

УДК 532.529

© 2003 г. В. М. АЛИПЧЕНКОВ, Л. И. ЗАЙЧИК

КЛАСТЕРИЗАЦИЯ ЧАСТИЦ В ИЗОТРОПНОМ ТУРБУЛЕНТНОМ ПОТОКЕ

Представлена кинетическая статистическая модель для описания дисперсии и кластеризации тяжелых частиц в изотропной однородной турбулентности. Развита модель используется для расчета относительных скоростей и радиальной функции распределения пары частиц в стационарной суспензии. Полученные результаты сравниваются с известными из литературы данными прямого численного моделирования.

Ключевые слова: изотропная турбулентность, кластеризация частиц, статистическая модель, радиальная функция распределения, коагуляция.

Во многих экспериментальных и теоретических исследованиях установлено существование повышенной концентрации частиц в определенных областях градиентных турбулентных течений, например, в пристеночной зоне канала. Явление неравномерного распределения частиц в неоднородных турбулентных потоках объясняется турбулентной миграцией (турбофорезом) частиц из области с высокой интенсивностью турбулентных пульсаций скорости в зону с низкой степенью турбулентности [1]. Однако недавние результаты прямого численного моделирования [2–7] свидетельствуют, что эффект аккумуляции (кластеризации) частиц может иметь место и в однородной турбулентности, где отсутствуют градиенты пульсаций скорости несущего потока, и, следовательно, механизм транспорта частиц под действием турбофореза не имеет места. Эти расчеты показывают, что частицы концентрируются в областях с высокой завихренностью, благодаря действию центробежной силы. Повышение концентрации частиц может приводить к заметному возрастанию как скорости их осаждения [3], так и частоты коагуляции [5] в однородной турбулентности. В [3–6] установлено, что явление кластеризации проявляется при совпадении динамического времени релаксации частиц и временного масштаба турбулентности. Однако в [7] обнаружено, что частицы с временем релаксации, существенно превышающим колмогоровский масштаб, также проявляют тенденцию к аккумуляции.

Кластеризация частиц в изотропной однородной турбулентности представляет собой довольно тонкий физический эффект, до конца еще не проясненный и не учитываемый в большинстве известных теоретических моделей для описания столкновений, дисперсии, осаждения и коагуляции частиц в турбулентных потоках. Эти модели, как правило, основаны на предположении, что частицы случайным образом равномерно распределены в пространстве, и, следовательно, эффект кластеризации полностью игнорируется. В то же время явление кластеризации может играть исключительно важную роль в ряде метеорологических и промышленных процессов, например в физике атмосферы [8]. Так, как отмечается в [5], этот эффект, по-видимому, является ответственным за феномен быстрого роста капель в облаках, когда ни конденсация, ни седиментация не играют существенной роли.

Целью настоящей статьи является разработка метода моделирования бинарной дисперсии и аккумуляции инерционных частиц в изотропном турбулентном поле, характеристики которого предполагаются известными. Этот метод основан на кинетическом уравнении для функции плотности вероятности (ФПВ) относительной ско-

рости пары частиц и развивает одноточечный (одночастичный) статистический подход [9–12] на двухточечное (двухчастичное) описание. Введение ФПВ для пары частиц позволяет перейти от стохастического описания движения частиц вдоль случайных траекторий к статистическому моделированию распределений относительной скорости двух частиц в случайном турбулентном поле. В результате могут быть определены относительная среднеквадратичная скорость, радиальная функция распределения и другие двухчастичные статистические характеристики.

Допущение об изотропности и однородности турбулентного поля не накладывает слишком жесткого ограничения на область применения развиваемой модели. Явление кластеризации наиболее отчетливо проявляется для небольших частиц в результате их взаимодействия с мелкомасштабной турбулентностью, которую можно считать локально изотропной и однородной. Поэтому данная модель может быть использована для расчета бинарной дисперсии и коагуляции частиц с временами релаксации порядка временного микромасштаба турбулентности в реальных турбулентных течениях.

1. Характеристики турбулентного потока. Для описания взаимодействия частиц с турбулентностью определим одноточечные и двухточечные корреляционные моменты второго порядка пульсаций скоростей несущей сплошной среды. Турбулентное поле предполагается изотропным, однородным, стационарным и несжимаемым с нулевым значением средней скорости.

Лагранжева одноточечная корреляционная функция определяется соотношением

$$B_{Lij}^0(\tau) = \langle u_i(\mathbf{x}, t) u_j(\mathbf{R}(t + \tau), t + \tau) \rangle = u_0^2 \Psi_L(\tau) \delta_{ij}, \quad \mathbf{R}(t) = \mathbf{x}$$

где \mathbf{R} – вектор, описывающий траекторию частиц сплошной среды, u_0^2 – интенсивность пульсаций скорости сплошной среды, $\Psi_L(\tau)$ – безразмерная автокорреляционная функция, характеризуемая лагранжевым интегральным временным масштабом $T_L = \int_0^\infty \Psi_L(\tau) d\tau$.

Эйлеровы одновременные двухточечные корреляционная и структурная функции вводятся при помощи соотношений

$$B_{ij}(\mathbf{r}) = \langle u_i(\mathbf{x}, t) u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) \rangle, \quad B_{ij}(0) = u_0^2 \delta_{ij}$$

$$S_{ij}(\mathbf{r}) = \langle (u_i(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) - u_i(\mathbf{x}, t))(u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) - u_j(\mathbf{x}, t)) \rangle = 2[u_0^2 \delta_{ij} - B_{ij}(\mathbf{r})]$$

Для описания дисперсии пары частиц вводятся лагранжевы двухточечные корреляционная и структурная функции

$$B_{Lij}(\mathbf{r}, \tau) = \langle u_i(\mathbf{R}_1(t), t) u_j(\mathbf{R}_2(t + \tau), t + \tau) \rangle, \quad \mathbf{R}_1(t) = \mathbf{x}, \quad \mathbf{R}_2(t) = \mathbf{x} + \mathbf{r}$$

$$S_{Lij}(\mathbf{r}, \tau) = \langle (u_i(\mathbf{R}_2(t), t) - u_i(\mathbf{R}_1(t), t))(u_j(\mathbf{R}_2(t + \tau), t + \tau) - u_j(\mathbf{R}_1(t + \tau), t + \tau)) \rangle = \\ = 2[B_{Lij}^0(\tau) - B_{Lij}(\mathbf{r}, \tau)]$$

Лагранжева двухточечная корреляционная функция связана с лагранжевой одноточечной и эйлеровой двухточечной корреляционными функциями соотношениями

$$B_{Lij}(0, \tau) = B_{Lij}^0(\tau), \quad B_{Lij}(\mathbf{r}, 0) = B_{ij}(\mathbf{r}) \tag{1.1}$$

Коэффициент относительной диффузии двух частиц сплошной среды может быть представлен как интеграл от лагранжевых двухточечных корреляций [13]

$$D_{ij}^r(\mathbf{r}, \tau) = 2 \int_0^\tau [B_{Lij}^0(\tau_1) - B_{Lij}(\mathbf{r}, \tau_1)] d\tau_1 = \int_0^\tau S_{Lij}(\mathbf{r}, \tau_1) d\tau_1 \tag{1.2}$$

Далее лагранжева двухточечная корреляционная функция аппроксимируется как

$$B_{Lij}(\mathbf{r}, \tau) = B_{Lij}^0(\tau) + [B_{ij}(\mathbf{r}) - B_{ij}(0)]\Psi_{Lr}(\tau|r) \quad (1.3)$$

где $\Psi_{Lr}(\tau|r)$ – лагранжева автокорреляционная функция, характеризующая относительное движение двух частиц, находящихся первоначально на расстоянии $r = |\mathbf{r}|$. С учетом $\Psi_{Lr}(0) = 1$ аппроксимация (1.3) удовлетворяет соотношениям (1.1). Для простоты эта автокорреляционная функция задается часто используемой в теории турбулентности экспоненциальной аппроксимацией

$$\Psi_{Lr}(\tau|r) = \exp\left(-\frac{\tau}{T_{Lr}}\right) \quad (1.4)$$

где $T_{Lr} \equiv \int_0^\infty \Psi_{Lr}(\tau)d\tau$ – интегральный временной масштаб.

