

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭВОЛЮЦИИ ИНТЕНСИВНЫХ КОНВЕКТИВНЫХ ВИХРЕЙ ТАЙФУННОГО ТИПА ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ

Рассмотрена задача о зарождении вихря во вращающейся кювете при локальном подогреве снизу. Представлены результаты расчета режима формирования интенсивного вихря из крупномасштабной адвективной ячейки. Полученный спиральный вихрь совершал циклоническое вращение, на порядок превосходившее скорость вращения кюветы, и обладал характерными чертами тайфунов в земной атмосфере. Проведенное сравнение результатов с данными аналогичного лабораторного эксперимента показало их хорошее совпадение. Дополнительно исследованы стадии перестройки течений в вихре после отключения нагрева. Показано, что развитие неустойчивости Рэлея–Тейлора в этом случае способствует формированию протяженных спиральных рукавов.

Ключевые слова: численное моделирование, динамика вихрей, тайфунные вихри.

Вихревое движение является наиболее распространенной формой перемещения жидких и газообразных масс в природных условиях и технических системах, что объясняет интерес к исследованию вихревых структур. Особое значение при этом имеет формирование вихрей в закручиваемых конвективных потоках. Именно такие условия являются определяющими при образовании тайфунов, торнадо, циклонов в земной атмосфере, а также вихревых потоков во многих энергопроизводящих технических агрегатах. Динамика жидкости во вращающихся средах, подогреваемых снизу, исследовалась теоретически, экспериментально и методами численного моделирования [1–3]. Однако в большинстве исследований основное внимание уделялось вопросам конвективной устойчивости и общим закономерностям формирования восходящих и нисходящих потоков.

В то же время вихри, развивающиеся над нагретыми поверхностями во вращающихся системах, обладают во многих случаях достаточно нетривиальной структурой, качественно отличной от ожидаемой, исходя из упрощенного рассмотрения воздействия силы Кориолиса на горизонтальные потоки жидкости, вызванные разностью температур между нагревателем и окружающим пространством. Механизмы образования такого рода вихрей, к которым относятся, в частности, и тропические циклоны или тайфуны, до сих пор вызывает дискуссии. Так имеется достаточно большое количество математических моделей, описывающих динамику и структуру тайфунов [4]. Однако они не дают объяснения механизму их зарождения и усиления. В [5, 6] теоретически обоснована гипотеза об усилении вихрей тайфунного типа за счет мелкомасштабной спиральной турбулентности. Однако эта гипотеза до сих пор не получила прямого экспериментального подтверждения. Вихревые структуры, обладающие характерными признаками тропических циклонов, были получены в лабораторных условиях [7, 8]. Измеренные при этом поля скоростей и температур в конвективной ячейке и возникающем циклоническом вихре являются ценным материалом для разработки на их основе компьютерных экспериментов, направленных на детальный анализ эволюции крупномасштабных вихрей в конвективных потоках. Однако в [7, 8] анализ вихревой динамики проведен только на качественном уровне.

В настоящей работе приводятся результаты численных экспериментов по формированию и эволюции вихрей тайфунного типа в постановке, воспроизводящей основные условия физических экспериментов, описанных в [7, 8].

1. Постановка задачи. Рассматриваются конвективные течения жидкости или газа в замкнутой прямоугольной полости, вызванные неоднородностью температуры, причем отклонения плотности от некоторого среднего значения предполагаются настолько малыми, что ими можно пренебречь во всех уравнениях гидродинамики, за исключением уравнения для импульса, в котором зависимость плотности от температуры учитывается при описании вклада от эффекта плавучести. Такое приближение часто используется при решении задач тепловой конвекции и традиционно называется приближением Буссинеска. Кроме того, ограничимся случаем, когда вертикальные скорости жидкости малы по сравнению с горизонтальными.

