(\pi/2), \quad l_2 = y(\pi/2) \quad (3.2)$$

$$Q = 2A\alpha\rho \int_0^{\pi/2} \frac{K(\sin^2 t) \sin t}{1 - \alpha \sin^2 t} dt, \quad l_2 = T - 2A\alpha \int_0^{\pi/2} \frac{K(\cos^2 t) \sin t}{1 - \alpha \sin^2 t} dt$$

$\rho \cdot 10^4$	l_1	l_2	$Q \cdot 10^4$	l_1	l_2	$T \cdot 10^4$	l_1	l_2
66	0.180	0.176	20	1.828	0.802	6	0.119	0.116
	0.545	-0.680		2.533	0.100		0.358	-0.449
83	0.235	0.227	52	1.059	0.673	83	0.196	0.189
	0.598	0.566		1.048	0.260		0.499	0.470
114	0.454	0.402	84	0.489	0.425	114	0.516	0.457
	0.711	0.429		0.731	0.412		0.807	0.489
179	0.885	0.620	116	0.257	0.246	179	1.584	1.107
	0.988	0.279		0.609	0.549		1.760	0.499
417	1.621	0.805	148	0.166	0.163	417	7.743	3.354
	2.125	0.120		0.550	-0.668		8.847	0.500

Для вычисления интегралов можно, разлагая подынтегральные выражения в ряды по степеням малого параметра α , воспользоваться известными формулами [27]

$$\int_0^{\pi/2} K(\sin^2 t) \sin t dt = \frac{\pi}{4}, \quad \int_0^{\pi/2} K(\cos^2 t) \sin t dt = 2G$$

где $G = 0.915966$ – постоянная Каталана.

4. Расчет схемы течения и анализ численных результатов. На фиг. 1 изображена картина течения, рассчитанная при $T = 1, 0; Q = 0.01$ и $\rho = 0.01$. Результаты расчетов влияния определяющих физических параметров ρ, Q, T на размеры языка l_1 и l_2 приведены в таблице (верхние строки значений l_1, l_2). В каждом из трех блоков таблицы (они разделены вертикальными линиями) варьируется (в допустимом диапазоне) один из указанных параметров, а значения остальных фиксируются: $T = 1, Q = 0.01$ и $\rho = 0.01$. На фиг. 3–5 сплошными линиями представлены зависимости размеров l_1 (кривые 1) и l_2 (кривые 2) от ρ, Q и T .

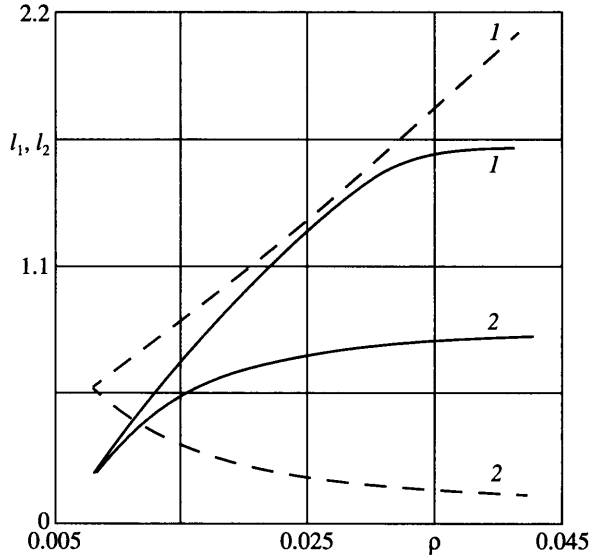
Анализ таблицы и графиков приводит к следующим выводам. Зависимость l_2 от T получается близкой к линейной. Для $0 < T < 5$ и $\rho = Q = 0.01$ можно принять $l_2 = 0.95(T - 0.78)$. Видно также, что для указанных значений параметров T и Q имеем почти квадратичную зависимость $l_2^2 = 2\rho\rho$, где $17 \leq \rho \leq 20$.

Увеличение плотности соленых вод, мощности водоносного слоя и уменьшение расхода увеличивают размеры языка.