Аппроксимация (1.3) приводит к представлению лагранжевой двухточечной структурной функции пульсаций скоростей в виде произведения

$$S_{Lij}(\mathbf{r}, \tau) = S_{ij}(\mathbf{r})\Psi_{Lr}(\tau|r) \quad (1.5)$$

Подстановка (1.5) в (1.2) приводит к выражению для коэффициента относительной диффузии при больших временах

$$D_{ij}'(\mathbf{r}, \tau \rightarrow \infty) = S_{ij}(\mathbf{r})T_{Lr} \quad (1.6)$$

С целью определения T_{Lr} рассмотрим поведение структурных функций и коэффициента относительной диффузии в вязком, инерционном и внешнем пространственных интервалах. В изотропной однородной турбулентности следует иметь в виду, что любой тензор второго ранга может быть представлен в виде [14]

$$M_{ij}(\mathbf{r}, \tau) = M_{nn}(r, \tau)\delta_{ij} + [M_{ll}(r, \tau) - M_{nn}(r, \tau)]\frac{r_i r_j}{r^2}$$

где M_{ll} и M_{nn} – продольная и поперечная по отношению к вектору \mathbf{r} компоненты тензора.

В вязком интервале ($r \leq \eta$, где $\eta \equiv (\nu^3/\epsilon)^{1/4}$ – колмогоровский пространственный микромасштаб) первые члены разложения в ряд Тейлора эйлеровых структурных функций имеют вид [14]

$$S_{ll} = \frac{\epsilon r^2}{15\nu}, \quad S_{nn} = \frac{2\epsilon r^2}{15\nu} \quad (1.7)$$

где ϵ – скорость диссипации турбулентной энергии, ν – коэффициент кинематической вязкости.

При малых r разность пульсаций скоростей в двух точках может быть представлена как линейная функция от вектора, соединяющего эти точки

$$\Delta u_i(\mathbf{r}, \tau) = u_i(\mathbf{x} + \mathbf{r}, \tau) - u_i(\mathbf{x}, \tau) = \gamma_{ij}(\tau)r_j \quad (1.8)$$

где $\gamma_{ij} \equiv \partial u_i / \partial x_j$ – градиент пульсаций скорости. В изотропном линейном поле корреляционные функции тензоров деформации и вращения представляются в виде [15, 16]

$$\langle \sigma_{ik}(\mathbf{x}, t) \sigma_{jn}(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) \rangle = \frac{\epsilon}{20\nu} \left(\delta_{ij} \delta_{kn} + \delta_{in} \delta_{jk} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \delta_{jn} \right) \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_\sigma}\right)$$

$$\langle \omega_{ik}(\mathbf{x}, t) \omega_{jn}(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) \rangle = \frac{\epsilon}{12\nu} (\delta_{ij} \delta_{kn} - \delta_{in} \delta_{jk}) \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_\omega}\right) \quad (1.9)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{\gamma_{ij} + \gamma_{ji}}{2}, \quad \omega_{ij} = \frac{\gamma_{ij} - \gamma_{ji}}{2}$$

Как видно из (1.9), корреляционные функции деформации и вращения убывают экспоненциально с характерными временами τ_σ и τ_ω , пропорциональными колмооровскому масштабу $\tau_k \equiv (\nu/\varepsilon)^{1/2}$. Выражения для лагранжевых двухточечных корреляционных функций получаются из (1.8) и (1.9) в предположении, что распределения вектора расстояния между точками r_i и тензора градиента пульсаций скоростей γ_{ij} статистически независимы

$$S_{lll} = \frac{\varepsilon r^2}{15\nu} \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_\sigma}\right), \quad S_{Lnn} = \frac{\varepsilon r^2}{4\nu} \left[\frac{1}{5} \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_\sigma}\right) + \frac{1}{3} \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_\omega}\right) \right] \quad (1.10)$$

После подстановки (1.10) в (1.2) коэффициент относительной диффузии принимает вид [17]

$$D_{ll}^r = \frac{\varepsilon \tau_\sigma r^2}{15\nu}, \quad D_{mn}^r = \frac{\varepsilon}{4\nu} \left(\frac{\tau_\sigma}{5} + \frac{\tau_\omega}{3} \right) r^2 \quad (1.11)$$

При $\tau_\omega = \tau_\sigma$ (1.11) согласуется с коэффициентом относительной диффузии, полученным для вязкого интервала в [13]. С другой стороны, из (1.6) и (1.7) следует

$$D_{ll}^r = \frac{\varepsilon T_{Lr} r^2}{15\nu}, \quad D_{nn}^r = \frac{2\varepsilon T_{Lr} r^2}{15\nu} \quad (1.12)$$

Из сопоставления (1.11) и (1.12) видно, что эти выражения совпадают при $T_{Lr} = \tau_\omega = \tau_\sigma$. Следовательно, в вязком интервале двухточечный временной масштаб T_{Lr} определяется как

$$T_{Lr} = \tau_\sigma = A_1 \tau_k \quad (1.13)$$

В [13] для постоянной A_1 теоретически получено значение $\sqrt{5}$, что хорошо согласуется со значением 2.3, определенным на основе прямого численного моделирования (DNS) в [15].

Далее рассмотрим поведение характеристик турбулентности сплошной среды в инерционном интервале ($\eta \ll r \ll L$, где L – пространственный макромасштаб). Известные гипотезы подобия Колмогорова приводят к следующему автомодельному представлению для структурных функций второго порядка

$$S_{ll} = C(\varepsilon r)^{2/3}, \quad S_{nn} = \frac{4}{3} C(\varepsilon r)^{2/3} \quad (1.14)$$

где $C \approx 2.0$ согласно [14, 18].

В инерционном интервале из соображений размерностей можно сконструировать только один масштаб времени $\varepsilon^{-1/3} r^{2/3}$, а следовательно, временной масштаб T_{Lr} должен быть принят равным

$$T_{Lr} = A_2 \varepsilon^{-1/3} r^{2/3}, \quad A_2 = \text{const} \quad (1.15)$$

С другой стороны, определим двухточечный временной масштаб как

$$T_{Lr} = l S_{ll}^{-1/2} \quad (1.16)$$

где l – масштаб длины (аналог длины пути смешения в пристеночной турбулентности). В вязком и инерционном интервалах из соображений размерностей положим этот масштаб длины пропорциональным расстоянию между двумя точками

$$l = \alpha r, \quad \alpha = \text{const} \quad (1.17)$$

Тогда из сравнения выражений (1.13) и (1.16) для вязкого интервала с учетом соотношений (1.7), (1.14), (1.15) и (1.17) следует

$$\alpha = \frac{A_1}{15^{1/2}}, \quad A_2 = \frac{A_1}{(15C)^{1/2}} \quad (1.18)$$

Подстановка (1.14) и (1.15) в (1.6) приводит к следующим выражениям для коэффициентов относительной диффузии в инерционном интервале

$$D_{ll}^r = CA_2 \epsilon^{1/3} r^{4/3} = 0.816 \epsilon^{1/3} r^{4/3}, \quad D_{nn}^r = 4D_{ll}^r/3 = 1.09 \epsilon^{1/3} r^{4/3}$$

$$C = 2.0, \quad A_2 = 1/\sqrt{6}$$

которые достаточно хорошо согласуются с теоретическими зависимостями, полученными в [13]

$$D_{ll}^r = 2C_K^{1/2} f_0 \epsilon^{1/3} r^{4/3} = 0.854 \epsilon^{1/3} r^{4/3}, \quad D_{nn}^r = 5D_{ll}^r/3 = 1.42 \epsilon^{1/3} r^{4/3}$$

$$C_K = 1.77, \quad f_0 = 0.321$$

При больших расстояниях между двумя точками пульсации скоростей в этих точках статистически независимы. Следовательно, во внешнем интервале ($r > L$) корреляционные функции обращаются в нуль, а структурные функции равны

$$S_{ll} = S_{nn} = 2u_0^2 \quad (1.19)$$

Кроме того, при больших r двухточечный временной масштаб переходит в обычный лагранжев интегральный временной масштаб

$$T_{Lr} = T_L \quad (1.20)$$

а коэффициент относительной диффузии определяется соотношением

$$D_{ij}^r = 2u_0^2 T_L \delta_{ij}$$

Согласно данным DNS [19], в диапазоне изменения числа Рейнольдса $Re_\lambda = 38-93$ лагранжев интегральный временной масштаб может быть аппроксимирован зависимостью

$$T_L^\circ = \frac{T_L}{\tau_k} = 0.06 Re_\lambda + 3, \quad Re_\lambda = \left(\frac{15u_0^4}{\epsilon \nu} \right)^{1/2} \quad (1.21)$$