В выбранном приближении уравнения динамики несжимаемой жидкости во вращающейся системе в декартовых координатах (x, y, z) имеют вид

$$\frac{\partial U}{\partial t} + LU - 2\Omega V = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \Delta U \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + LV + 2\Omega U = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \Delta V \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + LT = \chi \Delta T \quad (1.5)$$

$$\rho = \rho_0(1 - \alpha(T - T_0)) \quad (1.6)$$

$$L\sigma = U \frac{\partial \sigma}{\partial x} + V \frac{\partial \sigma}{\partial y} + W \frac{\partial \sigma}{\partial z}$$

$$\Delta \sigma = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2}$$

Здесь U, V, W – компоненты скорости в направлении x, y, z соответственно; P, ρ, T – давление, плотность и температура; ν, χ – коэффициенты и температуропроводности; Ω – угловая скорость вращения системы, g – ускорение силы тяжести, α – коэффициент теплового расширения жидкости, ρ_0, T_0 – плотность и температура жидкости при комнатной температуре; ось z направлена вверх.

Использованные в принятой модели упрощения исключают из рассмотрения определенные виды волновых движений. Приближение Буссинеска полностью отфильтровывает звуковые волны и практически не искажает все остальные движения. Гидростатическое приближение (1.3) не учитывает гироскопические волны, но мало искажает низкочастотные колебания. Условие “жесткой крышки” на поверхности полностью исключает поверхностные гравитационные волны и практически не искажает все остальные движения [9].

Рассмотрим плоский слой жидкости толщины H , находящийся в прямоугольной кювете с горизонтальными размерами $d_1 \times d_1$, вращающейся с угловой скоростью Ω . На дне кюветы по центру расположен круглый нагревательный элемент диаметром $d_2 < d_1$. Температура нагревателя поддерживается постоянной и отличается от температуры воздуха на величину ΔT . На элемент вращающейся жидкости действуют сила

Архимеда, определяющая эффект плавучести, сила Кориолиса и градиент давления, обусловленный перепадом температур. Центробежной силой пренебрежем в силу ее малости в выбранном диапазоне параметров. Через боковые стенки кюветы потоки тепла отсутствуют. На поверхности жидкости задается градиент температуры $(\partial T/\partial z)|_{z=0}$ вычисленный аналитически по данным лабораторного эксперимента [7]. На боковых и нижней стенках выполняются условия вязкого прилипания для касательной составляющей импульса, на верхней границе задается условие свободного скольжения. В начальный момент времени $t = 0$ жидкость неподвижна, а температура всюду равна T_0 . В такой постановке эта задача воспроизводит условия лабораторного эксперимента [7], который в данном случае является дополнительным тестом для предложенной математической модели и численной методики.

Безразмерными параметрами, определяющими в данной постановке вид конвективного течения, являются числа Грассгофа, Рейнольдса и Прандтля: $G = g\alpha\Delta TH^3/\nu^2$, $Re = 2\Omega H^2/\nu$, $Pr = \nu/\chi$. Параметры численного эксперимента выбирались близкими к заданным в [7]: $d_1 = 30$ см, $d_2 = 10.5$ см, $H = 3$ см, $g = 980$ см/с², $\alpha = 7 \cdot 10^{-4}$ (°C)⁻¹, $\nu = 10^{-1}$ см²/с, $\chi = 10^{-2}$ см²/с, $\Delta T = 35^\circ\text{C}$, $\Omega = 5 \cdot 10^{-2}$ с⁻¹, $T_0 = 20^\circ\text{C}$, $\rho_0 = 0.87$ г/см³.