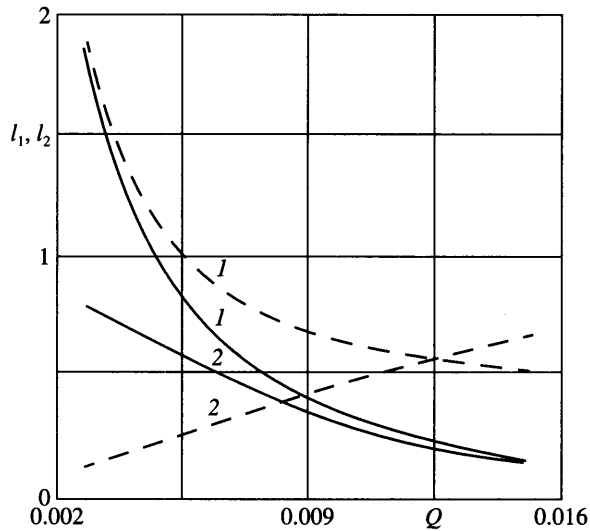
Обращает на себя внимание одинаковый качественный характер зависимостей величин l_1 и l_2 от параметров ρ и T : увеличение плотности ρ_2 соленых вод и мощности напорного слоя T приводит к росту размеров языка соленой воды; так, при увеличении параметра ρ в 6.3 раза величины l_1 и l_2 возрастают в 9 и 4.6 раза соответственно. Напротив, увеличение расхода Q в 7.4 раза приводит к уменьшению l_1 и l_2 соответственно в 11 и 4.9 раза.

Наиболее существенное влияние на размеры языка оказывает мощность водоносного пласта. При возрастании T в 6.3 раза величины l_1 и l_2 возрастают соответственно в 65 и 29 раз. Высота языка при этом может достигать 80% от мощности слоя.

Для всех блоков таблицы примечательно, что в случае малых значений параметров ρ и T и больших значений Q выполняется приближенное равенство $l_1 \approx l_2$. И наоборот, для больших значений ρ и T и малых Q имеем $l_1 \approx ml_2$, где $2 \leq m \leq 2.3$.

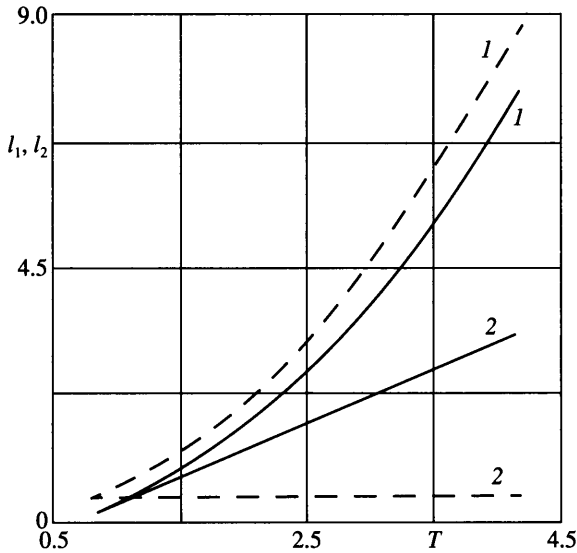


Фиг. 3. Зависимость l_1 и l_2 от ρ при $T = 1.0$, $Q = 0.01$



Фиг. 4. Зависимость l_1 и l_2 от Q при $T = 1.0$, $\rho = 0.01$

При фиксированном значении расхода Q с уменьшением плотности ρ и увеличением мощности T в одинаковое число раз размеры языка возрастают в то же число раз. Такое поведение, совершенно естественное с физической точки зрения, вытекает непосредственно из соотношения (3.1) и формул (2.9): в этом случае правая часть уравнения (3.1) и левые части уравнений (2.8) (первое из которых предварительно умножается на ρ) не изменяются, а следовательно, остаются прежними и неизвестные постоянные A и c . Подобный анализ допустим в случаях, когда один из трех параметров Q , ρ или T фиксируется, а два других варьируются таким образом, чтобы отношение $Q/\rho T$ не изменялось. Это обстоятельство значительно расширяет диапазон изменения входных параметров модели.