2. Кинетическое уравнении для ФПВ относительной скорости пары частиц. Рассмотрим движение двух одинаковых тяжелых частиц в изотропном турбулентном поле при отсутствии силы тяжести. Уравнения, описывающие движение каждой из частиц, имеют вид

$$\frac{d\mathbf{R}_{p\alpha}}{dt} = \mathbf{v}_{p\alpha}, \quad \frac{d\mathbf{v}_{p\alpha}}{dt} = \frac{\mathbf{u}(\mathbf{R}_{p\alpha}, t) - \mathbf{v}_{p\alpha}}{\tau_p} \quad (2.1)$$

где $\mathbf{R}_{p\alpha}$ и $\mathbf{v}_{p\alpha}$ – координата и скорость частицы, $\mathbf{u}(\mathbf{R}_{p\alpha}, t)$ – скорость сплошной среды в точке $\mathbf{x} = \mathbf{R}_{p\alpha}(t)$, τ_p – время динамической релаксации частицы, α обозначает номер частицы ($\alpha = 1, 2$). Следует отметить, что уравнения (2.1) справедливы для частиц, плотность которых много больше плотности сплошной среды (в этом случае единственной существенной межфазной силой является сила вязкого сопротивления), а размер не превышает колмогоровский пространственный микромасштаб.

Из (2.1) вытекают уравнения для пары частиц

$$\frac{d\mathbf{r}_p}{dt} = \mathbf{w}_p, \quad \frac{d\mathbf{w}_p}{dt} = \frac{\Delta\mathbf{u}(\mathbf{r}_p, t) - \mathbf{w}_p}{\tau_p} \quad (2.2)$$

где $\mathbf{r}_p = \mathbf{R}_{p2} - \mathbf{R}_{p1}$, $\mathbf{w}_p = \mathbf{v}_{p2} - \mathbf{v}_{p1}$. Очевидно, что (2.2) представляют собой уравнения типа Ланжевена, поскольку турбулентное поле скорости несущей сплошной среды рассматривается как случайный процесс. Для того, чтобы перейти от стохастических уравнений (2.2) к статистическому описанию для распределения относительной скорости, вводится ФПВ для пары частиц

$$P = \langle p \rangle = \langle \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_p(t))\delta(\mathbf{w} - \mathbf{w}_p(t)) \rangle \quad (2.3)$$

Операция осреднения в (2.3) выполняется по ансамбля случайных реализаций поля скорости сплошной среды. Функция $P(\mathbf{r}, \mathbf{w}, t)$ определяется как вероятность реализации относительной скорости \mathbf{w} в момент времени t для частиц, разделенных расстоянием \mathbf{r} . Дифференцируя (2.3) по времени с учетом (2.2), получим транспортное уравнение для ФПВ относительной скорости пары частиц

$$\frac{\partial P}{\partial t} + w_k \frac{\partial P}{\partial r_k} - \frac{1}{\tau_p} \frac{\partial w_k P}{\partial w_k} = -\frac{1}{\tau_p} \frac{\partial \langle \Delta u_k p \rangle}{\partial w_k} \quad (2.4)$$

Левая часть уравнения (2.4) включает члены, описывающие эволюцию во времени и конвекцию в фазовом пространстве (\mathbf{r}, \mathbf{w}) , тогда как правая часть характеризует взаимодействие между частицами и турбулентными вихрями сплошной среды. Для определения корреляции $\langle \Delta u_k p \rangle$, описывающей взаимодействие “частицы–турбулентность”, поле относительных скоростей сплошной среды моделируется гауссовым случайным процессом с известными корреляционными моментами. Тогда с учетом формулы Фуртуца–Новикова для гауссовых случайных функций получаем [20]

$$\begin{aligned} \langle \Delta u_i p \rangle &= \iint \langle \Delta u_i(\mathbf{r}, t) \Delta u_k(\mathbf{r}_1, t_1) \rangle \left\langle \frac{\delta p(\mathbf{r}, t)}{\delta \Delta u_k(\mathbf{r}_1, t_1)} \right\rangle d\mathbf{r}_1 dt_1 \\ \left\langle \frac{\delta p(\mathbf{r}, t)}{\delta \Delta u_k(\mathbf{r}_1, t_1)} \right\rangle &= -\frac{\partial}{\partial r_j} \left\langle p(\mathbf{r}, t) \frac{\delta r_{pj}(t)}{\delta \Delta u_k(\mathbf{r}_1, t_1)} \right\rangle - \frac{\partial}{\partial w_j} \left\langle p(\mathbf{r}, t) \frac{\delta w_{pj}(t)}{\delta \Delta u_k(\mathbf{r}_1, t_1)} \right\rangle \end{aligned} \quad (2.5)$$

Для нахождения функциональных производных в (2.5) привлекаются решения уравнений (2.2), описывающие относительное движение пары частиц

$$\begin{aligned} r_{pi}(t) &= r_{pi}(0) + \int_0^t w_{pi}(t_1) dt_1 \\ w_{pi}(t) &= w_{pi}(0) \exp\left(-\frac{t}{\tau_p}\right) + \frac{1}{\tau_p} \int_0^t \Delta u_i(\mathbf{r}_p(t_1), t_1) \exp\left(-\frac{t-t_1}{\tau_p}\right) dt_1 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Применяя оператор функционального дифференцирования к (2.6) и учитывая независимость начальных условий $r_{pi}(0)$ и $w_{pi}(0)$ от Δu_i , получаем выражения для функциональных производных

$$\begin{aligned} \frac{\delta r_{pi}(t)}{\delta \Delta u_j(\mathbf{r}_1, t_1)} &= \delta_{ij} \left[1 - \exp\left(-\frac{t-t_1}{\tau_p}\right) \right] \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_p(t_1)) H(t-t_1) \\ \frac{\delta w_{pi}(t)}{\delta \Delta u_j(\mathbf{r}_1, t_1)} &= \frac{\delta_{ij}}{\tau_p} \exp\left(-\frac{t-t_1}{\tau_p}\right) \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_p(t_1)) H(t-t_1) \end{aligned} \quad (2.7)$$

где $H(x)$ – функция Хевисайда: $H(x < 0) = 0$, $H(x > 0) = 1$.

С учетом (2.7) выражение (2.5) представляется в виде

$$\begin{aligned} \langle \Delta u_i p \rangle &= - \int_0^t \langle \Delta u_i(\mathbf{r}, t) \Delta u_k(\mathbf{r}_p(t_1), t_1) \rangle \left[1 - \exp\left(-\frac{t-t_1}{\tau_p}\right) \right] dt_1 \frac{\partial P}{\partial r_k} - \\ &- \frac{1}{\tau_p} \int_0^t \langle \Delta u_i(\mathbf{r}, t) \Delta u_k(\mathbf{r}_p(t_1), t_1) \rangle \exp\left(-\frac{t-t_1}{\tau_p}\right) dt_1 \frac{\partial P}{\partial w_k} = \\ &= - \tau_p G_{ik}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial P}{\partial r_k} - F_{ik}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial P}{\partial w_k} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Здесь G_{ik} и F_{ik} обозначают интегралы от двухточечной структурной функции пульсаций скорости сплошной среды, вычисленные вдоль траектории, описывающей относительное движение двух частиц. Для представления этих интегралов в явном виде привлекается аппроксимация (1.5) для $S_{Lij}(\mathbf{r}, \tau)$. В результате получаем

$$\begin{aligned} G_{ik}(\mathbf{r}, t) &= \frac{S_{ik}(\mathbf{r})}{\tau_p} \int_0^t \Psi_{Lr}(\tau|r) \left[1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_p}\right) \right] d\tau \\ F_{ik}(\mathbf{r}, t) &= \frac{S_{ik}(\mathbf{r})}{\tau_p} \int_0^t \Psi_{Lr}(\tau|t) \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_p}\right) d\tau \end{aligned} \quad (2.9)$$