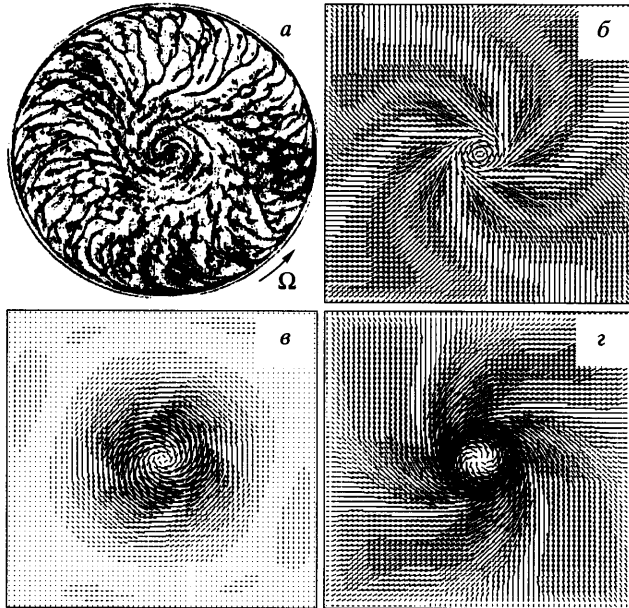
Числа Грассгофа, Рейнольдса и Прандтля в этом случае $G = 64827$, $Re = 9$, $Pr = 10$. Количество ячеек счетной области составляло 200 по каждому из двух горизонтальных направлений и 30 по вертикали.

2. Численный алгоритм. Для решения системы уравнений (1.1)–(1.6) использован численный алгоритм Брайана [10] с улучшенными (за счет уточненной аппроксимации потоков через грани ячеек [11]) дисперсионными свойствами. Нахождение поля скоростей производилось в два этапа: сначала с помощью функции полных потоков вычислялась интегральная по вертикальной оси z циркуляция. Затем определялись отклонения скорости от средних значений. Этот прием позволил одинаково корректно описывать как процессы быстрой взаимной подстройки полей скоростей и давлений, так и медленную эволюцию осредненного потока.

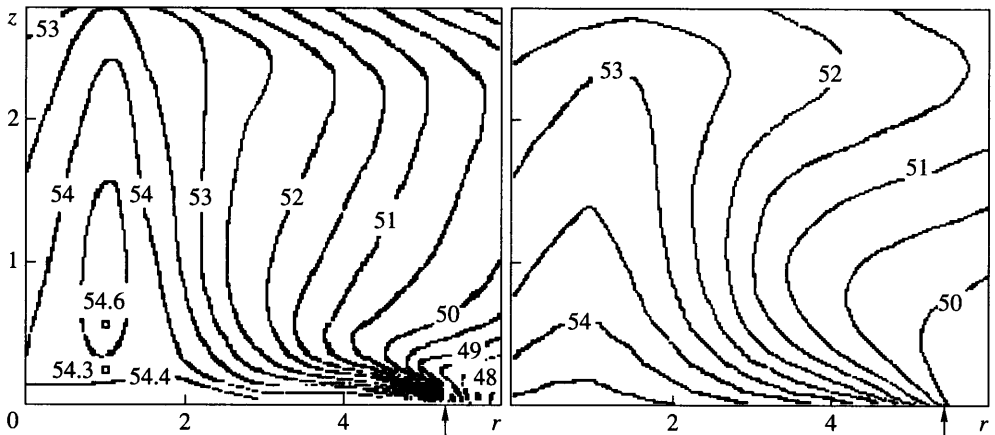
3. Результаты моделирования. Полученная в численном эксперименте картина конвективных течений, возникающая во вращающейся кювете, качественно и количественно совпадает с данными из [7, 8]. Поля скоростей стационарного вихря на различных горизонтальных уровнях представлены на фиг. 1, а на фиг. 2 приведено сравнение для полей температур.

Как в физическом, так и в численном экспериментах наблюдается опускание жидкости в центре вихря, характерное для тропических циклонов и известное как “глаза тайфуна”. Поле течений вблизи глаза тайфуна характеризуется большой кривизной линий тока. Конвергентное течение на нижнем горизонте происходит по сходящимся от границ области к центру спиральям. Это движение характеризуется преобладающими радиальными и азимутальными скоростями. Напротив, вблизи центра движение осуществляется по восходящим винтовым траекториям, в которых основную роль играют азимутальная и вертикальная компоненты скорости.