Фиг. 5. Зависимость l_1 и l_2 от T при $\rho = Q = 0.01$

5. Схема притока снизу. Постановка задачи и ее решение. На фиг. 6 изображена традиционная схема [8–14] потока пресных грунтовых вод в прибрежном напорном водоносном слое, поступающего в море снизу. Задача сводится к определению комплексного потенциала $\omega(z)$ при краевых условиях (1.1) с той лишь разницей, что условия для участка AB заменяются условиями $y = T, \varphi = 0$.

Искомые функции Z и F определяются следующим символом Римана

$$P \left\{ \begin{matrix} 0 & 1 & c & \infty \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \zeta \\ -1/2 & -1/2 & -1 & 2 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{(c-\zeta)\sqrt{\zeta(1-\zeta)}} P \left\{ \begin{matrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & 0 & \zeta \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{matrix} \right\} = \frac{Y}{(c-\zeta)\sqrt{\zeta(1-\zeta)}} \quad (5.1)$$

Соответствующее символу Римана (5.1) линейное дифференциальное уравнение класса Фукса принимает здесь вид

$$\zeta(1-\zeta)Y'' + \left(\frac{1}{2}-\zeta\right)Y' = 0$$

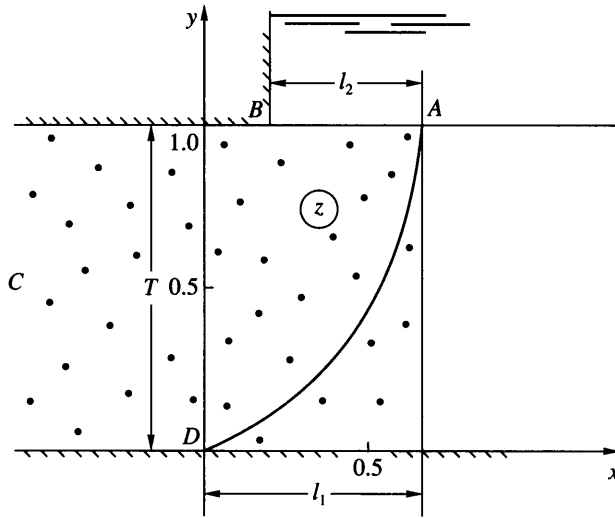
Последнее уравнение имеет два линейно-независимых интеграла $Y_1 = \text{const}, Y_2 = \arcsin \sqrt{1-\zeta}$.

Конформное отображение верхней полуплоскости вспомогательной параметрической переменной ζ (фиг. 2, б) на область комплексной скорости (фиг. 2, в) имеет вид

$$\omega = -\frac{\pi \rho i}{2 \arcsin \sqrt{1-\zeta}} \quad (5.2)$$

Принимая во внимание соотношение (5.1) и учитывая выражение (5.2), найдем

$$F = \frac{Ai}{\Delta(\zeta)}, \quad Z = -\frac{2A \arcsin \sqrt{1-\zeta}}{\pi \rho \Delta(\zeta)}, \quad \Delta(\zeta) = (c-\zeta)\sqrt{\zeta(1-\zeta)}, \quad A > 0 \quad (5.3)$$



Фиг. 6. Форма течения притока снизу, рассчитанная при $T = 1.0$, $Q = 0.01$, $\rho = 0.01$

Выражения для определяющих параметров модели и координаты точек линии раздела AD , соответствующие выражениям (2.8) и (2.9), принимают вид

$$T = \frac{2A \ln(\sqrt{c} + \sqrt{c-1})}{\rho \sqrt{c(c-1)}}, \quad Q = \frac{\pi A}{\sqrt{c(c-1)}} \quad (5.4)$$

$$x(\zeta) = \frac{2A}{\pi \rho} \int_{-\infty}^{\zeta} \frac{\ln(\sqrt{-\zeta} + \sqrt{1-\zeta})}{\Delta(\zeta)} d\zeta, \quad y(\zeta) = \frac{A}{\rho} \int_{-\infty}^{\zeta} \frac{d\zeta}{\Delta(\zeta)} \quad (-\infty \leq \zeta \leq 0) \quad (5.5)$$

В отличие от предыдущей схемы и формул (2.8) в данном случае формулы (5.4) позволяют определить неизвестные постоянные через определяющие параметры модели в явном виде

$$\alpha = \text{ch}^{-2} \frac{\pi \rho T}{Q}, \quad A = \frac{Q}{2\pi} \text{sh} \frac{\pi \rho T}{Q} \quad (5.6)$$