После подстановки (2.9) в (2.8) корреляция $\langle \Delta u_i p \rangle$ принимает вид

$$\langle \Delta u_i p \rangle = -S_{ik} \left(\tau_p g_r \frac{\partial P}{\partial r_k} + f_r \frac{\partial P}{\partial w_k} \right) \quad (2.10)$$

$$g_r = \frac{1}{\tau_p} \int_0^\infty \Psi_{Lr}(\tau|r) \left[1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_p}\right) \right] d\tau, \quad f_r = \frac{1}{\tau_p} \int_0^\infty \Psi_{Lr}(\tau|r) \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_p}\right) d\tau \quad (2.11)$$

Выражение (2.10) с учетом (2.11) справедливо для значений времени, существенно больших по сравнению с T_L . Коэффициенты g_r и f_r характеризуют вовлечение пары частиц, разделенных расстоянием r , в пульсационное движение сплошной среды. Если автокорреляционная функция задается экспоненциальной зависимостью (1.4), то эти коэффициенты определяются как

$$g_r = \frac{T_{Lr}}{\tau_p} - f_r = \frac{T_{Lr}^2}{\tau_p(\tau_p + T_{Lr})}, \quad f_r = \frac{T_{Lr}}{\tau_p + T_{Lr}} \quad (2.12)$$

Подстановка (2.10) в (2.4) приводит к замкнутому кинетическому уравнению для ФПВ относительной скорости пары частиц в изотропной однородной турбулентности

$$\frac{\partial P}{\partial t} + w_k \frac{\partial P}{\partial r_k} - \frac{1}{\tau_p} \frac{\partial w_k P}{\partial w_k} = S_{ik} \left(g_r \frac{\partial^2 P}{\partial r_i \partial w_k} + \frac{f_r}{\tau_p} \frac{\partial^2 P}{\partial w_i \partial w_k} \right) \quad (2.13)$$

Члены в правой части уравнения (2.13) описывают диффузионный перенос в фазовом пространстве (\mathbf{r}, \mathbf{w}) , обусловленный взаимодействием частиц с турбулентными вихрями сплошной среды. Моделирование турбулентных пульсаций скорости гауссовым случайным процессом позволяет выразить взаимодействие “частицы-турбулентность” в кинетическом уравнении в виде оператора второго порядка типа Фоккера–Планка. Хотя согласно результатам *DNS* [5, 21], ФПВ относительной скорости пары частиц заметно отличается от нормального распределения (особенно при больших абсолютных значениях относительных скоростей), вклад “хвостов” ФПВ в средние характеристики

не очень существен. Поэтому гауссов случайный процесс достаточно хорошо предсказывает двухточечные моменты относительных скоростей [22]. Следует отметить, что (2.13) внешне напоминает кинетическое уравнение для одноточечной ФПВ распределения скоростей в однородном безградиентном турбулентном поле [9, 23]. Однако одноточечное и двухточечное кинетические уравнения имеют только внешнее сходство, поскольку одноточечная кинетическая модель манипулирует с одночастичной ФПВ в фазовом пространстве и, следовательно, не может учитывать пространственную коррелированность движения пары частиц. Напротив, двухточечный подход позволяет рассматривать коррелированное движение частиц в результате их взаимодействия с турбулентными вихрями и тем самым может описывать явление кластеризации.

3. Уравнения для моментов. Путем интегрирования (2.13) по пространству скоростей может быть получена система уравнений для двухточечных моментов ФПВ относительной скорости пары частиц. Так, уравнения для плотности пары частиц N , осредненной относительной плотности W_i и структурной функции второго порядка пульсаций скоростей частиц S_{pij} имеют вид

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial N W_k}{\partial r_k} = 0 \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial W_i}{\partial t} + W_k \frac{\partial W_i}{\partial r_k} = - \frac{\partial S_{pik}}{\partial r_k} - \frac{W_i}{\tau_p} - \frac{D_{pik}^r}{\tau_p} \frac{\partial \ln N}{\partial r_k} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_{pij}}{\partial t} + W_k \frac{\partial S_{pij}}{\partial r_k} + \frac{1}{N} \frac{\partial N \langle w'_i w'_j w'_k \rangle}{\partial r_k} = & - (S_{pik} + g_r S_{ik}) \frac{\partial W_j}{\partial r_k} - \\ & - (S_{pjk} + g_r S_{jk}) \frac{\partial W_i}{\partial r_k} + \frac{2}{\tau_p} (f_r S_{ij} - S_{pij}) \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$N = \int P dw, \quad W_i = \frac{1}{N} \int w_i P dw, \quad S_{pij} = \langle w'_i w'_j \rangle = \frac{1}{N} \int (w_i - W_i)(w_j - W_j) P dw$$

$$D_{pij}^r = \tau_p (S_{pij} + g_r S_{ij})$$

Построение уравнения для ФПВ в фазовом пространстве не решает полностью проблему замыкания, поскольку оно порождает бесконечную цепочку уравнений для моментов, и уравнение для n -го момента содержит $n + 1$ -й момент. Для построения системы уравнений для моментов необходимо оборвать эту цепочку путем введения замыкающих соотношений. Так, уравнения для третьих моментов могут быть замкнуты при помощи известной квазинормальной гипотезы о равенстве куммулянтов четвертого порядка нулю, выражающей моменты четвертого порядка как сумму произведений корреляций второго порядка. В результате получается уравнение для структурной функции третьего порядка

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle w'_i w'_j w'_k \rangle}{\partial t} + W_n \frac{\partial \langle w'_i w'_j w'_k \rangle}{\partial r_n} + \langle w'_i w'_j w'_n \rangle \frac{\partial W_k}{\partial r_n} + \langle w'_i w'_k w'_n \rangle \frac{\partial W_j}{\partial r_n} + \langle w'_j w'_k w'_n \rangle \frac{\partial W_i}{\partial r_n} + \\ + \frac{D_{pin}^r}{\tau_p} \frac{\partial \langle w'_j w'_k \rangle}{\partial r_n} + \frac{D_{pjn}^r}{\tau_p} \frac{\partial \langle w'_i w'_k \rangle}{\partial r_n} + \frac{D_{pkn}^r}{\tau_p} \frac{\partial \langle w'_i w'_j \rangle}{\partial r_n} + \frac{3}{\tau_p} \langle w'_i w'_j w'_k \rangle = 0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Уравнения (3.1)–(3.4) описывают двухточечную статистику относительной скорости пары частиц на уровне третьих моментов. Для моделирования на уровне вторых моментов в уравнении (3.4) пренебрежем членами, характеризующими эволюцию во времени, конвекцию и генерацию вследствие градиентов осредненной скорости. В ре-

зультате получим алгебраические соотношения для структурной функции третьего порядка

$$\langle w'_i w'_j w'_k \rangle = -\frac{1}{3} \left(D_{pin}^r \frac{\partial \langle w'_j w'_k \rangle}{\partial r_n} + D_{pjn}^r \frac{\partial \langle w'_i w'_k \rangle}{\partial r_n} + D_{pkn}^r \frac{\partial \langle w'_i w'_j \rangle}{\partial r_n} \right) \quad (3.5)$$

Тройные корреляции описывают диффузионный механизм переноса пульсаций скорости. Выражение (3.5) согласуется по форме с соотношениями, полученными в [24] для тройных корреляций в однофазном турбулентном потоке и в [11, 25] для одноточечных третьих моментов пульсаций скорости частиц в двухфазном турбулентном потоке. Система (3.1)–(3.3) с учетом (3.5) позволяет моделировать двухточечную статистику относительной скорости пары частиц на уровне уравнений для вторых моментов.