В численных расчетах использованы несколько завышенные, по сравнению с физическим экспериментом, значения вязкости и температуропроводности используемой жидкости (трансформаторное масло). Этим, а также наличием присущей конечно-разностным схемам численной вязкости объясняется меньшее по сравнению с экспериментальным значение горизонтального градиента температур в ядре вихря (фиг. 2). Тем не менее хорошее совпадение результатов, полученное даже на достаточно грубой для данной задачи сетке ($200 \times 200 \times 30$ ячеек по осям x , y , z , соответственно), позволяет считать, что выбранный алгоритм и разработанные на его основе программные средства адекватно описывают достаточно сложную структуру вихревых течений, специфичную только для вполне определенного и весьма узкого интервала энергетических параметров [7, 8].

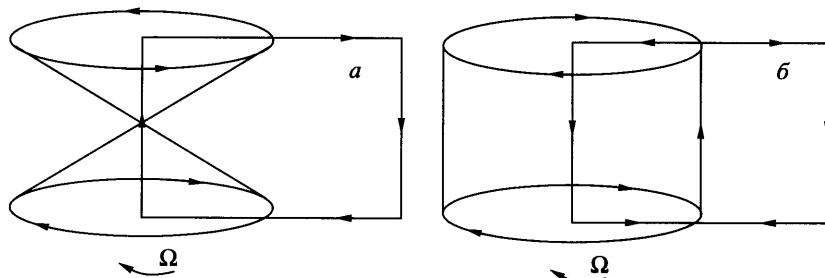


Фиг. 1. Визуализация лабораторного вихря [7] путем добавления алюминиевой пыли (а); поле горизонтальных скоростей в численном эксперименте для аналогичного вихря на различных глубинах: верхний, средний и нижний горизонтальные уровни (б–г)



Фиг. 2. Изолинии температуры в вертикальном сечении вихря: а – лабораторный эксперимент [7]; б – численный расчет; стрелками указана граница нагревательного элемента (r и z в см)

Привлечение численного моделирования к интерпретации экспериментальных данных позволило более подробно исследовать структуру циклонического вихря. В общем случае после включения подогрева, вследствие радиального перепада температур возникает крупномасштабное адвективное движение: осредненный подъем жидкости над нагревателем, дивергентное движение в верхних слоях с естественной теплоотдачей, опускание жидкости вблизи стенок кюветы и конвергентное течение в



Фиг. 3. Схема течений жидкости в ядре вихря для случая докритических (а) параметров G , Re ; надкритических (б)

нижних слоях к центру полости. При вращении кюветы действие силы Кориолиса на радиальную компоненту скорости, направленную к центру, в нижних слоях жидкости приводит к циклоническому закручиванию. Напротив, поток, который течет от центра к периферии, испытывает антициклоническое закручивание против направления вращения кюветы (фиг. 3, а).