Преобразуя формулы (5.5) аналогично тому, как это сделано в разд. 4, приходим к следующим расчетным зависимостям, соответствующим формулам (4.2)

$$\alpha_1 = 1 - \alpha = \text{th}^{-2} \frac{\pi \rho T}{2Q}$$

$$x(t) = \frac{4A\alpha}{\rho} \int_t^{\pi/2} \frac{\cos t \ln[(1 + \sin t)/\cos t]}{1 - \alpha_1 \sin^2 t} dt, \quad y(t) = \frac{A\alpha}{\rho \sqrt{\alpha_1}} \ln \left(\exp\left(\frac{\pi \rho T}{Q}\right) \frac{1 - \sqrt{\alpha_1} \sin t}{1 + \sqrt{\alpha_1} \sin t} \right) \quad (5.7)$$

$$0 \leq t \leq \pi/2$$

$$l_1 = x(0), \quad l_2 = \frac{4A\alpha}{\pi \rho} \int_0^{\pi/2} \frac{t}{1 - \alpha \cos^2 t} dt = \frac{A}{\pi \rho \sqrt{\alpha^{-2} - 1}} \left[\frac{\pi^2}{2} - 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\alpha^{-1} - \sqrt{\alpha^{-2} - 1})^{2k+1}}{(2k+1)^2} \right] \quad (5.8)$$

Здесь использован известный результат ([27], с. 451). Поскольку в рассматриваемом случае в области комплексной скорости (фиг. 2, *в*) имеется общая точка пересечения граничных участков, то формулы (5.7) и (5.8) можно получить и с помощью инверсии области w .

6. Анализ численных расчетов и сопоставление результатов для обеих схем. На фиг. 6 изображена картина течения, рассчитанная при тех же значениях параметров T , Q и ρ , что и фиг. 1. В таблице (нижние строки) сведены результаты расчетов влияния определяющих физических характеристик ρ , Q и T на размеры l_1 и l_2 (отрицательные значения l_2 , соответствующие схеме притока снизу, означают, что в плоскости течения точка B – левая граница дна моря – смещается влево от оси ординат). На фиг. 3–5 штриховыми линиями представлены зависимости размеров языка l_1 (цифра 1) и l_2 (цифра 2) от ρ , Q и T .

Анализ зависимостей размеров языка от указанных физических параметров сводится к следующему.

Так же как и в предыдущей задаче, увеличение мощности слоя приводит к увеличению языка. Зависимость ширины l_1 от T здесь качественно подобна случаю бокового притока (фиг. 5). Однако по сравнению с первой схемой коренным образом меняется характер зависимости величины l_2 при варьировании параметров ρ и Q : ее рост обусловлен теперь убыванием плотности соленых вод и увеличением расхода (фиг. 3 и 4).

Как и прежде, наиболее существенное влияние на ширину l_1 оказывает мощность слоя. Так, с ростом T в 6.3 раза параметр l_1 увеличивается в 25 раз. Отношения $l_1^{(2)}/l_1^{(1)}$ и $l_2^{(2)}/l_2^{(1)}$, где верхний индекс указывает на вычисление по первой или второй схеме, для приводимых в таблице значений T изменяются соответственно в 2.5 и 25 раз.

Закключение. Найдены новые точные аналитические решения задач течения в прибрежных напорных водоносных пластах как при поступлении потока грунтовых вод в море сбоку (по схеме Полубариновой-Кочиной – Михайлова), так и при выклинивании в морское дно снизу (по схеме Бэра-Дагана), традиционной для задач подобного рода. Посредством численных расчетов установлено, что в первом случае увеличение плотности соленых вод и мощности напорного слоя и уменьшение расхода приводят к росту размеров языка соленой воды, вторгшегося в пресноводный пласт. Во втором случае, наоборот, увеличение ширины выклинивания в морское дно связано с уменьшением плотности соленых вод и увеличением расхода.