В изотропной турбулентности вектор осредненной относительной скорости может быть выражен через свою радиальную компоненту

$$W_i = \frac{r_i}{r} W_r$$

и, благодаря сферической симметрии, подразумевающей независимость относительных скоростей и плотности распределения пары частиц от пространственной ориентации вектора \mathbf{r} , а зависимость только от его модуля r , система уравнений (3.1)–(3.3) с учетом (3.5) сводится к

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 N W_r) &= 0 \\ \frac{\partial W_r}{\partial t} + W_r \frac{\partial W_r}{\partial t} + \frac{2(S_{pII} - S_{pnn})}{r} &= -\frac{\partial S_{pII}}{\partial r} - \frac{W_r}{\tau_p} - (S_{pII} + g_r S_{II}) \frac{\partial \ln N}{\partial r} \\ \frac{\partial S_{pII}}{\partial t} + W_r \frac{\partial S_{pII}}{\partial r} &= \frac{\tau_p}{N} \frac{\partial}{\partial r} \left[N (S_{pII} + g_r S_{II}) \frac{\partial S_{pII}}{\partial r} \right] - 2(S_{pII} + g_r S_{II}) \frac{\partial W_r}{\partial r} + \frac{2}{\tau_p} (f_r S_{II} - S_{pII}) \quad (3.6) \\ \frac{\partial S_{pnn}}{\partial t} + W_r \frac{\partial S_{pnn}}{\partial r} &= \frac{\tau_p}{3Nr^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 N (S_{pII} + g_r S_{II}) \frac{\partial S_{pnn}}{\partial r} \right] + \right. \\ &+ \left. 2 \frac{\partial}{\partial r} [rN(S_{pnn} + g_r S_{nn})(S_{pII} - S_{nn})] \right\} - 2(S_{pnn} + g_r S_{nn}) \frac{W_r}{r} + \frac{2}{\tau_p} (f_r S_{nn} - S_{pnn}) \end{aligned}$$

4. Результаты решения для стационарной суспензии частиц. Рассмотрим стационарную суспензию, полное число частиц в которой не изменяется во времени. Условие стационарности подразумевает баланс потоков частиц, направленных к и из начала координат, и, следовательно, равенство нулю осредненной относительной радиальной скорости W_r . Таким образом, система уравнений (3.6) сводится к решению следующей задачи

$$\begin{aligned} \frac{2(S_{pII}^\circ - S_{pnn}^\circ)}{r^\circ} + \frac{dS_{pII}^\circ}{dr^\circ} + (S_{pII}^\circ + g_r S_{II}^\circ) \frac{d \ln \Gamma}{dr^\circ} &= 0 \\ St^2 \frac{d}{dr^\circ} \left[\Gamma (S_{pII}^\circ + g_r S_{II}^\circ) \frac{dS_{pII}^\circ}{dr^\circ} \right] + 2\Gamma (f_r S_{II}^\circ - S_{pII}^\circ) &= 0 \\ \frac{St^2}{3r^{\circ 2}} \left\{ \frac{d}{dr^\circ} \left[r^{\circ 2} \Gamma (S_{pII}^\circ + g_r S_{II}^\circ) \frac{dS_{pnn}^\circ}{dr^\circ} \right] + 2 \frac{d}{dr^\circ} [r^\circ \Gamma (S_{pnn}^\circ + g_r S_{nn}^\circ) (S_{pII}^\circ - S_{pnn}^\circ)] \right\} &+ \\ + 2\Gamma (f_r S_{nn}^\circ - S_{pnn}^\circ) &= 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

В (4.1) верхний символ “градус” обозначает обезразмеривание на колмогоровские масштабы длины η и скорости $u_k \equiv (v\epsilon)^{1/4}$; $St \equiv \tau_p/\tau_k$ – число Стокса, характеризующее инерционность частиц; $\Gamma \equiv N/N(r = \infty)$ – радиальная функция распределения, описывающая эффект аккумуляции частиц. Итак, рассматриваемая задача (4.1) представляет собой нелинейную систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений относительно радиальной функции распределения и продольной и поперечной структурных функций пульсаций скоростей частиц.

Граничные условия для уравнений (4.1) задаются в виде

$$\frac{dS_{pll}^{\circ}}{dr^{\circ}} = \frac{dS_{pnn}^{\circ}}{dr^{\circ}} = 0, \quad r^{\circ} = 0 \quad (4.2)$$

$$S_{pll}^{\circ} = f_r S_{ll}^{\circ}, \quad S_{pnn}^{\circ} = f_r S_{nn}^{\circ}, \quad \Gamma = 1, \quad r^{\circ} \rightarrow \infty \quad (4.3)$$

Условия (4.2) выражают баланс между потоками частиц, направленными к и из начала координат, и справедливы в случае, когда размер частиц много меньше η . Условия (4.3) отражают тот факт, что на больших расстояниях между частицами r их движение некоррелировано, т.е. относительные скорости перестают зависеть от r и частицы случайным образом (равномерно) распределены в пространстве.

Структурные функции пульсаций скорости сплошной среды в (4.1) задаются аппроксимациями, объединяющими соотношения (1.7), (1.14) и (1.19)

$$\frac{1}{S_{ll}^{\circ k}} = \left(\frac{15}{r^{\circ 2}}\right)^k + \frac{1}{(Cr^{\circ 2/3})^k} + \left(\frac{15^{1/2}}{2Re_{\lambda}}\right)^k, \quad \frac{1}{S_{nn}^{\circ k}} = \left(\frac{15}{2r^{\circ 2}}\right)^k + \left(\frac{3}{4Cr^{\circ 2/3}}\right)^k + \left(\frac{15^{1/2}}{2Re_{\lambda}}\right)^k \quad (4.4)$$

Аналогичным образом двухточечный временной масштаб аппроксимируется выражением, объединяющим (1.16) и (1.20)

$$\frac{1}{T_{Lr}^{\circ k}} = \left(\frac{S_{ll}^{\circ 1/2}}{\alpha r^{\circ}}\right)^k + \frac{1}{T_L^{\circ k}} \quad (4.5)$$

Постоянные в (4.4) и (4.5) равны $C = 2$ и $\alpha = 1/\sqrt{3}$. Для того, чтобы избежать зависимости результатов от k в (4.4) и (4.5), эта степень должна быть значительно больше единицы. Расчеты показывают, что результаты перестают зависеть от k , если $k \geq 10$. В дальнейшем принимается $k = 20$.

Уравнения (4.4) с граничными условиями (4.2) и (4.3) решались численно, и полученные результаты сопоставлялись с данными прямого численного моделирования [5–7].

Однако прежде приведем некоторые асимптотические решения этой задачи. В случае безынерционных частиц ($St = 0$) из (4.1) следует

$$S_{pll}^{\circ} = S_{ll}^{\circ}, \quad S_{pnn}^{\circ} = S_{nn}^{\circ}, \quad \Gamma = 1 \quad (4.6)$$

Согласно (4.6) безынерционные частицы полностью вовлекаются в пульсационное движение сплошной среды, вследствие чего их распределение в пространстве однородно.

Для малоинерционных частиц ($St < 1$) решение задачи (4.1)–(4.5) может быть построено путем разложения в ряд по малому параметру St . Первые члены этого разложения имеют вид

$$S_{pll}^{\circ} = \left(\frac{1}{15} + \frac{St^2}{75}\right)r^{\circ 2}, \quad S_{pnn}^{\circ} = \left(\frac{2}{15} - \frac{2St}{15 \cdot 5^{1/2}} + \frac{28St^2}{675}\right)r^{\circ 2} \quad (4.7)$$

$$\Gamma \propto (r^{\circ})^{-4St^{2/5}}, \quad A_1 = \sqrt{5}$$

Как видно из (4.7), Γ имеет особенность в начале координат при малых числах Стокса.