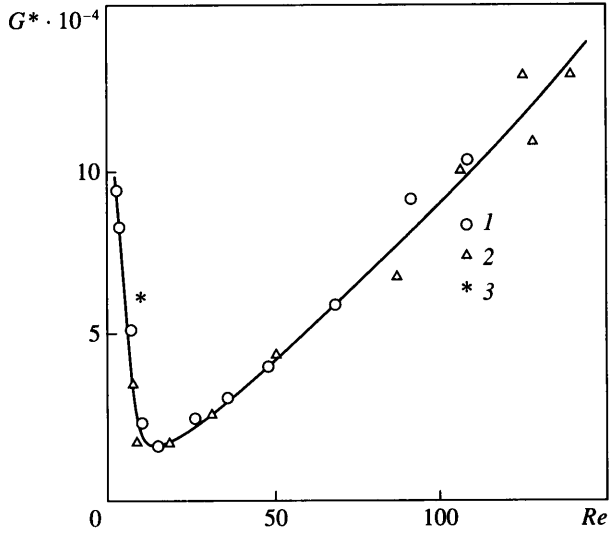
Такая ситуация, однако, наблюдается до тех пор, пока число Грассгофа G (при данном числе Рейнольдса) не превышает некоторого критического значения G^* . Когда $G > G^*$ над нагревателем по всей глубине жидкости зарождается спиральный циклонический вихрь, поскольку в этом случае интенсивность всплывающих термиком, переносящих с собой циклонический момент вращения импульса, оказывается достаточной для подавления антициклонического вихря на верхних горизонтах (фиг. 3, б). Сформировавшееся состояние определяется теперь структурой вложенных течений с циклоническим (по направлению вращения кюветы) знаком завихренности по всей глубине жидкости, находящейся вблизи нагревателя, а антициклонический поток вытесняется к периферии области. Зависимость критического числа Грассгофа G^* от числа Re в данной постановке задачи определена в [8] и приведена на фиг. 4.

Для анализа циклонического вихря и лучшей наглядности результатов удобно рассмотреть среднюю циркуляцию азимутальной составляющей скорости $\Gamma(r)$, в зависимости от r на различных горизонтальных уровнях. При этом циркуляция скорости определялась выражением

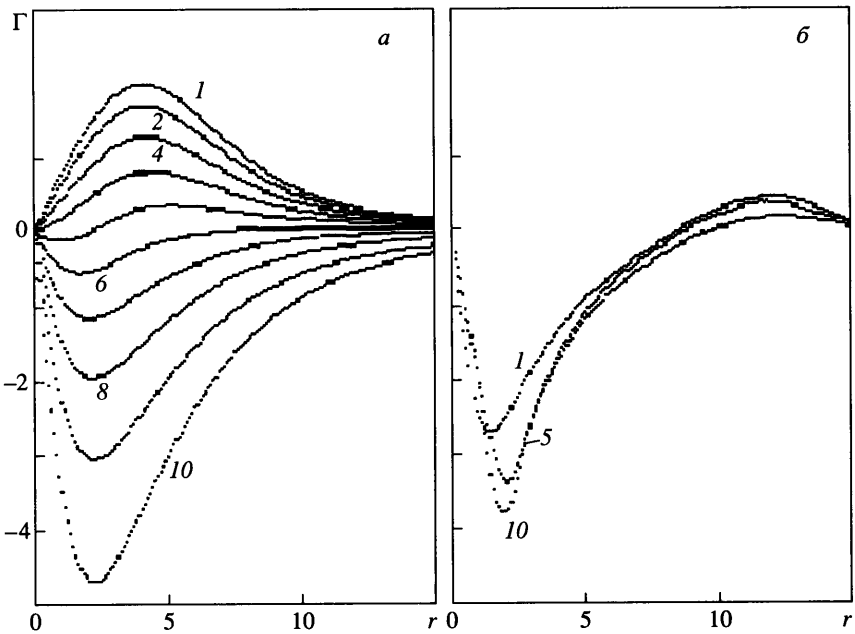
$$\Gamma(r) = \oint (\mathbf{V} \, dr)$$

На фиг. 5 показано, как меняется характер циркуляции азимутальной компоненты скорости при смене вихревых режимов с ростом числа Грассгофа. Отрицательным значениям циркуляции соответствует циклоническое направление вращения в вихре, положительным – антициклоническое. Видно, что возникновение циклонического вихря качественно перестраивает поле скоростей в верхних слоях жидкости, формируя сложную структуру вложенных течений, при которой в центральной области жидкость вращается по всей глубине в циклоническом, а на периферии – в антициклоническом направлении.