Автор признателен М.Г. Хублярню за критические замечания и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Полубаринова-Кочина П.Я. Некоторые задачи плоского движения грунтовых вод. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1942. 143 с.
2. Полубаринова-Кочина П.Я., Фалькович С.В. Теория фильтрации жидкостей в пористых средах // ПММ. 1947. Т. 11. Вып. 6. С. 629–674.
3. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Гостехиздат, 1952. 676 с.; 2-е изд. М.: Наука, 1977. 664 с.
4. Аравин В.И., Нумеров С.Н. Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде. М.: Гостехиздат, 1953. 616 с.
5. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917–1967). М.: Наука, 1969. 545 с.
6. Михайлова Г.К., Николаевский В.Н. Движение жидкостей и газов в пористых средах // Механика в СССР за 50 лет. М.: Наука, 1970 Т. 2. С. 585–648.
7. Кочина П.Я. Гидродинамика и теория фильтрации: Избр. тр. М.: Наука, 1991. 351 с.
8. Bear J., Dagan G. The use of the hodograph method for ground water investigations. Haifa Technion: Israel Inst. Technol. Fac. Civil Eng., 1962. 47 p.
9. Bear J., Dagan G. The unsteady interface below a coastal collector. Haifa Technion: Israel Inst. Technol. Fac. Civil Eng., 1964. 122 p.

10. *Bear J., Dagan G.* Some exact solutions of interface problems by means of the hodographs method // *J. Geophys. Res.* 1964. V. 69. № 8. P. 1563–1572.
11. *De Josseli de Jong G.* A many valued hodograph in an interface problem. Techn. Hogeschool Delft. Afd. Weg-en Waterbouwkunde, 1964. 21 p.
12. *Henry H.R.* Salt intrusion into fresh water aquifers // *J. Geophys. Res.* 1959. V. 64. № 11. P. 1911–1919.
13. *Van der veer P.* Analytical solution for steady interface flow in a coastal aquifer involving a phreatic surface with precipitation // *J. Hydrol.* 1977. V. 34. № 1–2. P. 1–11.
14. *Бэр Я., Заславски Д., Ирмей С.* Физико-математические основы фильтрации воды. М.: Мир, 1971. 452 с.
15. *Фролов А.П., Хубларян М.Г.* Проникновение соленой воды в пресноводные прибрежные горизонты // *Водные ресурсы.* 1986. № 2. С. 58–63.
16. *Хубларян М.Г., Фролов А.П.* Моделирование процессов интрузии в эстуариях и подземных водоносных горизонтах М.: Наука, 1989. 143 с.
17. *Михайлов Г.К.* Строгое решение задачи об истечении грунтовых вод из горизонтального пласта в бассейн с более тяжелой жидкостью // *Докл. АН СССР.* 1956. Т. 110. № 6. С. 945–948.
18. *Полубаринова-Кочина П.Я.* Расчет фильтрации через земляную перемычку // *ПММ.* 1940. Т. 4. № 1. С. 53–64.
19. *Голубев В.В.* Лекции по аналитической теории линейных дифференциальных уравнений. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 436 с.
20. *Whittaker E.T., Watson G.N.* A Course of Modern Analysis. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1927. = *Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н.* Курс современного анализа. Т. 2. М.: Физматгиз, 1963. 515 с.
21. *Bateman H., Erdelyi A.* Higher Transcendental Functions. N.Y.: Mc Graw-Hill, 1955. 197 p. = *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1967. 299 с.
22. *Полубаринова-Кочина П.Я.* О фильтрации в анизотропном грунте // *ПММ.* 1940. Т. 4. Вып. 2. С. 101–104.
23. *Форд Л.Р.* Автоморфные функции. М.; Л.: ОНТИ, 1936. 340 с.
24. *Голубев В.В.* Однозначные аналитические функции. М.: Физматгиз, 1961. 455 с.
25. *Девисон Б.Б.* Об установившемся движении грунтовых вод через земляные плотины // *Уч. Зап. Гос. гидрол. ин-та.* 1932. Т. 6. С. 11–19.
26. *Hamel G.* Über Grundwasserströmung // *ZAMM.* 1934. Bd 14. H. 3. S. 129–157.
27. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.

Санкт-Петербург
E-mail: beres@nwgsm.ru

Поступила в редакцию
30.X.2001