Далее рассмотрим решение для инерционного интервала времени релаксации частиц ($1 \ll St \ll T_L^\circ$) в инерционном пространственном интервале ($1 \ll r^\circ \ll L^\circ$, где $L^\circ = L/\eta$). С целью расширения временного и пространственного инерционных интервалов рассматривается решение в предельном случае больших чисел Рейнольдса ($Re_\lambda \rightarrow \infty$), когда T_L° и L° стремятся к бесконечности. В такой постановке задача (4.1)–(4.3) с учетом (2.12) трансформируется в

$$\frac{2(\sigma_{pll} - \sigma_{pnn})}{\rho} + \frac{d\sigma_{pll}}{d\rho} + (\sigma_{pll} + g_r \sigma_{ll}) \frac{d \ln \gamma}{d\rho} = 0$$

$$\frac{d}{d\rho} \left[\gamma (\sigma_{pll} + g_r \sigma_{ll}) \frac{d\sigma_{pll}}{d\rho} \right] + 2\gamma (f_r \sigma_{ll} - \sigma_{pll}) = 0$$

$$\frac{1}{3\rho^2} \left\{ \frac{d}{d\rho} \left[\rho^2 \gamma (\sigma_{pll} + g_r \sigma_{ll}) \frac{d\sigma_{pnn}}{d\rho} \right] + 2 \frac{d}{d\rho} [\rho \gamma (\sigma_{pnn} + g_r \sigma_{nn}) (\sigma_{pll} - \sigma_{pnn})] \right\} +$$

$$+ 2\gamma (f_r \sigma_{nn} - \sigma_{pnn}) = 0$$

$$\frac{d\sigma_{pll}}{d\rho} = \frac{d\sigma_{pnn}}{d\rho} = 0, \quad \rho = 0; \quad \sigma_{pll} = f_r \sigma_{ll}, \quad \sigma_{pnn} = f_r \sigma_{nn}, \quad \gamma = 1, \quad \rho \rightarrow \infty \quad (4.8)$$

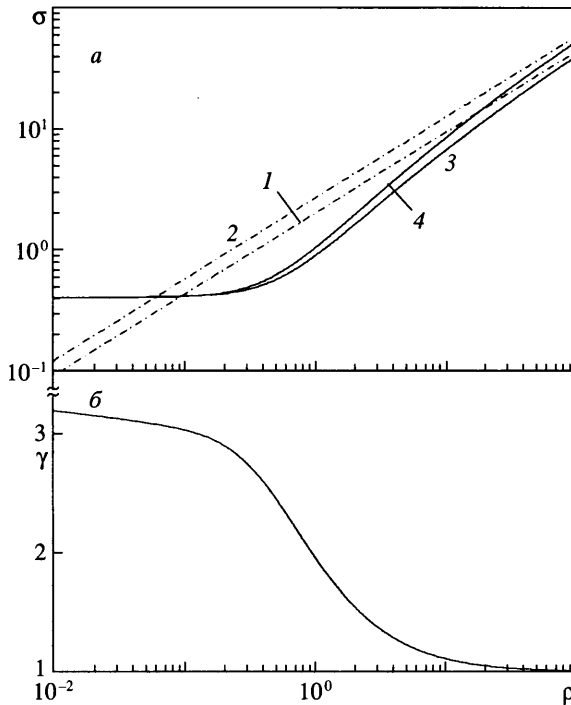
$$\sigma_{ll} = C\rho^{2/3}, \quad \sigma_{nn} = \frac{4}{3}C\rho^{2/3}, \quad f_r = \frac{A_2\rho^{2/3}}{1 + A_2\rho^{2/3}}, \quad g_r = \frac{A_2^2\rho^{4/3}}{1 + A_2\rho^{2/3}}$$

$$\rho = \frac{r^\circ}{St^{3/2}}, \quad \sigma_{pll} = \frac{S_{pll}^\circ}{St}, \quad \sigma_{pnn} = \frac{S_{pnn}^\circ}{St}, \quad \sigma_{ll} = \frac{S_{ll}^\circ}{St}, \quad \gamma = \Gamma$$

Фигура 1 демонстрирует структурные функции сплошной среды и частиц, а также радиальную функцию распределения, получающиеся в результате решения (4.8). Видно, что при больших расстояниях ($\rho \gg 1$), когда диффузионный механизм переноса пульсаций скорости не играет существенной роли, продольная и поперечная структурные функции частиц меньше, чем соответствующие структурные функции сплошной среды, и приближенно есть $\sigma_{pll} = f_r \sigma_{ll}$, $\sigma_{pnn} = f_r \sigma_{nn}$. Однако при малых расстояниях структурные функции частиц превышают структурные функции сплошной среды. Этот эффект обусловлен диффузионным механизмом переноса пульсаций скорости и реализуется только для достаточно инерционных частиц. Из фиг. 1 также следует, что с уменьшением ρ значения σ_{pll} и σ_{pnn} приближаются друг к другу, а радиальная функция распределения монотонно стремится к некоторому пределу. В начале координат получены значения

$$\sigma_{pll}(0) = \sigma_{pnn}(0) = 0.37, \quad \gamma(0) = 3.13 \quad (4.9)$$

В случае очень инерционных частиц, когда время их динамической релаксации значительно превышает интегральный лагранжев масштаб турбулентности ($St > T_L^\circ$), задача имеет простое асимптотическое решение. Благодаря интенсивному диффузионному переносу продольная и поперечная структурные функции частиц совпадают и



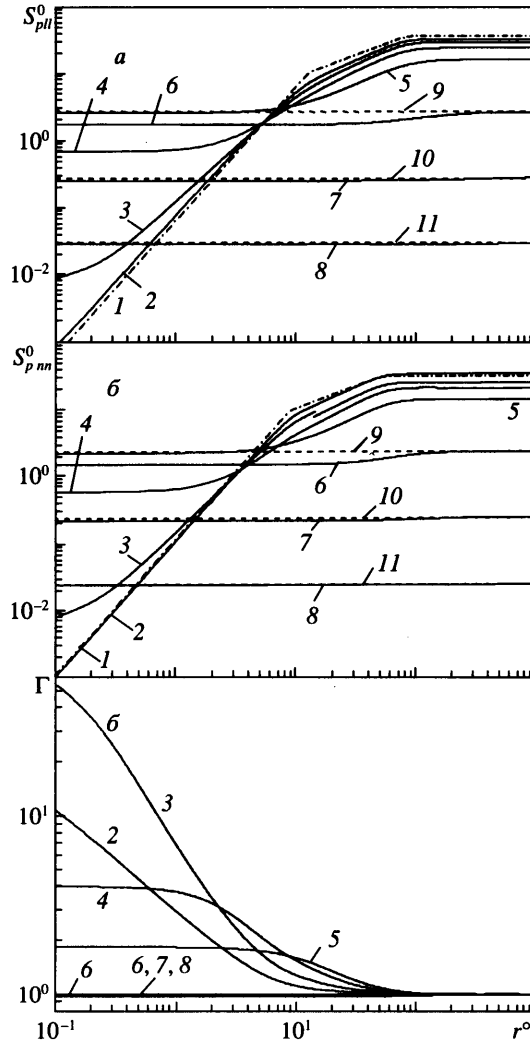
Фиг. 1. Структурные функции (а) и радиальная функция распределения (б) инерционных частиц в инерционном пространственном интервале при $Re_\lambda \rightarrow \infty$: 1 – σ_{ll} , 2 – σ_{nn} , 3 – σ_{pll} , 4 – σ_{pnn}

становятся однородными, а радиальная функция распределения практически не отличается от единицы

$$S_{pll}^\circ = S_{pnn}^\circ = \frac{2T_L^\circ Re_\lambda}{15^{1/2} St}, \quad \Gamma = 1 \tag{4.10}$$

Структурные функции и радиальная функция распределения частиц, полученные в результате решения задачи (4.1)–(4.5) при фиксированном числе Рейнольдса и разных числах Стокса, представлены на фиг. 2. Видно, что по мере возрастания St структурные функции частиц все больше отклоняются от структурных функций сплошной среды (кривая 1) и приближаются к асимптотическим однородным распределениям (4.10) для высокоинерционных частиц (9–11). Хотя $S_{ll}^\circ = S_{nn}^\circ = 0$ при $r^\circ = 0$, структурные функции достаточно инерционных частиц благодаря диффузионному переносу отличаются от нуля в начале координат. Из фиг. 2, б также видно, что радиальная функция распределения малоинерционных частиц имеет особенность при $r^\circ = 0$. С возрастанием инерционности частиц эта особенность в начале координат исчезает и $\Gamma \rightarrow 1$.

Отношение между поперечной и продольной структурными функциями частиц в зависимости от числа Стокса показано на фиг. 3. С целью сравнения с данными DNS [5] результаты расчета представлены при $r^\circ = 1$. Для сплошной среды в соответствии с (1.7) $S_{nn}^\circ / S_{ll}^\circ = 2$. Расчетные значения падают и стремятся к единице с ростом St , однако не так быстро, как данные DNS.