4. Эволюция тайфунного вихря после выключения теплового потока. Физические механизмы, определяющие динамику трехмерных конвективных вихрей, наиболее отчетливо проявляются на переходных стадиях, часто сопровождающихся потерей устойчивости и качественной перестройкой течений. В эксперименте исследован режим, при котором после формирования стационарного тайфунного вихря нагрев центральной области дна кюветы прекращался. Анализ этой ситуации важен для понимания эволюции земных тайфунов после выхода на сушу, когда прекращается их энерге-



Фиг. 4. Зависимость критического числа Грасгофа G^* от числа Рейнольдса Re , по данным [8]; 1 – трансформаторное масло; 2 – смесь масла и керосина в пропорции 2:1; 3 – параметры численного эксперимента



Фиг. 5. Циркуляция азимутальной скорости в вихре при докритических (а) и надкритических (б) значениях параметров на различных горизонтальных уровнях с шагом 0.3 см от поверхности 1 до дна 10; положительные значения Γ – антициклоническое направление вращения, отрицательные – циклоническое направление (Γ в $\text{см}^2/\text{с}$, r в см)

тическая подпитка от подстилающей поверхности океана. Хотя аналогия – далеко не полная в силу пренебрежения в модели фазовыми переходами, недостаточно точным воспроизведением в численном расчете приповерхностного пограничного слоя, тем не менее эксперимент позволяет выделить ряд гидродинамических эффектов, сопровождающих эволюцию интенсивных конвективных вихрей. Пусть после того, как сформировалась стационарная структура тайфунного вихря, температура нагревателя на дне кюветы быстро понижается и на нижней границе вводится условие адиабатичности. При этом теплоотвод через верхнюю границу сохраняется. Изменение поля вертикальных скоростей со временем, соответствующее этому случаю, представлено на фиг. 6.

Стационарный тайфунный вихрь, поддерживаемый потоком энергии от нагретой центральной области, представлен на фиг. 6, а. На границе этой области градиент радиальной составляющей скорости потока холодной жидкости, направленной к центру, должен быть максимален. При этом в цилиндрических координатах r – z можно записать

$$\frac{\partial(rU_r)}{\partial r} < 0$$

Тогда из уравнения неразрывности следует

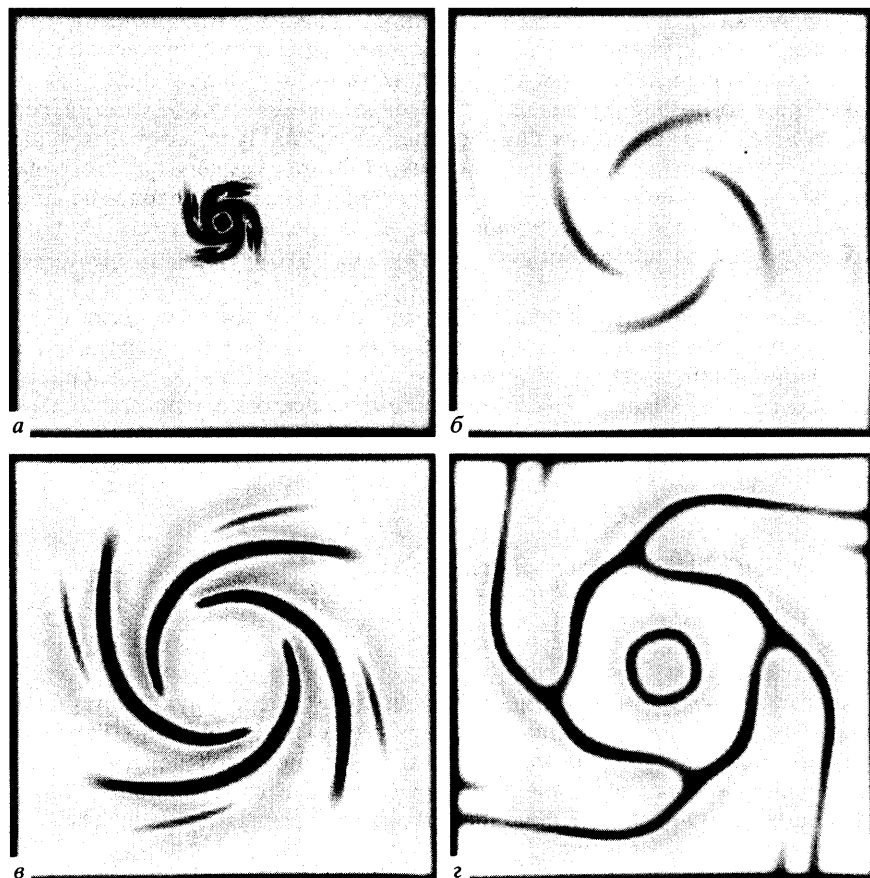
$$\frac{\partial U_z}{\partial z} = -\frac{1}{r} \frac{\partial(rU_r)}{\partial r} > 0$$

Это определяет область подъема, окружающую центральную зону. У тайфунов этой области соответствует так называемая “стена глаза тайфуна”. Радиус области подъема определяется балансом между силой Кориолиса и градиентом давления. После отключения нагрева локальное равновесие нарушается, а эволюция поля течений обусловлена действием силы Кориолиса, градиента давления и эффектов диссипации.

На первоначальном этапе перестройки конвективных потоков градиент давления, обусловленный разностью температур, резко падает, что приводит в свою очередь к уменьшению интенсивности вертикальных течений в центре вихря. Одновременно с этим происходит быстрое выравнивание скоростей в горизонтальных плоскостях за счет сил вязкого трения, и возникает квазидвумерная картина движения с минимальной интенсивностью вертикальных скоростей во всей области. В дальнейшем однако, благодаря теплоотводу через верхнюю границу области, происходит остывание верхних слоев, не получающих теперь дополнительной энергии из центральной, более нагретой области (фиг. 6, б), что в конечном итоге приводит к развитию неустойчивости Рэлея–Тейлора и появлению протяженных конвективных рукавов, в которых имеет место интенсивное опускание среды (фиг. 6, в).

Характерными особенностями этого нового квазистационарного состояния являются нисходящие и восходящие потоки, образующие валы, медленно дрейфующие к периферии, и сохранение циклонического характера течений в центральной области.

На фиг. 7 приведен график зависимости кинетической энергии среды в зоне, занятой вихрем от времени. Стадия выравнивания температур и скоростей между горизонтальными слоями после отключения подогрева продолжается примерно четыре первых оборота вихря. Дальнейший процесс эволюции существенным образом зависит от условий на верхней и нижней границах. В проведенном дополнительно численном расчете с условиями адиабатичности на верхней и нижней границах последующее затухание вихря происходит монотонно, однако при наличии теплоотвода через верхнюю границу области неравномерное остывание жидкости приводит к возникновению сил плавучести, вызывающих движение среды в вертикальной плоскости. Ста-

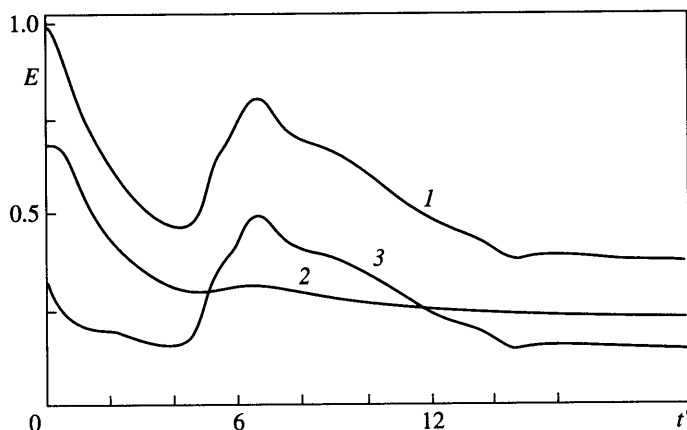


Фиг. 6. Поле вертикальных скоростей в вихре на различные моменты времени: *а* – до отключения нагрева, *б* – на переходной стадии после отключения нагрева, *в* – стадия наиболее интенсивных вертикальных движений, *г* – на квазистационарной стадии; светлые тона соответствуют подъему жидкости, темные тона – опусканию (интенсивность нормирована на начальное значение)