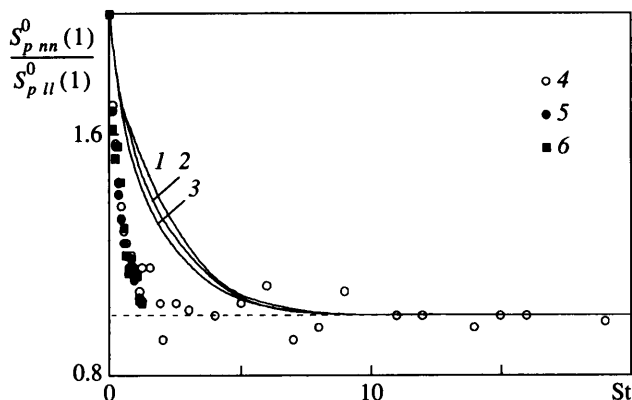


Фиг. 2. Продольная (а) и поперечная (б) структурные функции и радиальная функция распределения (в) при $Re_\lambda = 75$: 1 – $St = 0$; 2 – 1; 3 – 2; 4 – 4; 5 – 10; 6, 9 – 100; 7, 10 – 1000; 8, 11 – 10000

В предположении, что относительная скорость пары частиц распределена по нормальному закону, соотношение между осредненной по модулю относительной скоростью и продольной структурной функцией имеет вид

$$\langle |w_r| \rangle = \left(\frac{2}{\pi} \langle w_r^2 \rangle \right)^{1/2} = \left(\frac{2}{\pi} S_{p||} \right)^{1/2} \quad (4.11)$$

Как показано в [5], форма ФПВ относительной скорости зависит от инерционности частиц и только при больших числах Стокса является гауссовой. Тем не менее даже для безынерционных частиц величина $\langle |w_r| \rangle / \langle w_r^2 \rangle^{1/2}$, согласно DNS [22], равняется 0.77,



Фиг. 3. Отношение между поперечной и продольной структурными функциями при $r^\circ = 1$: 1–3 – расчеты; 4–6 – [5]; 1, 4 – $Re_\lambda = 24$; 2, 5 – 45; 3, 6 – 75

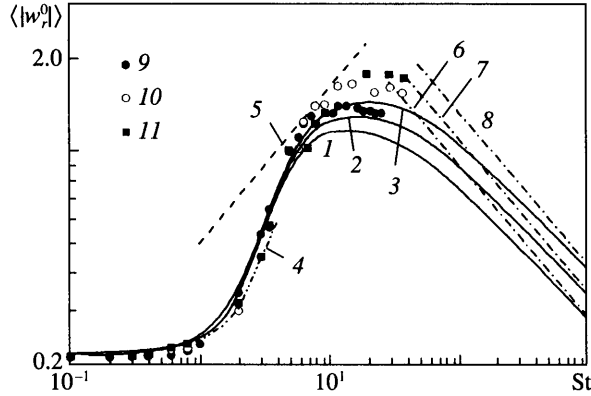
что достаточно близко к значению $\sqrt{2/\pi} = 0.798$, предсказываемому нормальным распределением. Поэтому далее величина $\langle |w_r| \rangle$ определяется на основе соотношения (4.11).

Сравнение модуля относительной радиальной скорости, определенной из $S_{p ll}^\circ$ при помощи (4.11), с результатами DNS [5] и влияние инерционности частиц на $\langle |w_r^\circ| \rangle$ в широком диапазоне изменения числа Стокса демонстрируются на фиг. 4. Как видно, вначале $\langle |w_r^\circ| \rangle$ возрастает с увеличением инерционности частиц и соответствует решению (4.7) при $St < 1$ (кривая 4). Полученные результаты свидетельствуют о наличии максимума в зависимости $\langle |w_r^\circ| \rangle$ от St . Этот максимум отражает увеличение $\langle |w_r^\circ| \rangle$ с ростом времени релаксации, поскольку движение частиц становится менее коррелированным. Последующее снижение $\langle |w_r^\circ| \rangle$ с ростом St связано с уменьшением интенсивности пульсаций скоростей частиц, так как они становятся более инерционными и хуже вовлекаются в турбулентное движение сплошной среды. С увеличением Re_λ результаты расчета $\langle |w_r^\circ| \rangle$ приближаются к асимптотическому соотношению (кривая 5 на фиг. 4), которое следует из (4.8) и (4.9) для инерционного интервала времени релаксации частиц

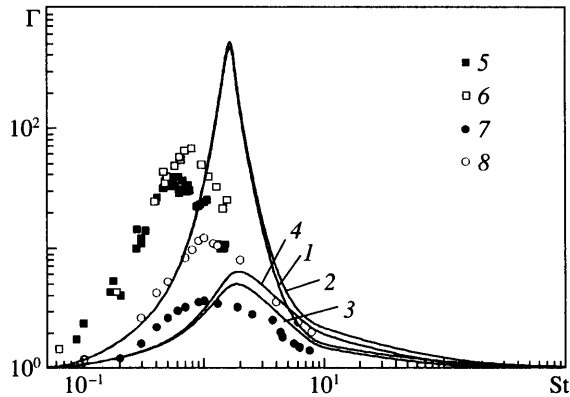
$$\langle |w_r^\circ| \rangle = \left(\frac{2\sigma_{p ll}(0)}{\pi} \right)^{1/2} St^{1/2}$$

В случае высокоинерционных частиц $\langle |w_r^\circ| \rangle$ асимптотически стремится с ростом St к соотношениям (6–8 на фиг. 4), следующим из (4.10). Отметим, что в случае относительно небольших частиц ($St < 10$) влиянием числа Рейнольдса на $\langle |w_r^\circ| \rangle$ можно пренебречь и в соответствии с DNS результаты расчета относительных скоростей хорошо обобщаются при помощи колмогоровских микромасштабов. Напротив, относительные скорости высокоинерционных частиц управляются макромасштабами турбулентности.

Результаты расчета радиальной функции распределения в зависимости от расстояния между частицами и числа Рейнольдса вместе с данными прямого численного моделирования [5–7] представлены на фиг. 5–7. В предельных случаях мало- и высокоинерционных частиц поле концентрации статистически однородно, и, следовательно, $\Gamma = 1$. В соответствии с данными прямого численного моделирования, радиальная функция распределения проходит через максимум по мере возрастания времени ре-

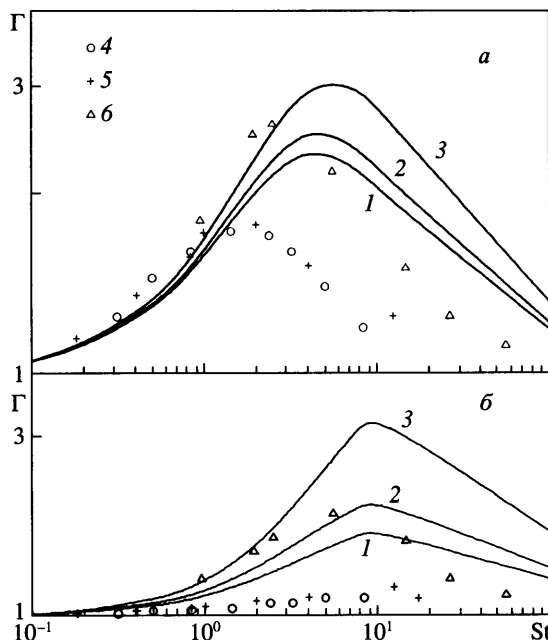


Фиг. 4. Влияние числа Стокса на абсолютную относительную радиальную скорость: 1–3 – расчеты; 9–11 – [5]; 1, 6 – $Re_\lambda = 45$; 2, 7 – 58; 3, 8 – 75