дия, обусловленная развитием неустойчивости Рэля–Тэйлора, длится примерно два характерных оборота вихря (резкий рост кривой 3 на фиг. 7) и затем переходит в фазу формирования протяженных рукавов, постепенно удаляющихся к периферии области. Окончательное остывание жидкости происходит в квазистационарном режиме достаточно продолжительное время.

Для оценки роли вращения системы в целом был проведен расчет, в котором одновременно отключаются и нагрев, и вращение кюветы. Показатель интенсивности вихря δ , равный отношению его собственной угловой скорости ω к угловой скорости вращения кюветы Ω , в данном расчете был порядка 10, что приводило к продолжительному стабильному вращению вихря и незначительному изменению рассмотренной выше картины его эволюции, хотя в данной постановке наблюдалось более быстрое разрушение спиральной структуры в центре вихря.

Заключение. Результаты численных экспериментов и сравнение их с данными физических экспериментов показали, что механизм зарождения и структура тайфунных вихрей могут быть воспроизведены на основе модели вращающейся конвективной



Фиг. 7. Кинетическая энергия вихря после отключения нагрева: 1 – полная; 2, 3 – горизонтального и вертикального движения; характерным временем является период одного оборота τ в ядре вихря на стационарной стадии; $t' = t/\tau$

ячейки без привлечения дополнительных физических эффектов. Образующийся крупномасштабный циклонический вихрь является достаточно стабильным образованием, существующим длительное время (более 20 оборотов) и после отключения энергетической подпитки. Разрушение условий тепловой конвекции в этом случае приводит к формированию вытянутых рукавов на периферии вихря с сохранением циклонического характера вращения в его ядре.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (№ 01-05-64232).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Непомнящий А.А. Устойчивость конвективных течений. М.: Наука, 1989. 319 с.
2. Гебхарт Б., Джалурия Й., Махаджан Р., Саммакия Б. Свободноконвективные течения, тепло – и массообмен. Кн. 2. М.: Мир, 1991. 528 с.
3. Полежаев В.И., Буэн А.В., Везуб Н.А. и др. Математическое моделирование конвективного теплообмена на основе уравнений Навье–Стокса. М.: Наука, 1987. 271 с.
4. Хаин А.П. Математическое моделирование тропических циклонов. Л.: Гидрометеоздат, 1984. 247 с.
5. Моисеев С.С., Руткевич П.В., Тур А.В., Яновский В.В. Вихревое динамо в конвективной среде со спиральной турбулентностью // ЖЭТФ. 1988. Т. 94. № 2. С. 144–153.
6. Моисеев С.С., Сагдеев Р.З., Тур А.В., Хоменко Г.А., Шукуров А.М. Физический механизм усиления вихревых возмущений в атмосфере // Докл. АН СССР. 1983. Т. 273. № 3. С. 549–553.
7. Богатырев Г.П., Смородин Б.Л. Физическая модель вращения тропического циклона // Письма в ЖЭТФ. 1996. Т. 63. № 1. С. 25–28.
8. Богатырев Г.П. Возбуждение циклонического вихря или лабораторная модель тропического циклона // Письма в ЖЭТФ. 1990. Т. 51. № 11. С. 557–559.
9. Каменкович В.М. Основы динамики океана. Л.: Гидрометеоздат, 1973. 240 с.
10. Bryan K. A numerical method for the study of the circulation of the World Ocean // J. Comput. Phys. 1969. V. 4. № 3. P. 347–376.
11. Semtner A., Mintz Y. Numerical simulation of the Gulf Stream and mid-ocean eddies // J. Phys. Oceanogr. 1977. V. 7. № 2. P. 208–230.