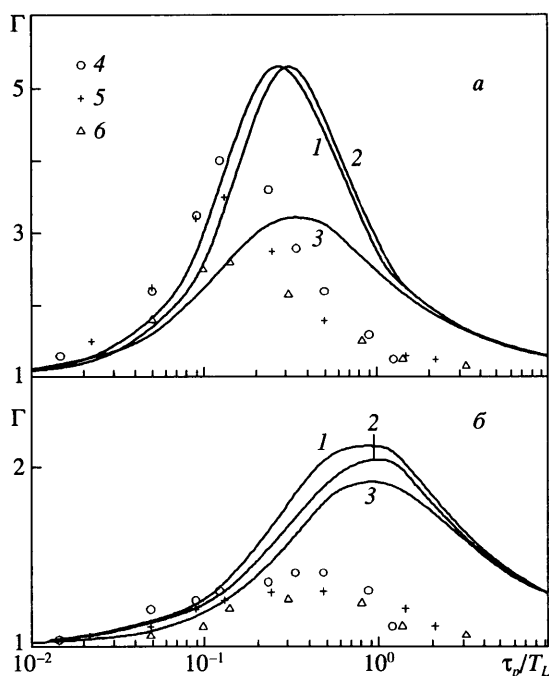


Фиг. 5. Влияние числа Стокса на радиальную функцию распределения при малых расстояниях между частицами: 1–4 – расчеты; 5, 6 – [6]; 7, 8 – [5]; 1, 5 – $r^0 = 0.025$, $Re_\lambda = 37$; 2, 6 – 0.025, 82; 3, 7 – 1, 24; 4, 8 – 1, 75

лаксации частиц. Как видно из фиг. 5, положение максимума при малых расстояниях между частицами хорошо масштабируется колмогоровскими микромасштабами, что свидетельствует об определяющей роли мелкомасштабных турбулентных структур в формировании явления кластеризации частиц. Из фиг. 5–7 следует, что при увеличении расстояния между частицами пик Γ падает и сдвигается по направлению к большим значениям времени релаксации частиц. Как было показано в [7], при $St \gg 1$ частицы также обладают свойством накапливаться в пространстве. Однако поскольку движение высокоинерционных частиц управляется крупномасштабными турбулентными структурами, для описания эффекта аккумуляции крупных частиц лучше использовать интегральные масштабы турбулентности, чем колмогоровские микромасштабы. Этот вывод наглядно подтверждается сравнением фиг. 6 и 7. Таким образом, полученные результаты в соответствии с данными прямого численного моделирования показывают, что явление кластеризации наиболее заметно проявляется для частиц, время релаксации которых близко к колмогоровскому временному мас-



Фиг. 6. Влияние числа Стокса и расстояния между частицами на радиальную функцию распределения при обезразмеривании с помощью колмогоровских микромасштабов: 1-3 – расчеты; 4-6 – [7]; а - $r^0 = 6$; б - 24; 1, 4 - $Re_\lambda = 53$; 2, 5 - 69; 3, 6 - 134



Фиг. 7. Влияние числа Стокса и расстояния между частицами на радиальную функцию распределения при обезразмеривании с помощью интегральных масштабов: 1-3 – расчеты; 4-6 – [7]; а - $r/L = 0.05$; б - 0.3; 1, 4 - $Re_\lambda = 53$; 2, 5 - 69; 3, 6 - 134

штабу, однако в более слабом виде обнаруживается и для высокоинерционных частиц на больших расстояниях между ними.

Закключение. Развита двухточечная кинетическая модель для описания дисперсии и кластеризации тяжелых частиц в изотропной однородной турбулентности. Предложенная модель основана на кинетическом уравнении для ФПВ распределения относительной скорости пары частиц. Получена замкнутая система уравнений для радиальной функции распределения и структурных функции второго порядка пульсаций скоростей частиц. Проведен анализ явления кластеризации в стационарной суспензии, полное число частиц в которой не изменяется во времени.

На основе сопоставления с данными прямого численного моделирования можно сделать вывод, что предложенная двухточечная кинетическая модель описывает основные особенности распределений относительных скоростей и концентраций пары частиц в изотропной однородной турбулентности. Модель справедлива во всем диапазоне изменения чисел Стокса и правильно предсказывает эффект аккумуляции частиц в зависимости от их инерционности.

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда INTAS (проект 2000-00460) и Российского фонда фундаментальных исследований (№ 02-02-16520).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Reeks M.W. The transport of discrete particles in inhomogeneous turbulence // J. Aerosol Sci. 1983. V. 14. № 6. P. 729–739.
2. Squires K.D., Eaton J.K. Preferential concentration of particles by turbulence // Phys. Fluids A. 1991. V. 3. № 5. P. 1169–1178.
3. Wang L.-P., Maxey R.M. Settling velocity and concentration distribution of heavy particles in homogeneous isotropic turbulence // J. Fluid Mech. 1993. V. 256. P. 27–68.
4. Sundaram S., Collins L.R. Collision statistics in an isotropic particle-laden turbulent suspension. Pt 1. Direct numerical simulations // J. Fluid Mech. 1997. V. 335. P. 75–109.
5. Wang L.-P., Wexler A.S., Zhou Y. Statistical mechanical description and modelling of turbulent collision of inertial particles // J. Fluid Mech. 2000. V. 415. P. 117–153.
6. Reade W.C., Collins L.R. Effect of preferential concentration on turbulent collision rates // Phys. Fluids. 2000 V. 12. № 10. P. 2530–2540.
7. Février P., Simonin O., Legendre D. Particle dispersion and preferential concentration dependence on turbulent Reynolds number from direct and large-eddy simulations of isotropic homogeneous turbulence // Proc. 4th Intern. Conf. on Multiphase Flow. New Orleans, 2001. P. 1–8.
8. Kostinski A.B., Shaw R.A. Scale-dependent droplet clustering in turbulent clouds // J. Fluid Mech. 2001. V. 434. P. 389–398.
9. Деревич И.В., Зайчик Л.И. Осаждение частиц из турбулентного потока // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 5. С. 96–104.
10. Деревич И.В., Зайчик Л.И. Уравнение для плотности вероятности скорости и температуры частиц в турбулентном потоке, моделируемом гауссовым случайным полем // ПИММ. 1990. Т. 57. Вып. 5. С. 767–774.
11. Zaichik L.I. A statistical model of particle transport and heat transfer in turbulent shear flows // Phys. Fluids. 1999. V. 11. № 6. P. 1521–1534.
12. Derevich I.V. Statistical modelling of mass transfer in turbulent two-phase dispersed flows. 1. Model development // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2000. V. 43. № 19. P. 3709–3723.
13. Lundgren T.S. Turbulent pair dispersion and scalar diffusion // J. Fluid Mech. 1981. V. 111. P. 27–57.
14. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Ч. 2. М.: Наука, 1967. 720 с.
15. Girimaji S.S., Pope S.B. A diffusion model for velocity gradients in turbulence // Phys. Fluids A. 1990. V. 2. № 2. P. 242–256.
16. Brunk B.K., Koch D.L., Lion L.W. Turbulent coagulation of colloidal particles // J. Fluid Mech. 1998. V. 364. P. 81–113.
17. Brunk B.K., Koch D.L., Lion L.W. Hydrodynamic pair diffusion in isotropic random velocity fields with application to turbulent coagulation // Phys. Fluids. 1997. V. 9. № 9. P. 2670–2691.

18. *Sreenivasan K.R.* On the universality of the Kolmogorov constant // *Phys. Fluids*. 1995. V. 7. № 11. P. 2778–2784.
19. *Yeung P.K., Pope S.B.* Lagrangian statistics from direct numerical simulations of isotropic turbulence // *J. Fluid Mech.* 1989. V. 207. P. 531–586.
20. *Кляцкин В.И.* Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. М.: Наука, 1980. 336 с.
21. *Кузнецов В.П., Сабельников В.А.* Турбулентность и горение. М.: Наука, 1986. 288 с.
22. *Wang L.-P., Wexler A.S., Zhou Y.* Statistical mechanical descriptions of turbulent coagulation // *Phys. Fluids*. 1998. V. 10. № 10. P. 2647–2651.
23. *Reeks M.W.* On a kinetic equation for the transport of particles in turbulent flows // *Phys. Fluids A*. 1991. V. 3. № 3. P. 446–456.
24. *Hanjalic K., Launder B. E.* A Reynolds stress model of turbulence and its application to thin shear flows // *J. Fluid Mech.* 1972. V. 52. Pt 4. P. 609–638.
25. *Wang Q., Squires K.D., Simonin O.* Large eddy simulation of turbulent gas-solid flows in a vertical channel and evaluation of second-order models // *Intern. J. Heat Fluid Flow*. 1998. V. 19. № 5. P. 505–511.

Москва
E-mail: zaichik@cityline.ru

Поступила в редакцию
27.V.2002